BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une tension alternative

Une tension alternative vaut, en volts, $u(t) = \sqrt{6}\cos(100\pi t) + \sqrt{2}\sin(100\pi t)$, où $t \geq 0$ est le temps en secondes. Pour tout réel x, on pose $s(x) = \sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x$, de sorte que $u(t) = s(100\pi t)$.

1. 0,75 pts

Écrire $s(x)$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, avec $r > 0$.

INDICE

Début : calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Ensuite :** simplifie $\dfrac{\sqrt{6}}{r}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{r}$, puis reconnais φ.

2. 0,75 pts

En déduire un encadrement de $s(x)$. Pour quels réels x la valeur $2\sqrt{2}$ est-elle atteinte ?

INDICE

Début : un cosinus est compris entre -1 et 1. **Ensuite :** à quelle condition sur $x - \dfrac{\pi}{6}$ le cosinus vaut-il 1 ?

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $s(x) = 2$.

INDICE

Début : divise par $2\sqrt{2}$ et reconnais la valeur remarquable $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Ensuite :** écris les deux familles de l'équation fondamentale du cosinus.

4. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $s(x) = 2$ dans $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Début : encadre k dans la première famille. **Ensuite :** fais de même dans la seconde. **Point délicat :** l'intervalle est ouvert en $-\pi$.

5. 0,75 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $s(x) \geq 2$.

INDICE

Début : pose $v = x - \dfrac{\pi}{6}$ et écris l'intervalle parcouru par v. **Ensuite :** lis sur le cercle l'arc où $\cos v \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 0,75 pts

À quel instant $t \geq 0$ la tension atteint-elle pour la première fois sa valeur maximale ?

INDICE

Outil : utilise la question 2 avec $x = 100\pi t$, et cherche le plus petit t positif.

Exercice 2 — 5 pts

Linéariser puis résoudre

Pour tout réel x, on pose $A(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x$.

1. — 0,75 pts

Vérifier que $A(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ pour tout réel x.

INDICE

Début : linéarise $2\cos^2 x$. **Ensuite :** reconnais une duplication dans $2\sin x \cos x$.

2. — 1 pts

Écrire $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ sous la forme $r\cos(2x - \varphi)$, avec $r > 0$. En déduire que $-1 \leq A(x) \leq 3$ pour tout réel x.

INDICE

Début : calcule r, puis reconnais φ. **Ensuite :** encadre le cosinus.

3. — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

INDICE

Début : isole le cosinus et reconnais $-\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$. **Ensuite :** écris les deux familles en $2x$, puis divise par 2.

4. — 1 pts

En déduire les solutions de $A(x) = 0$ dans $[0, \pi[$.

INDICE

Outil : encadre k dans chaque famille ; le pas est ici π.

5. — 1,25 pts

Contrôle. Vérifier que $A(x) = 4\cos x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, et retrouver ainsi les solutions de la question 4.

INDICE

Outil : factorise $A(x)$ par $2\cos x$, puis transforme $\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

Exercice 3 5 pts

Une rampe de pente un demi

Une rampe monte de 1 m quand on avance de 2 m à l'horizontale. Elle fait avec l'horizontale un angle a, tel que $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ et $\tan a = \dfrac{1}{2}$.

1. 0,75 pts

Calculer $\cos a$, puis $\sin a$.

INDICE

Début : la relation $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$ donne $\cos^2 a$. **Ensuite :** $\sin a = \tan a \times \cos a$.

2. 1 pts

En déduire $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$.

INDICE

Début : les formules de duplication du sinus et du cosinus. **Ensuite :** contrôle $\tan 2a$ par la formule de duplication de la tangente.

3. 0,75 pts

Calculer $\tan\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Outil : la tangente d'une somme et celle d'une différence, avec $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$.

4. 0,75 pts

Calculer $\cos(\pi - a)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right)$ et $\tan(\pi + a)$.

INDICE

Outil : les formules des angles associés, avec les valeurs de la question 1.

5. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\tan x = \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : l'équation s'écrit $\tan x = \tan a$. **Ensuite :** encadre k, en te servant de $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. **Point délicat :** un entier k négatif peut aussi convenir ; contrôle la borne $-\pi$.

6. 0,75 pts

Sur le cercle trigonométrique, M est le point d'abscisse curviligne a et P celui d'abscisse curviligne $a + 7\pi$. Donner l'abscisse curviligne principale et les coordonnées de P. En déduire que O, M et P sont alignés.

INDICE

Début : retire 8π à $a + 7\pi$. **Ensuite :** calcule une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$.

Exercice 4 5 pts

Une racine à écarter

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2\sin^2 x + 5\cos x + 1$.

1. 0,5 pts

Vérifier que $f(x) = -2\cos^2 x + 5\cos x + 3$ pour tout réel x.

INDICE

Début : remplace $\sin^2 x$ à l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. **Ensuite :** développe et réduis.

2. 0,75 pts

On pose $X = \cos x$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ s'écrit $2X^2 - 5X - 3 = 0$, puis résoudre cette équation du second degré.

INDICE

Début : multiplie les deux membres de $-2X^2 + 5X + 3 = 0$ par -1. **Ensuite :** calcule le discriminant Δ, puis les deux racines.

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

INDICE

Début : un cosinus est compris entre -1 et 1 : l'une des deux racines ne convient pas. **Ensuite :** reconnais $-\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ et écris les deux familles de l'équation fondamentale du cosinus.

4. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

Début : encadre k dans la première famille. **Ensuite :** fais de même dans la seconde. **Point délicat :** l'intervalle est ouvert en 2π.

5. 1 pts

Vérifier que $f(x) = (2\cos x + 1)(3 - \cos x)$ pour tout réel x. En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

INDICE

Début : développe le produit et compare avec la question 1. **Ensuite :** quel est le signe de $3 - \cos x$? Lis enfin sur le cercle l'arc où l'abscisse est au moins $-\dfrac{1}{2}$.

6. 0,75 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $2\sin^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0$.

INDICE

Début : cette équation s'écrit $f(2x) = 0$: utilise la question 3 avec $2x$ à la place de x. **Ensuite :** divise par 2, puis encadre k ; le pas est ici π.

Exercice 5 5 pts

Deux mobiles sur le cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Deux mobiles parcourent $\mathcal{C}$. À l'instant repéré par le réel x, le premier est au point M d'abscisse curviligne $2x$, le second au point N d'abscisse curviligne $x + \dfrac{\pi}{3}$.

1. 0,75 pts

Dans cette question, $x = \dfrac{11\pi}{4}$. Donner les abscisses curvilignes principales de M et de N, puis la mesure principale de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

INDICE

Début : retire des tours complets à $\dfrac{11\pi}{2}$ et à $\dfrac{11\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$ jusqu'à tomber dans $]-\pi, \pi]$. **Ensuite :** une mesure de l'angle est l'abscisse curviligne de N moins celle de M.

2. 1 pts

Pour tout réel x, donner une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$, puis contrôler le résultat de la question 1. Écrire les coordonnées de M et de N.

INDICE

Début : applique la définition d'une mesure avec les abscisses curvilignes $2x$ et $x + \dfrac{\pi}{3}$. **Ensuite :** remplace x par $\dfrac{11\pi}{4}$ et ajoute un tour complet.

3. 0,75 pts

En déduire les réels x de $[0, 2\pi[$ pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires.

INDICE

Début : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur angle orienté a une mesure multiple de π. **Ensuite :** encadre k ; le pas est π.

4. 0,5 pts

Pour chacune de ces deux valeurs, donner les coordonnées de M et de N. Les points M et N sont-ils confondus ou diamétralement opposés ?

INDICE

Outil : ramène chaque abscisse curviligne dans $]-\pi, \pi]$, puis utilise les valeurs remarquables et les angles associés.

5. 1 pts

Vérifier que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. En déduire les réels x de $[0, 2\pi[$ pour lesquels les droites (OM) et (ON) sont perpendiculaires.

INDICE

Début : calcule le produit scalaire avec les coordonnées de la question 2, puis reconnais le cosinus d'une différence. **Ensuite :** deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

6. 1 pts

Vérifier que $MN^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. En déduire les réels x de $[0, 2\pi[$ pour lesquels $MN \leq \sqrt{2}$.

INDICE

Début : développe MN^2 avec les coordonnées de la question 2, puis utilise la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ et la question 5. **Ensuite :** pose $u = x - \frac{\pi}{3}$, écris l'intervalle parcouru par u et lis l'arc sur le cercle. **Point délicat :** l'arc passe par le point de départ de cet intervalle.