BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une tension alternative

Une tension alternative vaut, en volts, $u(t) = \sqrt{6}\cos(100\pi t) + \sqrt{2}\sin(100\pi t)$, où $t \geq 0$ est le temps en secondes. Pour tout réel x, on pose $s(x) = \sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x$, de sorte que $u(t) = s(100\pi t)$.

1. 0,75 pts

Écrire $s(x)$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, avec $r > 0$.

INDICE

Début : calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Ensuite :** simplifie $\dfrac{\sqrt{6}}{r}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{r}$, puis reconnais φ.

CORRIGÉ

Rayon. La fonction s est de la forme $x \mapsto a\cos x + b\sin x$, avec $a = \sqrt{6}$ et $b = \sqrt{2}$. Donc :

$$r = \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Angle. On cherche φ tel que :

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Le réel $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ convient.

Conclusion. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, pour tout réel x :

$$s(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

2. 0,75 pts

En déduire un encadrement de $s(x)$. Pour quels réels x la valeur $2\sqrt{2}$ est-elle atteinte ?

INDICE

Début : un cosinus est compris entre -1 et 1. **Ensuite :** à quelle condition sur $x - \dfrac{\pi}{6}$ le cosinus vaut-il 1 ?

CORRIGÉ

Encadrement. Soit x un réel. Comme $-1 \leq \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \leq 1$, en multipliant par $2\sqrt{2} > 0$:

$$-2\sqrt{2} \leq s(x) \leq 2\sqrt{2}.$$

Valeur maximale. D'après la question 1, $s(x) = 2\sqrt{2}$ si et seulement si $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$, c'est-à-dire $x - \dfrac{\pi}{6} = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $-2\sqrt{2} \leq s(x) \leq 2\sqrt{2}$. La valeur $2\sqrt{2}$ est atteinte pour $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: la tension a pour amplitude $2\sqrt{2}$ volts.

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $s(x) = 2$.

INDICE

Début : divise par $2\sqrt{2}$ et reconnais la valeur remarquable $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Ensuite :** écris les deux familles de l'équation fondamentale du cosinus.

CORRIGÉ

Équation fondamentale. D'après la question 1, $s(x) = 2$ équivaut à :

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Familles. D'après l'équation fondamentale du cosinus : $x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$ et $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{12}$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, $s(x) = 2$ équivaut à $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $s(x) = 2$ dans $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Début : encadre k dans la première famille. **Ensuite :** fais de même dans la seconde. **Point délicat :** l'intervalle est ouvert en $-\pi$.

CORRIGÉ

Première famille. Pour $k \in \mathbb{Z}$, l'encadrement $-\pi < \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{17}{24} < k \leq \dfrac{7}{24}$, donc $k = 0$: on obtient $\dfrac{5\pi}{12}$.

Seconde famille. De même, $-\pi < -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{11}{24} < k \leq \dfrac{13}{24}$, donc $k = 0$: on obtient $-\dfrac{\pi}{12}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, les solutions de $s(x) = 2$ forment l'ensemble $S = \left\{-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right\}$.

5. 0,75 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $s(x) \geq 2$.

INDICE

Début : pose $v = x - \dfrac{\pi}{6}$ et écris l'intervalle parcouru par v. **Ensuite :** lis sur le cercle l'arc où $\cos v \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRIGÉ

Changement d'écriture. Posons $v = x - \dfrac{\pi}{6}$. Quand x parcourt $]-\pi, \pi]$, v parcourt $\left]-\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

D'après la question 1, $s(x) \geq 2$ équivaut à $\cos v \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lecture sur le cercle. Dans cet intervalle, $\cos v = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ seulement pour $v = -\dfrac{\pi}{4}$ et $v = \dfrac{\pi}{4}$. Les points d'abscisse au moins égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc qui va de $-\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}$ en passant par le point d'abscisse curviligne 0. Donc :

$$-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion. En ajoutant $\dfrac{\pi}{6}$, l'inéquation $s(x) \geq 2$ a pour ensemble de solutions dans $]-\pi, \pi]$ l'intervalle $S = \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right]$. Ses bornes sont les solutions de la question 4.

6. 0,75 pts

À quel instant $t \geq 0$ la tension atteint-elle pour la première fois sa valeur maximale ?

INDICE

Outil : utilise la question 2 avec $x = 100\pi t$, et cherche le plus petit t positif.

CORRIGÉ

Maximum. D'après la question 2, appliquée à $x = 100\pi t$, $u(t) = 2\sqrt{2}$ si et seulement si $100\pi t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En divisant par 100π :

$$t = \frac{1}{600} + \frac{k}{50}.$$

Premier instant. Pour $k \leq -1$, $t \leq \dfrac{1}{600} - \dfrac{1}{50} < 0$. Les instants $t \geq 0$ correspondent donc à $k \geq 0$, et le plus petit est obtenu pour $k = 0$.

Conclusion. La tension atteint pour la première fois sa valeur maximale à l'instant $t = \dfrac{1}{600}$ seconde.

Exercice 2 5 pts

Linéariser puis résoudre

Pour tout réel x, on pose $A(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x$.

1. 0,75 pts

Vérifier que $A(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ pour tout réel x.

INDICE

Début : linéarise $2\cos^2 x$. **Ensuite :** reconnais une duplication dans $2\sin x \cos x$.

CORRIGÉ

Linéarisation. Soit x un réel. D'après la formule $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, on a $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Duplication. D'après la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, on a $2\sqrt{3}\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin 2x$.

Conclusion. En ajoutant ces deux égalités, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &A(x) \\ &= 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x. \end{aligned}$$

2. 1 pts

Écrire $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ sous la forme $r\cos(2x - \varphi)$, avec $r > 0$. En déduire que $-1 \leq A(x) \leq 3$ pour tout réel x.

INDICE

Début : calcule r, puis reconnais φ. **Ensuite :** encadre le cosinus.

CORRIGÉ

Rayon et angle. L'expression s'écrit $a\cos X + b\sin X$, avec $X = 2x$, $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$. Donc $r = \sqrt{1+3} = 2$. On cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ convient.

Forme. D'après la transformation de $a\cos X + b\sin X$, appliquée au réel $X = 2x$:

$$\begin{aligned} &\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x \\ &= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Encadrement. D'après la question 1, $A(x) = 1 + 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Comme $-1 \leq \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leq 1$, on a $-2 \leq 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leq 2$, puis, en ajoutant 1 :

$$-1 \leq A(x) \leq 3.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $-1 \leq A(x) \leq 3$.

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

INDICE

Début : isole le cosinus et reconnais $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$. **Ensuite :** écris les deux familles en $2x$, puis divise par 2.

CORRIGÉ

Équation fondamentale. D'après la question 2, $A(x) = 0$ équivaut à $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, et $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$. L'équation fondamentale du cosinus donne $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Isoler x. En ajoutant $\frac{\pi}{3}$: $2x = \pi + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. En divisant par 2, le pas $2k\pi$ devient $k\pi$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, $A(x) = 0$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. 1 pts

En déduire les solutions de $A(x) = 0$ dans $[0, \pi[$.

INDICE

Outil : encadre k dans chaque famille ; le pas est ici π.

CORRIGÉ

Première famille. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi < \pi$ équivaut à $-\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2}$, donc $k = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Seconde famille. De même, $0 \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi < \pi$ équivaut à $\frac{1}{6} \leq k < \frac{7}{6}$, donc $k = 1$ et $x = \frac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Dans $[0, \pi[$, les solutions de $A(x) = 0$ forment l'ensemble $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

5. 1,25 pts

Contrôle. Vérifier que $A(x) = 4\cos x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, et retrouver ainsi les solutions de la question 4.

INDICE

Outil : factorise $A(x)$ par $2\cos x$, puis transforme $\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit x un réel. On met $2\cos x$ en facteur dans l'expression de départ, puis on applique la transformation de la question 2 au réel x au lieu de $2x$:

$$\begin{aligned} & A(x) \\ &= 2\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) \\ &= 2\cos x \times 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Facteurs nuls. Pour x dans $[0, \pi[$, $\cos x = 0$ donne $x = \dfrac{\pi}{2}$. Le réel $x - \dfrac{\pi}{3}$ parcourt $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$, où le cosinus ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{2}$: $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ donne $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $A(x) = 4\cos x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, et l'on retrouve dans $[0, \pi[$ les deux solutions $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ de la question 4.

Exercice 3 — 5 pts

Une rampe de pente un demi

Une rampe monte de 1 m quand on avance de 2 m à l'horizontale. Elle fait avec l'horizontale un angle a, tel que $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ et $\tan a = \dfrac{1}{2}$.

1. — 0,75 pts

Calculer $\cos a$, puis $\sin a$.

INDICE

Début : la relation $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$ donne $\cos^2 a$. **Ensuite :** $\sin a = \tan a \times \cos a$.

CORRIGÉ

Carré. D'après la relation $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$:

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

donc $\cos^2 a = \dfrac{4}{5}$.

Signe. Comme $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, le point associé à a est à droite de l'axe des ordonnées : $\cos a > 0$, et $\cos a = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Sinus. Comme $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$:

$$\begin{aligned} \sin a &= \tan a \times \cos a \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\cos a = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin a = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2. 1 pts

En déduire $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$.

INDICE

Début : les formules de duplication du sinus et du cosinus. **Ensuite :** contrôle $\tan 2a$ par la formule de duplication de la tangente.

CORRIGÉ

Sinus. D'après la duplication du sinus et la question 1 :

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2\sin a\cos a\\ &= 2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ &= \frac{20}{25}=\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Cosinus. D'après la duplication du cosinus, $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$.

Tangente. Comme $\cos 2a \neq 0$, $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$. Contrôle par la duplication de la tangente :

$$\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Conclusion. $\sin 2a=\frac{4}{5}$, $\cos 2a=\frac{3}{5}$ et $\tan 2a=\frac{4}{3}$.

3. 0,75 pts

Calculer $\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Outil : la tangente d'une somme et celle d'une différence, avec $\tan\frac{\pi}{4}=1$.

CORRIGÉ

Existence. On a $\frac{\pi}{4}<a+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$, et $a+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}$ car $a\neq\frac{\pi}{4}$, puisque $\tan a\neq 1$. De même, $-\frac{\pi}{4}<a-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$. Les deux tangentes existent.

Somme. D'après la formule de la tangente d'une somme, avec $\tan\frac{\pi}{4}=1$:

$$\begin{aligned}\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{\tan a+1}{1-\tan a}\\&=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3.\end{aligned}$$

Différence. D'après la formule de la tangente d'une différence :

$$\begin{aligned}\tan\left(a-\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{\tan a-1}{1+\tan a}\\&=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\tan\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=3$ et $\tan\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$.

4. 0,75 pts

Calculer $\cos(\pi-a)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ et $\tan(\pi+a)$.

INDICE

Outil : les formules des angles associés, avec les valeurs de la question 1.

CORRIGÉ

Cosinus et sinus. D'après les angles associés et la question 1 :

$$\begin{aligned}\cos(\pi-a)&=-\cos a\\&=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)&=\cos a\\&=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

Tangente. Les valeurs de la tangente se répètent tous les π : $\tan(\pi+a)=\tan a=\frac{1}{2}$.

Conclusion. $\cos(\pi-a)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\tan(\pi+a)=\frac{1}{2}$.

5. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\tan x = \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Début : l'équation s'écrit $\tan x = \tan a$. **Ensuite :** encadre k, en te servant de $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. **Point délicat :** un entier k négatif peut aussi convenir ; contrôle la borne $-\pi$.

CORRIGÉ

Famille. L'équation s'écrit $\tan x = \tan a$. D'après l'équation fondamentale de la tangente, $x = a + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$; comme $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, aucun de ces réels n'est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Encadrement de k. Pour $k = 0$, $x = a$ appartient à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $k = -1$, $x = a - \pi$ appartient à $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $k \geq 1$, $x > \pi$; pour $k \leq -2$, $x < -\pi$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, l'équation $\tan x = \dfrac{1}{2}$ a pour ensemble de solutions $S = \{a - \pi, a\}$.

6. 0,75 pts

Sur le cercle trigonométrique, M est le point d'abscisse curviligne a et P celui d'abscisse curviligne $a + 7\pi$. Donner l'abscisse curviligne principale et les coordonnées de P. En déduire que O, M et P sont alignés.

INDICE

Début : retire 8π à $a + 7\pi$. **Ensuite :** calcule une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$.

CORRIGÉ

Point P. On a $a + 7\pi - 8\pi = a - \pi$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$ d'après la question 5 : c'est l'abscisse curviligne principale de P. D'après les angles associés, $\cos(a - \pi) = -\cos a$ et $\sin(a - \pi) = -\sin a$, donc :

$$P\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Angle. Une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ est la différence des abscisses curvilignes :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) &\equiv (a - \pi) - a \\ &\equiv -\pi \ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \equiv 0 \ [\pi]$.

Conclusion. L'abscisse curviligne principale de P est $a - \pi$, et P a pour coordonnées $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires : O, M et P sont alignés, et P est diamétralement opposé à M. Les deux solutions de la question 5 repèrent ces deux points.

Exercice 4 5 pts

Une racine à écarter

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2\sin^2 x + 5\cos x + 1$.

1. 0,5 pts

Vérifier que $f(x) = -2\cos^2 x + 5\cos x + 3$ pour tout réel x.

INDICE

Début : remplace $\sin^2 x$ à l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. **Ensuite :** développe et réduis.

CORRIGÉ

Relation fondamentale. Soit x un réel. Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Réduction.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(1 - \cos^2 x\right) \\ &\quad + 5\cos x + 1 \\ &= -2\cos^2 x + 5\cos x + 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = -2\cos^2 x + 5\cos x + 3$.

2. 0,75 pts

On pose $X = \cos x$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ s'écrit $2X^2 - 5X - 3 = 0$, puis résoudre cette équation du second degré.

INDICE

Début : multiplie les deux membres de $-2X^2 + 5X + 3 = 0$ par -1. **Ensuite :** calcule le discriminant Δ, puis les deux racines.

CORRIGÉ

Équation en X. D'après la question 1, $f(x) = 0$ équivaut à $-2X^2 + 5X + 3 = 0$, puis, en multipliant les deux membres par -1, à $2X^2 - 5X - 3 = 0$.

Discriminant.

$$\begin{aligned} \Delta &= (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) \\ &= 49. \end{aligned}$$

Racines. Comme $\Delta = 7^2 > 0$, l'équation a deux racines : $X = \dfrac{5+7}{4} = 3$ ou $X = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ s'écrit $2X^2 - 5X - 3 = 0$, dont les solutions sont 3 et $-\dfrac{1}{2}$.

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

INDICE

Début : un cosinus est compris entre -1 et 1 : l'une des deux racines ne convient pas. **Ensuite :** reconnais $-\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ et écris les deux familles de l'équation fondamentale du cosinus.

CORRIGÉ

Racine écartée. Pour tout réel x, $\cos x \leq 1$: l'égalité $\cos x = 3$ est impossible.

Équation fondamentale. D'après la question 2, il reste $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. D'après les angles associés, $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$: l'équation s'écrit $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Conclusion. D'après l'équation fondamentale du cosinus, les solutions dans $\mathbb{R}$ de $f(x) = 0$ sont $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

Début : encadre k dans la première famille. **Ensuite :** fais de même dans la seconde. **Point délicat :** l'intervalle est ouvert en 2π.

CORRIGÉ

Première famille. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{3} \leq k < \dfrac{2}{3}$: $k = 0$, d'où $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Seconde famille. $0 \leq -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $\dfrac{1}{3} \leq k < \dfrac{4}{3}$: $k = 1$, d'où $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, les solutions de $f(x) = 0$ forment l'ensemble $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

5. 1 pts

Vérifier que $f(x) = (2\cos x + 1)(3 - \cos x)$ pour tout réel x. En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

INDICE

Début : développe le produit et compare avec la question 1. **Ensuite :** quel est le signe de $3 - \cos x$? Lis enfin sur le cercle l'arc où l'abscisse est au moins $-\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}&(2\cos x + 1)(3 - \cos x)\\ &= 6\cos x - 2\cos^2 x\\ &\quad + 3 - \cos x\\ &= -2\cos^2 x + 5\cos x + 3,\end{aligned}$$

qui est $f(x)$ d'après la question 1.

Signe du second facteur. Comme $\cos x \leq 1$, on a $3 - \cos x \geq 2 > 0$. Donc $f(x) \geq 0$ équivaut à $2\cos x + 1 \geq 0$, soit $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Lecture sur le cercle. Dans $]-\pi, \pi]$, $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ seulement pour $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $x = \dfrac{2\pi}{3}$. Les points d'abscisse au moins égale à $-\dfrac{1}{2}$ forment l'arc qui joint ces deux points en passant par le point d'abscisse curviligne 0.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = (2\cos x + 1)(3 - \cos x)$. Dans $]-\pi, \pi]$, l'inéquation $f(x) \geq 0$ a pour ensemble de solutions $S = \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

6. 0,75 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $2\sin^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0$.

INDICE

Début : cette équation s'écrit $f(2x) = 0$: utilise la question 3 avec $2x$ à la place de x. **Ensuite :** divise par 2, puis encadre k ; le pas est ici π.

CORRIGÉ

Changement de réel. Pour tout réel x, le premier membre de l'équation est $f(2x)$. D'après la question 3, appliquée au réel $2x$, l'équation équivaut à $2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Encadrement de k. $-\pi < \dfrac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{4}{3} < k \leq \dfrac{2}{3}$: $k = -1$ ou $k = 0$, d'où $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$. De même, $-\pi < -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{2}{3} < k \leq \dfrac{4}{3}$: $k = 0$ ou $k = 1$, d'où $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$: quatre solutions, contre deux pour $f(x) = 0$ dans le même intervalle.

Exercice 5 5 pts

Deux mobiles sur le cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Deux mobiles parcourent $\mathcal{C}$. À l'instant repéré par le réel x, le premier est au point M d'abscisse curviligne $2x$, le second au point N d'abscisse curviligne $x + \dfrac{\pi}{3}$.

1. 0,75 pts

Dans cette question, $x = \dfrac{11\pi}{4}$. Donner les abscisses curvilignes principales de M et de N, puis la mesure principale de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

INDICE

Début : retire des tours complets à $\dfrac{11\pi}{2}$ et à $\dfrac{11\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$ jusqu'à tomber dans $]-\pi, \pi]$. **Ensuite :** une mesure de l'angle est l'abscisse curviligne de N moins celle de M.

CORRIGÉ

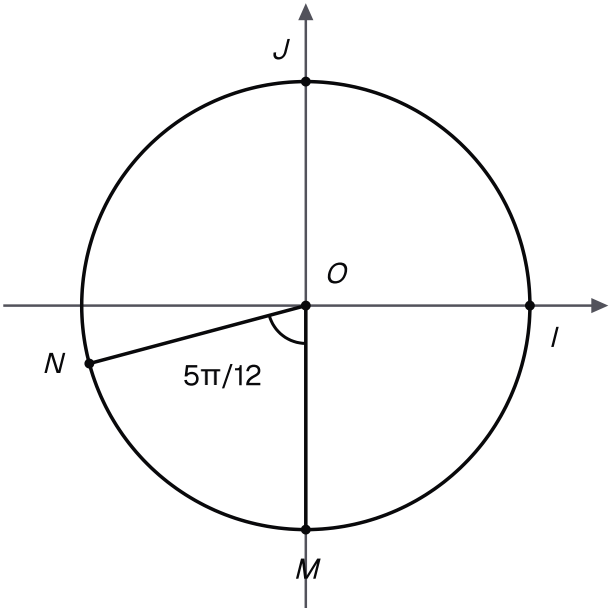
Point M. On a $2x = \dfrac{11\pi}{2}$ et $\dfrac{11\pi}{2} - 6\pi = -\dfrac{\pi}{2}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Point N. On a $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{33\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{12} = \dfrac{37\pi}{12}$ et $\dfrac{37\pi}{12} - 4\pi = -\dfrac{11\pi}{12}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Angle. Une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est l'abscisse curviligne de N diminuée de celle de M :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &\equiv -\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \\ &\equiv -\frac{5\pi}{12} \ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Les abscisses curvilignes principales sont $-\dfrac{\pi}{2}$ pour M et $-\dfrac{11\pi}{12}$ pour N. Comme $-\dfrac{5\pi}{12}$ appartient à $]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.



Pour x = 11π/4 : M en -π/2, N en -11π/12 ; de OM à ON, on tourne de 5π/12 dans le sens indirect.

2. 1 pts

Pour tout réel x, donner une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$, puis contrôler le résultat de la question 1. Écrire les coordonnées de M et de N.

INDICE

Début : applique la définition d'une mesure avec les abscisses curvilignes $2x$ et $x + \frac{\pi}{3}$. **Ensuite :** remplace x par $\frac{11\pi}{4}$ et ajoute un tour complet.

CORRIGÉ

Mesure. Pour tout réel x, avec la même propriété qu'à la question 1 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &\equiv \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2x \\ &\equiv \frac{\pi}{3} - x \ [2\pi].\end{aligned}$$

Contrôle. Pour $x = \frac{11\pi}{4}$: $\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{4} = -\frac{29\pi}{12}$, et $-\frac{29\pi}{12} + 2\pi = -\frac{5\pi}{12}$. On retrouve la mesure principale de la question 1.

Coordonnées. Par définition du cosinus et du sinus d'un réel, $M(\cos 2x, \sin 2x)$ et $N\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\frac{\pi}{3} - x$ est une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$, et le contrôle en $\frac{11\pi}{4}$ est concluant.

3. 0,75 pts

En déduire les réels x de $[0, 2\pi[$ pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires.

INDICE

Début : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur angle orienté a une mesure multiple de π. **Ensuite :** encadre k ; le pas est π.

CORRIGÉ

Condition. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont non nuls, car $OM = ON = 1$. Ils sont colinéaires si et seulement si $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv 0 \ [\pi]$, c'est-à-dire, d'après la question 2, $\frac{\pi}{3} - x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $-k$ décrit $\mathbb{Z}$ quand k le décrit, cela s'écrit $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Encadrement de k. $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\frac{1}{3} \leq k < \frac{5}{3}$, donc $k = 0$ ou $k = 1$.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires pour $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

4. 0,5 pts

Pour chacune de ces deux valeurs, donner les coordonnées de M et de N. Les points M et N sont-ils confondus ou diamétralement opposés ?

INDICE

Outil : ramène chaque abscisse curviligne dans $]-\pi, \pi]$, puis utilise les valeurs remarquables et les angles associés.

CORRIGÉ

Pour $x = \dfrac{\pi}{3}$. On a $2x = \dfrac{2\pi}{3}$ et $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$: M et N ont la même abscisse curviligne. D'après les angles associés, $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $M\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pour $x = \dfrac{4\pi}{3}$. On a $2x = \dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi$, donc $M\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Et $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$, donc $N\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Conclusion. Pour $x = \dfrac{\pi}{3}$, les points M et N sont confondus. Pour $x = \dfrac{4\pi}{3}$, les coordonnées de N sont les opposées de celles de M : les points sont diamétralement opposés, et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

5. 1 pts

Vérifier que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$. En déduire les réels x de $[0,2\pi[$ pour lesquels les droites (OM) et (ON) sont perpendiculaires.

INDICE

Début : calcule le produit scalaire avec les coordonnées de la question 2, puis reconnais le cosinus d'une différence. **Ensuite :** deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

CORRIGÉ

Produit scalaire. Le repère est orthonormé. D'après la question 2, puis la formule du cosinus d'une différence appliquée à $x+\frac{\pi}{3}$ et $2x$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\\&=\cos 2x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\\&\quad+\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}-2x\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right).\end{aligned}$$

Orthogonalité. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont non nuls, car $OM=ON=1$: les droites (OM) et (ON) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$. Comme $\cos(-a)=\cos a$, cela équivaut à $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0=\cos\frac{\pi}{2}$, soit $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Encadrement de k. Les solutions sont $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. Puis $0\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi<2\pi$ équivaut à $-\frac{5}{12}\le k<\frac{7}{12}$, donc $k=0$; et $0\le-\frac{\pi}{6}+2k\pi<2\pi$ équivaut à $\frac{1}{12}\le k<\frac{13}{12}$, donc $k=1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$. Dans $[0,2\pi[$, les droites (OM) et (ON) sont perpendiculaires pour $x=\frac{5\pi}{6}$ et pour $x=\frac{11\pi}{6}$.

6. 1 pts

Vérifier que $MN^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. En déduire les réels x de $[0, 2\pi[$ pour lesquels $MN \leq \sqrt{2}$.

INDICE

Début : développe MN^2 avec les coordonnées de la question 2, puis utilise la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ et la question 5. **Ensuite :** pose $u = x - \frac{\pi}{3}$, écris l'intervalle parcouru par u et lis l'arc sur le cercle. **Point délicat :** l'arc passe par le point de départ de cet intervalle.

CORRIGÉ

Distance. Notons $a = 2x$ et $b = x + \frac{\pi}{3}$. Le repère étant orthonormé, d'après la relation fondamentale (appliquée à a et à b) et la question 5 :

$$\begin{aligned} MN^2 &= (\cos b - \cos a)^2 \\ &\quad + (\sin b - \sin a)^2 \\ &= \left(\cos^2 b + \sin^2 b\right) \\ &\quad + \left(\cos^2 a + \sin^2 a\right) \\ &\quad - 2(\cos a \cos b \\ &\qquad + \sin a \sin b) \\ &= 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{aligned}$$

Inéquation. Comme $MN \geq 0$, $MN \leq \sqrt{2}$ équivaut à $MN^2 \leq 2$, soit $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \geq 0$, ou encore $\cos u \geq 0$ avec $u = x - \frac{\pi}{3}$, puisque $\cos(-u) = \cos u$. Quand x parcourt $[0, 2\pi[$, u parcourt $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$.

Lecture sur le cercle. Sur cet intervalle, $\cos u = 0$ pour $u = \frac{\pi}{2}$ et $u = \frac{3\pi}{2}$. Les points d'abscisse positive ou nulle forment le demi-cercle de droite, de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. L'intervalle commence sur cet arc, en $-\frac{\pi}{3}$, et y revient à partir de $\frac{3\pi}{2}$. Donc $-\frac{\pi}{3} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq u < \frac{5\pi}{3}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $MN^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$. En ajoutant $\frac{\pi}{3}$, on obtient $MN \leq \sqrt{2}$ pour x dans $S = \left[0, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$. Aux bornes $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$, $MN = \sqrt{2}$: ce sont les valeurs de la question 5, où (OM) et (ON) sont perpendiculaires.