BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Entraînement	7

Exercice 1

Une expression qui se simplifie

Pour tout réel x, on pose $B(x) = \sin(5\pi - x) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - 2\cos(x - 3\pi)$.

1.

Vérifier que $B(x) = 2\sin x + 2\cos x$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : retire d'abord un multiple de 2π à chaque angle : $5\pi - x$, $\frac{7\pi}{2} + x$ et $x - 3\pi$. Procède terme par terme.

2.

Vérifier que $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : développe le carré, puis utilise la relation fondamentale et la duplication du sinus.

3.

En déduire la valeur exacte de $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

Outil : $B(x)^2 = 4(\cos x + \sin x)^2$; trouve ensuite le signe de $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Une identité à vérifier

On veut vérifier l'égalité $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

1.

Pour quels réels x l'expression $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ est-elle définie ?

INDICE

Outil : les deux dénominateurs doivent être non nuls ; où le sinus et le cosinus s'annulent-ils sur le cercle ?

2.

Pour un tel réel x, réduire au même dénominateur et simplifier le numérateur.

INDICE

Outil : le numérateur est $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$; reconnais une formule d'addition.

3.

Conclure, puis contrôler l'égalité pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.

INDICE

Outil : la duplication du sinus fait apparaître le dénominateur.

Exercice 3

Deux écritures d'un même sinus

On cherche la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ sous deux formes.

1.

À l'aide de la linéarisation, vérifier que $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

INDICE

Outil : $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ avec $a=\dfrac{\pi}{12}$, puis le signe lu sur le cercle.

2.

Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$. En déduire que $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

INDICE

Outil : $\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; deux réels positifs qui ont le même carré sont égaux.

3.

En déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

INDICE

Outil : $\dfrac{13\pi}{12}=\pi+\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4

Une équation du second degré en sinus

On veut résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation (E) : $\cos 2x+3\sin x-2=0$.

1.

En posant $X=\sin x$, vérifier que (E) s'écrit $2X^2-3X+1=0$.

INDICE

Outil : choisis l'écriture de $\cos 2x$ qui ne contient que $\sin x$.

2.

Résoudre l'équation $2X^2-3X+1=0$.

INDICE

Outil : calcule le discriminant ; garde les racines comprises entre -1 et 1.

3.

En déduire les solutions de (E) dans $]-\pi,\pi]$.

INDICE

Outil : résous $\sin x=1$ et $\sin x=\dfrac{1}{2}$, puis encadre k dans chaque famille. **Point délicat :** pour $\sin x=1$, les deux familles se confondent.

Exercice 5

Une masse au bout d'un ressort

La position d'une masse accrochée à un ressort, en centimètres, est $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$, où x est proportionnel au temps.

1.

Écrire $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, avec $r > 0$. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

INDICE

Outil : ici $a = -1$ (coefficient de $\cos x$) et $b = \sqrt{3}$ (coefficient de $\sin x$).

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

INDICE

Outil : l'équation s'écrit $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; utilise $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

3.

Pour x dans $[0, 2\pi[$, quelles valeurs placent la masse à la position 1 cm ?

INDICE

Outil : encadre k dans chaque famille de la question 2.

Exercice 6

Factoriser pour résoudre

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin 5x - \sin x = 0$.

1.

Écrire $\sin 5x - \sin x$ sous la forme d'un produit.

INDICE

Outil : la différence de deux sinus, avec $p = 5x$ et $q = x$.

2.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin 2x = 0$.

INDICE

Outil : $0 = \sin 0$; écris les deux familles en $2x$, puis divise par 2.

3.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos 3x = 0$, puis conclure.

INDICE

Outil : $0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$; écris les deux familles en $3x$, puis divise par 3. **Point délicat :** ne perds pas les solutions de l'autre facteur : fais la réunion.

Exercice 7

Deux signaux qui se superposent

Deux haut-parleurs émettent des signaux de même période. On les modélise par $s_1 = 2\cos x$ et $s_2 = 2\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$, où x est proportionnel au temps. On étudie leur somme $s = s_1 + s_2$.

1.

Développer s_2 à l'aide d'une formule d'addition.

INDICE

Outil : le cosinus d'une différence, avec $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.

En déduire que $s = \cos x + \sqrt{3}\sin x$, puis écrire s sous la forme $r\cos(x - \varphi)$. L'amplitude de la somme est-elle la somme des amplitudes ?

INDICE

Outil : additionne, puis calcule r et cherche φ parmi les valeurs remarquables.

3.

Résoudre dans $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$ l'inéquation $s \geq 1$.

INDICE

Outil : pose $u = x - \dfrac{\pi}{3}$; l'inéquation devient $\cos u \geq \dfrac{1}{2}$, avec u dans $]-\pi, \pi]$.