BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Entraînement	7

Exercice 1

Une expression qui se simplifie

Pour tout réel x, on pose $B(x) = \sin(5\pi - x) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - 2\cos(x - 3\pi)$.

1.

Vérifier que $B(x) = 2\sin x + 2\cos x$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : retire d'abord un multiple de 2π à chaque angle : $5\pi - x$, $\frac{7\pi}{2} + x$ et $x - 3\pi$. Procède terme par terme.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On ramène chaque angle à un angle associé à x en retirant des multiples de 2π.

Premier terme. Comme $5\pi - x = (\pi - x) + 4\pi$:

$$\begin{aligned}\sin(5\pi - x) &= \sin(\pi - x)\\ &= \sin x.\end{aligned}$$

Deuxième terme. On écrit :

$$\frac{7\pi}{2} + x = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \pi + 2\pi.$$

Avec $\cos(a + \pi) = -\cos a$, puis $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$:

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\\ &= \sin x.\end{aligned}$$

Troisième terme. Comme $x - 3\pi = (x - \pi) - 2\pi$ et $\cos(x - \pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$:

$$-2\cos(x - 3\pi) = 2\cos x.$$

Conclusion. En ajoutant les trois termes, $B(x) = 2\sin x + 2\cos x$ pour tout réel x.

2.

Vérifier que $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : développe le carré, puis utilise la relation fondamentale et la duplication du sinus.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Développement. D'après l'identité $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$:

$$\begin{aligned}&(\cos x + \sin x)^2\\ &= \cos^2 x + \sin^2 x\\ &\quad + 2\sin x \cos x.\end{aligned}$$

Formules. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. D'après la duplication du sinus, $2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$.

3.

En déduire la valeur exacte de $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

Outil : $B(x)^2 = 4(\cos x + \sin x)^2$; trouve ensuite le signe de $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

CORRIGÉ

Carré. D'après la question 1, $B(x)^2 = 4(\cos x + \sin x)^2$ pour tout réel x. D'après la question 2, appliquée à $\frac{\pi}{12}$, dont le double est $\frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}B\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 &= 4\left(1 + \sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 4 \times \frac{3}{2} = 6.\end{aligned}$$

Signe. Comme $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, le point associé à $\frac{\pi}{12}$ a ses deux coordonnées positives : son cosinus et son sinus sont positifs, donc $B\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

Conclusion. $B\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est le réel positif de carré 6 : $B\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6}$.

Exercice 2

Une identité à vérifier

On veut vérifier l'égalité $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

1.

Pour quels réels x l'expression $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ est-elle définie ?

INDICE

Outil : les deux dénominateurs doivent être non nuls ; où le sinus et le cosinus s'annulent-ils sur le cercle ?

CORRIGÉ

L'expression est définie lorsque ses deux dénominateurs, $\sin x$ et $\cos x$, sont non nuls.

Sinus. $\sin x = 0$ lorsque le point associé à x est sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire pour $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Cosinus. $\cos x = 0$ lorsque ce point est sur l'axe des ordonnées, c'est-à-dire pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réunion. Ces deux familles forment ensemble les multiples de $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire les réels $\dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. L'expression est définie pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.

Pour un tel réel x, réduire au même dénominateur et simplifier le numérateur.

INDICE

Outil : le numérateur est $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$; reconnais une formule d'addition.

CORRIGÉ

Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\dfrac{k\pi}{2}$.

Même dénominateur. Le dénominateur commun $\sin x \cos x$ est non nul :

$$\begin{aligned}&\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}\\ &= \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x}.\end{aligned}$$

Numérateur. D'après la formule du sinus d'une différence, appliquée à $3x$ et x :

$$\begin{aligned}&\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x\\ &= \sin(3x - x) = \sin 2x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour un tel réel x, l'expression est égale à $\dfrac{\sin 2x}{\sin x \cos x}$.

3.

Conclure, puis contrôler l'égalité pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.

INDICE

Outil : la duplication du sinus fait apparaître le dénominateur.

CORRIGÉ

Simplification. Soit x un réel qui n'est pas de la forme $\dfrac{k\pi}{2}$. D'après la duplication du sinus, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, et $\sin x\cos x \neq 0$:

$$\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 2.$$

Conclusion. Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2.$$

Contrôle pour $x = \dfrac{\pi}{6}$. Ce réel n'est pas un multiple de $\dfrac{\pi}{2}$, et $3x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} - \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 0 = 2.$$

Exercice 3

Deux écritures d'un même sinus

On cherche la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ sous deux formes.

1.

À l'aide de la linéarisation, vérifier que $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

INDICE

Outil : $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ avec $a=\dfrac{\pi}{12}$, puis le signe lu sur le cercle.

CORRIGÉ

Linéarisation. D'après la formule $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$, avec $a=\dfrac{\pi}{12}$ et $2a=\dfrac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{12}&=\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Signe. Comme $0<\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{\pi}{2}$, le point associé est au-dessus de l'axe des abscisses : $\sin\dfrac{\pi}{12}>0$.

Conclusion. $\sin\dfrac{\pi}{12}$ est la racine carrée positive de $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$:

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

2.

Calculer $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$. En déduire que $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

INDICE

Outil : $\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; deux réels positifs qui ont le même carré sont égaux.

CORRIGÉ

Carré. Avec $\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2\\&=\frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}\\&=\frac{8-4\sqrt{3}}{16}\\&=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Égalité. Le réel $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ est positif, car $\sqrt{6}>\sqrt{2}$, et le réel $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ l'est aussi. Tous deux ont pour carré $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$, d'après ce calcul et la question 1. Or deux réels positifs de même carré sont égaux.

Conclusion. $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$, et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3.

En déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

INDICE

Outil : $\dfrac{13\pi}{12}=\pi+\dfrac{\pi}{12}$.

CORRIGÉ

Angle associé. Comme $\dfrac{13\pi}{12}=\pi+\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin(\pi+a)=-\sin a$:

$$\sin\frac{13\pi}{12}=-\sin\frac{\pi}{12}.$$

Valeur. D'après les questions 1 et 2, $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, donc :

$$\begin{aligned}\sin\frac{13\pi}{12}&=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Contrôle. Ce nombre est négatif, ce qui convient : le point associé à $\dfrac{13\pi}{12}$ est sous l'axe des abscisses.

Conclusion. $\sin\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 4

Une équation du second degré en sinus

On veut résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation (E) : $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$.

1.

En posant $X = \sin x$, vérifier que (E) s'écrit $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

INDICE

Outil : choisis l'écriture de $\cos 2x$ qui ne contient que $\sin x$.

CORRIGÉ

Duplication. Parmi les écritures de $\cos 2x$, la forme $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ne fait intervenir que $\sin x$.

Réécriture. Avec $X = \sin x$, l'équation (E) devient :

$$\begin{aligned} 1 - 2X^2 + 3X - 2 &= 0, \\ -2X^2 + 3X - 1 &= 0. \end{aligned}$$

On multiplie enfin les deux membres par -1.

Conclusion. En posant $X = \sin x$, l'équation (E) s'écrit $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

2.

Résoudre l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

INDICE

Outil : calcule le discriminant ; garde les racines comprises entre -1 et 1.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1.$$

Racines. Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux racines :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}, \\ X_2 &= \frac{3 + 1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Contrôle. Les deux racines appartiennent à $[-1, 1]$: chacune peut être une valeur de $\sin x$.

Conclusion. L'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$ a pour solutions $\frac{1}{2}$ et 1.

3.

En déduire les solutions de (E) dans $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Outil : résous $\sin x = 1$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$, puis encadre k dans chaque famille. **Point délicat :** pour $\sin x = 1$, les deux familles se confondent.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, (E) équivaut à $\sin x = 1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Équation $\sin x = 1$. Comme $1 = \sin \dfrac{\pi}{2}$ et $\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, les deux familles de l'équation fondamentale du sinus se confondent : $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Puis $-\pi < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{3}{4} < k \leq \dfrac{1}{4}$, donc $k = 0$.

Équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\dfrac{1}{2} = \sin \dfrac{\pi}{6}$, on obtient $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

- $-\pi < \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{7}{12} < k \leq \dfrac{5}{12}$, donc $k = 0$.
- $-\pi < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{11}{12} < k \leq \dfrac{1}{12}$, donc $k = 0$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, les solutions de (E) forment l'ensemble $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Exercice 5

Une masse au bout d'un ressort

La position d'une masse accrochée à un ressort, en centimètres, est $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$, où x est proportionnel au temps.

1.

Écrire $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, avec $r > 0$. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

INDICE

Outil : ici $a = -1$ (coefficient de $\cos x$) et $b = \sqrt{3}$ (coefficient de $\sin x$).

CORRIGÉ

Coefficients. L'expression s'écrit $a\cos x + b\sin x$, avec $a = -1$, coefficient de $\cos x$, et $b = \sqrt{3}$, coefficient de $\sin x$.

Rayon.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2.$$

Angle. On cherche φ tel que $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le point associé est à gauche de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses : $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ convient.

Conclusion. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, pour tout réel x :

$$y = 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

L'amplitude du mouvement est 2 cm.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$.

INDICE

Outil : l'équation s'écrit $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; utilise $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Équation fondamentale. D'après la question 1, l'équation équivaut à $2\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$, soit :

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}.$$

Familles. D'après l'équation fondamentale du cosinus : $x - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. En ajoutant $\dfrac{2\pi}{3}$, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x = \pi + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.

Pour x dans $[0, 2\pi[$, quelles valeurs placent la masse à la position 1 cm ?

INDICE

Outil : encadre k dans chaque famille de la question 2.

CORRIGÉ

Encadrement de k. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- $0 \leq \pi + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{2} \leq k < \dfrac{1}{2}$, donc $k = 0$ et $x = \pi$.
- $0 \leq \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{6} \leq k < \dfrac{5}{6}$, donc $k = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Contrôle. Pour $x = \dfrac{\pi}{3}$: $\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$. Pour $x = \pi$: $\sqrt{3} \times 0 - (-1) = 1$.

Conclusion. Pour x dans $[0, 2\pi[$, la masse est à la position 1 cm pour $x = \dfrac{\pi}{3}$ et pour $x = \pi$.

Exercice 6

Factoriser pour résoudre

On veut résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin 5x - \sin x = 0$.

1.

Écrire $\sin 5x - \sin x$ sous la forme d'un produit.

INDICE

Outil : la différence de deux sinus, avec $p = 5x$ et $q = x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Posons $p = 5x$ et $q = x$. Une différence de deux sinus se transforme en produit :

$$\begin{aligned}&\sin p - \sin q \\ &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

Demi-somme et demi-différence. $\dfrac{5x+x}{2} = 3x$ et $\dfrac{5x-x}{2} = 2x$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$\sin 5x - \sin x = 2\cos 3x \sin 2x.$$

2.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin 2x = 0$.

INDICE

Outil : $0 = \sin 0$; écris les deux familles en $2x$, puis divise par 2.

CORRIGÉ

Familles. Comme $0 = \sin 0$ et $\pi - 0 = \pi$, l'équation fondamentale du sinus donne $2x = 2k\pi$ ou $2x = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En divisant par 2 : $x = k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Encadrement de k.

- $0 \leq k\pi \leq \pi$ équivaut à $0 \leq k \leq 1$: $k = 0$ ou $k = 1$, d'où 0 et π.
- $0 \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{2} \leq k \leq \dfrac{1}{2}$: $k = 0$, d'où $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$, l'équation $\sin 2x = 0$ a pour solutions 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π.

3.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos 3x = 0$, puis conclure.

INDICE

Outil : $0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$; écris les deux familles en $3x$, puis divise par 3. **Point délicat :** ne perds pas les solutions de l'autre facteur : fais la réunion.

CORRIGÉ

Familles. Comme $0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$, l'équation fondamentale du cosinus donne $3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $3x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En divisant par 3 : $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

Encadrement de k.

- $0 \leq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{4} \leq k \leq \dfrac{5}{4}$: $k = 0$ ou $k = 1$, d'où $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.
- $0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \leq \pi$ équivaut à $\dfrac{1}{4} \leq k \leq \dfrac{7}{4}$: $k = 1$, d'où $\dfrac{\pi}{2}$.

Réunion. D'après la question 1, $\sin 5x - \sin x = 2\cos 3x \sin 2x$. Ce produit s'annule dès que l'un des deux facteurs s'annule, et dans ce cas seulement : on réunit les solutions des questions 2 et 3.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$, $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi\right\}$.

Exercice 7

Deux signaux qui se superposent

Deux haut-parleurs émettent des signaux de même période. On les modélise par $s_1 = 2\cos x$ et $s_2 = 2\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$, où x est proportionnel au temps. On étudie leur somme $s = s_1 + s_2$.

1.

Développer s_2 à l'aide d'une formule d'addition.

INDICE

Outil : le cosinus d'une différence, avec $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRIGÉ

Formule. D'après la formule du cosinus d'une différence, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos x\cos\frac{2\pi}{3} \\ &\quad + \sin x\sin\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Valeurs. Avec $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned}s_2 &= 2\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \\ &= -\cos x + \sqrt{3}\sin x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $s_2 = -\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

2.

En déduire que $s = \cos x + \sqrt{3}\sin x$, puis écrire s sous la forme $r\cos(x-\varphi)$. L'amplitude de la somme est-elle la somme des amplitudes ?

INDICE

Outil : additionne, puis calcule r et cherche φ parmi les valeurs remarquables.

CORRIGÉ

Somme. D'après la question 1, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} s &= 2\cos x - \cos x + \sqrt{3}\sin x \\ &= \cos x + \sqrt{3}\sin x. \end{aligned}$$

Forme $r\cos(x-\varphi)$. Ici $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$, donc $r = \sqrt{1+3} = 2$. On cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ convient. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$:

$$s = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Amplitude. L'amplitude de s vaut 2, alors que la somme des amplitudes vaut $2+2=4$: les deux signaux sont décalés et se compensent en partie.

Conclusion. $s = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; l'amplitude de la somme n'est pas la somme des amplitudes.

3.

Résoudre dans $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$ l'inéquation $s \geq 1$.

INDICE

Outil : pose $u = x - \dfrac{\pi}{3}$; l'inéquation devient $\cos u \geq \dfrac{1}{2}$, avec u dans $]-\pi, \pi]$.

CORRIGÉ

Changement d'écriture. Posons $u = x - \dfrac{\pi}{3}$. Quand x parcourt $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$, u parcourt $]-\pi, \pi]$.
D'après la question 2, $s \geq 1$ équivaut à $2\cos u \geq 1$, soit $\cos u \geq \dfrac{1}{2}$.

Lecture sur le cercle. Dans $]-\pi, \pi]$, $\cos u = \dfrac{1}{2}$ seulement pour $u = -\dfrac{\pi}{3}$ et $u = \dfrac{\pi}{3}$. Les points du cercle d'abscisse supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$ sont à droite de la droite verticale d'abscisse $\dfrac{1}{2}$: ils forment l'arc qui va de $-\dfrac{\pi}{3}$ à $\dfrac{\pi}{3}$. Donc :

$$-\frac{\pi}{3} \leq u \leq \frac{\pi}{3}.$$

Retour à x. En ajoutant $\dfrac{\pi}{3}$, on obtient $0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$.

Conclusion. Dans $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$, l'inéquation $s \geq 1$ a pour ensemble de solutions $S = \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.