BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Application	9

Exercice 1

Trois mesures principales

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

1.

Un angle orienté admet $\dfrac{47\pi}{6}$ pour mesure. Donner sa mesure principale.

INDICE

Outil : cherche l'entier k tel que $-\pi < \dfrac{47\pi}{6} - 2k\pi \leq \pi$.

2.

Un angle orienté admet $-\dfrac{23\pi}{3}$ pour mesure. Donner sa mesure principale.

INDICE

Outil : la mesure est négative ; on ajoute des tours complets. L'entier k cherché est donc négatif.

3.

Un angle orienté admet $\dfrac{101\pi}{4}$ pour mesure. Donner sa mesure principale.

INDICE

Outil : même encadrement ; contrôle que le résultat ne dépasse pas π.

4.

Donner les coordonnées du point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne $-\dfrac{23\pi}{3}$.

INDICE

Outil : deux abscisses curvilignes qui diffèrent d'un multiple de 2π repèrent le même point ; sers-toi de la question 2.

Exercice 2

Chasles et alignement

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ et $(\vec{v},\vec{w}) \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles relie $(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{u},\vec{w})$.

2.

En déduire une mesure de $(\vec{w},\vec{u})$ et une mesure de $(-\vec{u},\vec{w})$.

INDICE

Outil : échanger les vecteurs change le signe ; remplacer un vecteur par son opposé ajoute π.

3.

Quatre points distincts A, B, C et D vérifient $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

INDICE

Outil : calcule $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ par la relation de Chasles, puis compare-la à un multiple de π.

Exercice 3

Un point dans le troisième quart du cercle

Soit x un réel tel que $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ et $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

1.

Calculer $\cos x$.

INDICE

Outil : la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne le carré ; la position du point donne le signe.

2.

Calculer $\tan x$.

INDICE

Outil : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; rends le dénominateur entier.

3.

Vérifier le résultat à l'aide de la relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres.

Exercice 4

Réduire avec les angles associés

Pour tout réel x, on pose $A(x) = \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

1.

Simplifier $A(x)$.

INDICE

Outil : $3\pi - x = (\pi - x) + 2\pi$; applique ensuite une formule d'angle associé à chaque terme.

2.

Calculer $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{3}$ et $\tan\frac{2\pi}{3}$.

INDICE

Outil : écris $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

3.

En déduire $A\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

INDICE

Outil : utilise la forme simplifiée de la question 1.

Exercice 5

Valeurs exactes par les formules d'addition

On rappelle que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

1.

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$, puis contrôler son signe.

INDICE

Outil : le cosinus d'une somme.

2.

Calculer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$.

INDICE

Outil : la tangente d'une différence, puis multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur.

3.

En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$, en déduire $\sin\frac{\pi}{12}$.

INDICE

Outil : l'angle associé $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

Exercice 6

Angle double et angle moitié

Soit a un réel tel que $\cos a = \dfrac{2}{3}$ et $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

1.

Calculer $\sin a$.

INDICE

Outil : la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, puis le signe lu sur le cercle.

2.

Calculer $\sin 2a$ et $\cos 2a$.

INDICE

Outil : les formules de duplication ; pour le cosinus, la forme $2\cos^2 a - 1$ est la plus courte.

3.

Calculer $\cos \dfrac{a}{2}$.

INDICE

Outil : la linéarisation $\cos^2 b = \dfrac{1 + \cos 2b}{2}$, avec $b = \dfrac{a}{2}$.

Exercice 7

Factoriser des sommes de lignes

Pour tout réel x, on considère les sommes $\cos 4x - \cos 2x$ et $\sin 7x + \sin 3x$.

1.

Écrire $\cos 4x - \cos 2x$ sous la forme d'un produit.

INDICE

Outil : la différence de deux cosinus, avec $p = 4x$ et $q = 2x$.

2.

Écrire $\sin 7x + \sin 3x$ sous la forme d'un produit.

INDICE

Outil : la somme de deux sinus, avec $p = 7x$ et $q = 3x$.

3.

Calculer la valeur exacte de $\sin \dfrac{5\pi}{12} - \sin \dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Outil : la différence de deux sinus ; calcule d'abord la demi-somme et la demi-différence.

Exercice 8

Amplitude d'un courant alternatif

1.

Écrire $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$, avec $r>0$.

INDICE

Outil : calcule $r=\sqrt{a^2+b^2}$, puis cherche φ tel que $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}$.

2.

En déduire un encadrement de $\cos x - \sqrt{3}\sin x$, et les réels x pour lesquels cette expression vaut 2.

INDICE

Outil : un cosinus est compris entre -1 et 1 ; il vaut 1 quand l'angle est un multiple de 2π.

3.

Dans un circuit, l'intensité du courant, en ampères, vaut $i(t)=-\sqrt{2}\cos(100\pi t)+\sqrt{6}\sin(100\pi t)$, où t est le temps en secondes. Écrire $i(t)$ sous la forme $I\cos(100\pi t-\varphi)$, avec $I>0$, et donner l'amplitude I.

INDICE

Outil : même méthode, avec $a=-\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, et $100\pi t$ à la place de x.

Exercice 9

Équations fondamentales autour d'un pendule

L'angle d'un pendule avec la verticale vaut $\theta = \frac{1}{5}\cos x$, en radians, où x est proportionnel au temps.

1.

Les instants où l'angle du pendule vaut $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ radian vérifient $\frac{1}{5}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : isole d'abord $\cos x$, puis $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$; écris les deux familles de l'équation fondamentale du cosinus.

2.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : résous d'abord en $2x$, puis divise par 2 ; encadre ensuite k.

3.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, privé de $-\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$, l'équation $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : $-\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; les solutions de la tangente se répètent tous les π. **Point délicat :** $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont exclus : vérifie que tes solutions n'en sont pas.