BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Application	9

Exercice 1

Trois mesures principales

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

1.

Un angle orienté admet $\dfrac{47\pi}{6}$ pour mesure. Donner sa mesure principale.

INDICE

Outil : cherche l'entier k tel que $-\pi < \dfrac{47\pi}{6} - 2k\pi \leq \pi$.

CORRIGÉ

On cherche l'entier k pour lequel $\dfrac{47\pi}{6} - 2k\pi$ appartient à $]-\pi, \pi]$.

Encadrement de k. Après division par π, la condition devient :

$$-1 < \frac{47}{6} - 2k \leq 1.$$

Elle équivaut à $\dfrac{41}{6} \leq 2k < \dfrac{53}{6}$, soit :

$$\frac{41}{12} \leq k < \frac{53}{12}.$$

Or $3 < \dfrac{41}{12}$ et $\dfrac{53}{12} < 5$: le seul entier de cet intervalle est $k = 4$.

Calcul.

$$\frac{47\pi}{6} - 8\pi = -\frac{\pi}{6}.$$

Conclusion. L'angle orienté de mesure $\dfrac{47\pi}{6}$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{6}$.

2.

Un angle orienté admet $-\dfrac{23\pi}{3}$ pour mesure. Donner sa mesure principale.

INDICE

Outil : la mesure est négative ; on ajoute des tours complets. L'entier k cherché est donc négatif.

CORRIGÉ

La mesure donnée est négative : on lui ajoute des tours complets, et l'entier k cherché est négatif.

Encadrement de k. La condition $-\pi < -\dfrac{23\pi}{3} - 2k\pi \leq \pi$ s'écrit, après division par π :

$$-1 < -\frac{23}{3} - 2k \leq 1.$$

Elle équivaut à $-\dfrac{26}{3} \leq 2k < -\dfrac{20}{3}$, soit :

$$-\frac{13}{3} \leq k < -\frac{10}{3}.$$

Comme $-5 < -\dfrac{13}{3}$ et $-\dfrac{10}{3} < -3$, le seul entier possible est $k = -4$.

Calcul.

$$-\frac{23\pi}{3} + 8\pi = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion. La mesure principale de cet angle orienté est $\dfrac{\pi}{3}$.

3.

Un angle orienté admet $\dfrac{101\pi}{4}$ pour mesure. Donner sa mesure principale.

INDICE

Outil : même encadrement ; contrôle que le résultat ne dépasse pas π.

CORRIGÉ

Encadrement de k. La condition $-\pi < \dfrac{101\pi}{4} - 2k\pi \leq \pi$ s'écrit, après division par π :

$$-1 < \frac{101}{4} - 2k \leq 1.$$

Elle équivaut à $\dfrac{97}{4} \leq 2k < \dfrac{105}{4}$, soit :

$$\frac{97}{8} \leq k < \frac{105}{8}.$$

Comme $12 < \dfrac{97}{8}$ et $\dfrac{105}{8} < 14$, on obtient $k = 13$.

Calcul.

$$\frac{101\pi}{4} - 26\pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Retirer seulement 24π donnerait $\dfrac{5\pi}{4}$, qui dépasse π : ce ne serait pas la mesure principale.

Conclusion. La mesure principale de cet angle orienté est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

4.

Donner les coordonnées du point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne $-\dfrac{23\pi}{3}$.

INDICE

Outil : deux abscisses curvilignes qui diffèrent d'un multiple de 2π repèrent le même point ; sers-toi de la question 2.

CORRIGÉ

Même point. D'après la question 2, $-\dfrac{23\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$ diffèrent de 8π, soit quatre tours complets. Ces deux abscisses curvilignes repèrent donc le même point M de $\mathcal{C}$.

Coordonnées. Par définition du cosinus et du sinus, M a pour coordonnées $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}, \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Conclusion. Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne $-\dfrac{23\pi}{3}$ est $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 2

Chasles et alignement

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ et $(\vec{v},\vec{w}) \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles relie $(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{u},\vec{w})$.

CORRIGÉ

Relation de Chasles. Les trois vecteurs sont non nuls, donc :

$$\begin{aligned}(\vec{u},\vec{w}) &\equiv (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \\ &\equiv -\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Calcul.

$$\begin{aligned}-\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} &= \frac{-9\pi + 5\pi}{12} \\ &= -\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Mesure principale. Le réel $-\dfrac{\pi}{3}$ appartient à $]-\pi,\pi]$.

Conclusion. La mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

2.

En déduire une mesure de $(\vec{w},\vec{u})$ et une mesure de $(-\vec{u},\vec{w})$.

INDICE

Outil : échanger les vecteurs change le signe ; remplacer un vecteur par son opposé ajoute π.

CORRIGÉ

Angle opposé. Échanger les deux vecteurs change une mesure en son opposée :

$$(\vec{w},\vec{u}) \equiv -(\vec{u},\vec{w}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Vecteur opposé. Remplacer $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ ajoute π à une mesure :

$$\begin{aligned}(-\vec{u},\vec{w}) &\equiv (\vec{u},\vec{w}) + \pi \\ &\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi \\ &\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\vec{w},\vec{u})$, et $\dfrac{2\pi}{3}$ une mesure de $(-\vec{u},\vec{w})$.

3.

Quatre points distincts A, B, C et D vérifient $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

INDICE

Outil : calcule $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par la relation de Chasles, puis compare-la à un multiple de π.

CORRIGÉ

Relation de Chasles.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} \\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Alignement. Une mesure égale à π est un multiple de π :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi].$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires, et de sens contraires : A se trouve entre B et C.

Conclusion. Oui, les points A, B et C sont alignés.

Exercice 3

Un point dans le troisième quart du cercle

Soit x un réel tel que $\sin x = -\dfrac{2}{3}$ et $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

1.

Calculer $\cos x$.

INDICE

Outil : la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne le carré ; la position du point donne le signe.

CORRIGÉ

Carré. D'après la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Donc $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Signe. Comme $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, le point du cercle associé à x se trouve à gauche de l'axe des ordonnées : $\cos x < 0$.

Conclusion. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

2.

Calculer $\tan x$.

INDICE

Outil : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; rends le dénominateur entier.

CORRIGÉ

Quotient. Comme $\cos x \neq 0$, la tangente de x existe :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Contrôle. Le point est sous l'axe des abscisses et à gauche de l'axe des ordonnées : sinus et cosinus sont tous deux négatifs, et leur quotient est positif.

Conclusion. $\tan x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.

Vérifier le résultat à l'aide de la relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres.

CORRIGÉ

Premier membre. D'après la question 2, $\tan^2 x = \dfrac{4}{5}$, donc :

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}.$$

Second membre. D'après la question 1, $\cos^2 x = \dfrac{5}{9}$, donc :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{9}{5}.$$

Conclusion. Les deux membres valent $\dfrac{9}{5}$: la relation est vérifiée, ce qui confirme le résultat de la question 2.

Exercice 4

Réduire avec les angles associés

Pour tout réel x, on pose $A(x) = \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(-x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

1.

Simplifier $A(x)$.

INDICE

Outil : $3\pi - x = (\pi - x) + 2\pi$; applique ensuite une formule d'angle associé à chaque terme.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On ramène chaque terme à une ligne trigonométrique de x.

Tours complets. Comme $3\pi - x = (\pi - x) + 2\pi$, le cosinus étant de période 2π, puis d'après les angles associés :

$$\begin{aligned}\cos(3\pi - x) &= \cos(\pi - x)\\ &= -\cos x.\end{aligned}$$

Autres termes. D'après les angles associés :

- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$;
- $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

Somme.

$$\begin{aligned}A(x) &= -\cos x + \cos x\\ &\quad - \sin x - \sin x\\ &= -2\sin x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $A(x) = -2\sin x$.

2.

Calculer $\sin\dfrac{7\pi}{6}$, $\cos\dfrac{5\pi}{3}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{3}$.

INDICE

Outil : écris $\dfrac{7\pi}{6}=\pi+\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{3}=2\pi-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Sinus. Comme $\dfrac{7\pi}{6}=\pi+\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin(\pi+a)=-\sin a$:

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{6}&=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\&=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Cosinus. Comme $\dfrac{5\pi}{3}=2\pi-\dfrac{\pi}{3}$ et $\cos(-a)=\cos a$:

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{3}&=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tangente. Comme $\dfrac{2\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{3}$ et $\tan(\pi-a)=-\tan a$:

$$\begin{aligned}\tan\frac{2\pi}{3}&=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

3.

En déduire $A\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

INDICE

Outil : utilise la forme simplifiée de la question 1.

CORRIGÉ

On applique la question 1 au réel $\dfrac{7\pi}{6}$, puis on remplace le sinus par sa valeur trouvée à la question 2 :

$$\begin{aligned}A\left(\frac{7\pi}{6}\right)&=-2\sin\frac{7\pi}{6}\\&=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=1.\end{aligned}$$

Conclusion. $A\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=1$.

Exercice 5

Valeurs exactes par les formules d'addition

On rappelle que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

1.

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$, puis contrôler son signe.

INDICE

Outil : le cosinus d'une somme.

CORRIGÉ

Formule. D'après la formule du cosinus d'une somme, appliquée à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} \\ &\quad - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

En effet, $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Signe. Comme $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{12} < \pi$, le point associé est à gauche de l'axe des ordonnées : un cosinus négatif est attendu. C'est bien le cas, car $\sqrt{2} < \sqrt{6}$.

Conclusion. $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, nombre négatif comme prévu.

2.

Calculer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Outil : la tangente d'une différence, puis multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur.

CORRIGÉ

Existence. Le réel $\dfrac{\pi}{12}$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$: sa tangente existe.

Formule. D'après la formule de la tangente d'une différence, appliquée à $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{4}$, avec $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ et $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$:

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{12}&=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Quantité conjuguée. Pour rendre le dénominateur entier, on multiplie les deux termes de la fraction par $\sqrt{3}-1$, quantité conjuguée de $\sqrt{3}+1$:

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{12}&=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\\&=2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

3.

En remarquant que $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}$, en déduire $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Outil : l'angle associé $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$.

CORRIGÉ

Angle associé. D'après la formule $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$, appliquée à $a=\dfrac{\pi}{12}$:

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\\&=-\sin\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Valeur. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12}&=-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 6

Angle double et angle moitié

Soit a un réel tel que $\cos a = \dfrac{2}{3}$ et $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

1.

Calculer $\sin a$.

INDICE

Outil : la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, puis le signe lu sur le cercle.

CORRIGÉ

Carré. D'après la relation fondamentale :

$$\begin{aligned}\sin^2 a &= 1 - \cos^2 a \\ &= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

Signe. Comme $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, le point associé à a est au-dessus de l'axe des abscisses : $\sin a > 0$.

Conclusion. $\sin a = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

2.

Calculer $\sin 2a$ et $\cos 2a$.

INDICE

Outil : les formules de duplication ; pour le cosinus, la forme $2\cos^2 a - 1$ est la plus courte.

CORRIGÉ

Sinus. D'après la formule de duplication du sinus et la question 1 :

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{9}.\end{aligned}$$

Cosinus. Parmi les écritures de $\cos 2a$, la forme $2\cos^2 a - 1$ n'utilise que la donnée :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 2 \times \frac{4}{9} - 1 \\ &= -\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin 2a = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$ et $\cos 2a = -\dfrac{1}{9}$.

3.

Calculer $\cos\dfrac{a}{2}$.

INDICE

Outil : la linéarisation $\cos^2 b = \dfrac{1+\cos 2b}{2}$, avec $b = \dfrac{a}{2}$.

CORRIGÉ

Linéarisation. D'après la formule $\cos^2 b = \dfrac{1+\cos 2b}{2}$, appliquée à $b = \dfrac{a}{2}$:

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{a}{2} &= \frac{1+\cos a}{2}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{5}{3} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Signe. Comme $0 < \dfrac{a}{2} < \dfrac{\pi}{4}$, le point associé à $\dfrac{a}{2}$ est à droite de l'axe des ordonnées : $\cos\dfrac{a}{2} > 0$.

Racine.

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Conclusion. $\cos\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

Exercice 7

Factoriser des sommes de lignes

Pour tout réel x, on considère les sommes $\cos 4x - \cos 2x$ et $\sin 7x + \sin 3x$.

1.

Écrire $\cos 4x - \cos 2x$ sous la forme d'un produit.

INDICE

Outil : la différence de deux cosinus, avec $p = 4x$ et $q = 2x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Posons $p = 4x$ et $q = 2x$. Une différence de deux cosinus se transforme en produit :

$$\begin{aligned}&\cos p - \cos q\\&= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

Demi-somme et demi-différence. $\dfrac{p+q}{2} = 3x$ et $\dfrac{p-q}{2} = x$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\cos 4x - \cos 2x\\&= -2\sin 3x \sin x.\end{aligned}$$

2.

Écrire $\sin 7x + \sin 3x$ sous la forme d'un produit.

INDICE

Outil : la somme de deux sinus, avec $p = 7x$ et $q = 3x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Posons $p = 7x$ et $q = 3x$. Une somme de deux sinus se transforme en produit :

$$\begin{aligned}&\sin p + \sin q\\&= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

Demi-somme et demi-différence. $\dfrac{p+q}{2} = 5x$ et $\dfrac{p-q}{2} = 2x$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sin 7x + \sin 3x\\&= 2\sin 5x \cos 2x.\end{aligned}$$

3.

Calculer la valeur exacte de $\sin\dfrac{5\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Outil : la différence de deux sinus ; calcule d'abord la demi-somme et la demi-différence.

CORRIGÉ

Formule. Posons $p=\dfrac{5\pi}{12}$ et $q=\dfrac{\pi}{12}$. Une différence de deux sinus se transforme en produit :

$$\begin{aligned}&\sin p-\sin q\\&=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.\end{aligned}$$

Demi-somme et demi-différence. $\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{p-q}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$.

Valeur.

$$\begin{aligned}&\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\\&=2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin\dfrac{5\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 8

Amplitude d'un courant alternatif

1.

Écrire $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$, avec $r > 0$.

INDICE

Outil : calcule $r = \sqrt{a^2+b^2}$, puis cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

CORRIGÉ

Rayon. L'expression est de la forme $a\cos x + b\sin x$, avec $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$. Donc :

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

Angle. On cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le point associé à φ est à droite de l'axe des ordonnées et sous l'axe des abscisses : $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ convient.

Forme. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, comme $x - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = x + \dfrac{\pi}{3}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\cos x - \sqrt{3}\sin x\\ &= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, avec $r = 2$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$.

2.

En déduire un encadrement de $\cos x - \sqrt{3}\sin x$, et les réels x pour lesquels cette expression vaut 2.

INDICE

Outil : un cosinus est compris entre -1 et 1 ; il vaut 1 quand l'angle est un multiple de 2π.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit x un réel. Un cosinus est compris entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \leq 1.$$

En multipliant par $2 > 0$, d'après la question 1 :

$$-2 \leq \cos x - \sqrt{3}\sin x \leq 2.$$

Valeur 2. L'expression vaut 2 si et seulement si $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$, c'est-à-dire si $x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $-2 \leq \cos x - \sqrt{3}\sin x \leq 2$. L'expression vaut 2 exactement pour $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.

Dans un circuit, l'intensité du courant, en ampères, vaut $i(t) = -\sqrt{2}\cos(100\pi t) + \sqrt{6}\sin(100\pi t)$, où t est le temps en secondes. Écrire $i(t)$ sous la forme $I\cos(100\pi t - \varphi)$, avec $I > 0$, et donner l'amplitude I.

INDICE

Outil : même méthode, avec $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, et $100\pi t$ à la place de x.

CORRIGÉ

On reprend la méthode de la question 1 avec $a = -\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{6}$, le réel $100\pi t$ jouant le rôle de x.

Amplitude.

$$I = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Angle. On cherche φ tel que :

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2},$$
$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le point associé à φ est à gauche de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses : $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ convient.

Conclusion. Pour tout réel t, $i(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$: l'amplitude du courant est $I = 2\sqrt{2}$ ampères.

Exercice 9

Équations fondamentales autour d'un pendule

L'angle d'un pendule avec la verticale vaut $\theta = \dfrac{1}{5}\cos x$, en radians, où x est proportionnel au temps.

1.

Les instants où l'angle du pendule vaut $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ radian vérifient $\dfrac{1}{5}\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : isole d'abord $\cos x$, puis $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$; écris les deux familles de l'équation fondamentale du cosinus.

CORRIGÉ

Isoler le cosinus. On multiplie les deux membres par 5. L'équation équivaut à $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Valeur remarquable. D'après les angles associés, $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'équation s'écrit donc :

$$\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}.$$

Familles. D'après l'équation fondamentale du cosinus, $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, l'équation a pour solutions les réels $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : résous d'abord en $2x$, puis divise par 2 ; encadre ensuite k.

CORRIGÉ

Équation en $2x$. On a $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$ et $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. D'après l'équation fondamentale du sinus, $2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Division par 2. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Encadrement de k. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- $0 \leq \dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{6} \leq k \leq \dfrac{5}{6}$, donc $k = 0$.
- $0 \leq \dfrac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{3} \leq k \leq \dfrac{2}{3}$, donc $k = 0$.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

3.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, privé de $-\dfrac{\pi}{2}$ et de $\dfrac{\pi}{2}$, l'équation $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$; les solutions de la tangente se répètent tous les π. **Point délicat :** $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ sont exclus : vérifie que tes solutions n'en sont pas.

CORRIGÉ

Valeur remarquable. Comme $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan(-a) = -\tan a$, on a $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Famille. D'après l'équation fondamentale de la tangente, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Aucun de ces réels n'est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$: les valeurs exclues ne sont jamais atteintes.

Encadrement de k. $-\pi < -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{6} < k \leq \dfrac{7}{6}$, donc $k = 0$ ou $k = 1$.

Conclusion. Dans l'intervalle donné, $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.