BURHAN

Calcul trigonométrique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/calcul-trigonometrique/cours

Chapitre	Semestre
Calcul trigonométrique	Semestre 1

Des oscillations aux formules

Sur l'écran d'un oscilloscope, tu observes deux tensions de même période : $3\cos(\omega t)$, d'amplitude 3 volts, et $4\sin(\omega t)$, d'amplitude 4 volts.

Le circuit les additionne. Le signal obtenu oscille encore, avec la même période. Mais quelle est son amplitude ?

Devine : Une prédiction

Quelle est l'amplitude du signal $3\cos(\omega t) + 4\sin(\omega t)$?

A. 7 volts

Faux.

Il faudrait $\cos(\omega t) = 1$ et $\sin(\omega t) = 1$ en même temps : c'est impossible.

B. 1 volt

Faux.

Les deux tensions ne se retranchent pas toujours : à certains instants, elles sont toutes deux positives.

C. 5 volts

Juste.

Juste : le signal atteint 5 volts, et ne dépasse jamais cette valeur.

D. 12 volts

Faux.

On additionne les tensions, on ne les multiplie pas.

Correction

Considère un instant où $\cos(\omega t) = \dfrac{3}{5}$ et $\sin(\omega t) = \dfrac{4}{5}$. Un tel instant existe, car :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$$

À cet instant, le signal vaut $\dfrac{9}{5} + \dfrac{16}{5} = 5$.

La valeur 7 est impossible : si $\cos(\omega t) = 1$, alors $\sin(\omega t) = 0$.

Tu démontreras dans ce chapitre que le signal reste entre -5 et 5.

Pour répondre, il te faut des **formules** sur le cosinus et le sinus.

Dans ce chapitre, tu repères les points du cercle trigonométrique et les angles orientés. Tu calcules des valeurs exactes avec les formules d'addition et de duplication.

Tu écris ensuite une somme $a\cos x + b\sin x$ comme un seul cosinus. Enfin, tu résous des équations et des inéquations sur le cercle.

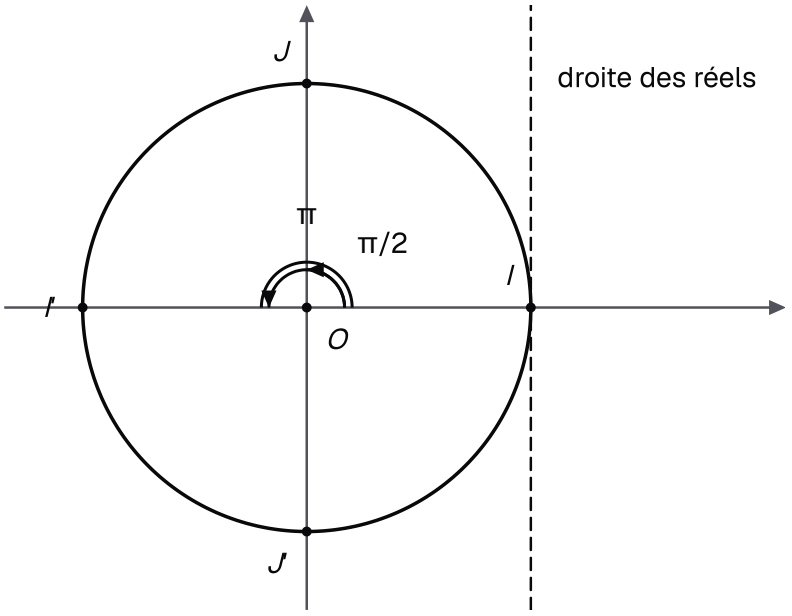
Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

Enrouler la droite des réels

Rappel du tronc commun. Un cercle de rayon 1 a pour longueur 2π.

On enroule la droite des réels autour de ce cercle, comme un fil. Le réel 0 se pose sur le point $I(1,0)$.

Les réels positifs s'enroulent dans le sens direct, contraire à celui des aiguilles d'une montre. Les réels négatifs s'enroulent dans l'autre sens.



La droite des réels, tangente au cercle en I, s'enroule dans le sens direct : π/2 tombe en J, puis π en I'.

Devine : Trois quarts de tour

Après enroulement, sur quel point du cercle arrive le réel $\dfrac{3\pi}{2}$?

A. Sur le point $(0,-1)$.

Juste.

Juste : $\dfrac{3\pi}{2}$ vaut les trois quarts de 2π.

B. Sur le point $(0,1)$.

Faux.

C'est le point de $\frac{\pi}{2}$, un quart de tour.

C. Sur le point $(-1, 0)$.

Faux.

C'est le point de π, un demi-tour.

D. Sur le point $I(1, 0)$.

Faux.

C'est le point de 2π, un tour complet.

Correction

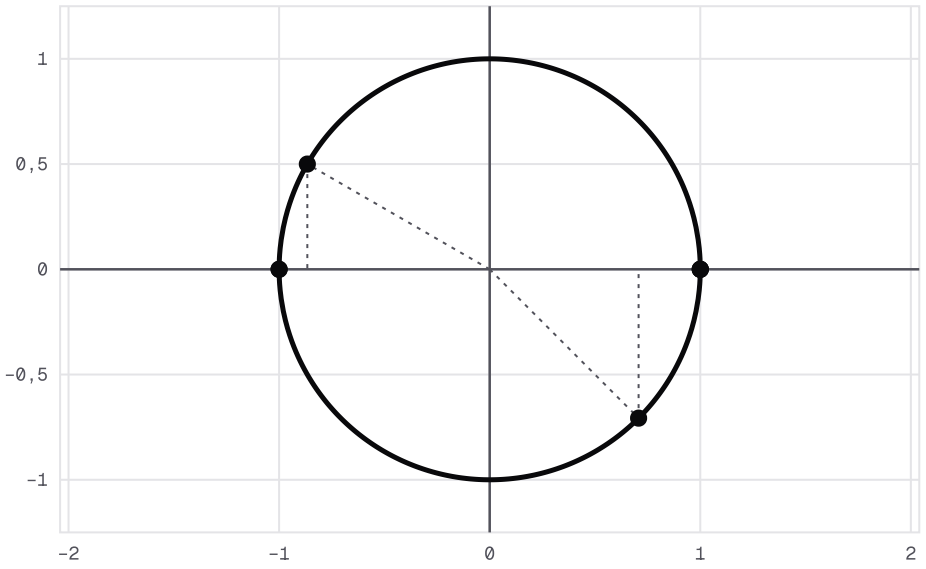
$\frac{3\pi}{2}$ vaut les trois quarts de 2π : trois quarts de tour dans le sens direct, de I jusqu'en bas, au point $(0, -1)$.

Définition : Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct, contraire à celui des aiguilles d'une montre. On note I le point de coordonnées $(1, 0)$.

- À tout réel x correspond un unique point M de $\mathcal{C}$, obtenu en enroulant la droite des réels sur $\mathcal{C}$, le réel 0 venant en I. On dit que x est une **abscisse curviligne** du point M.
- Réciproquement, tout point M de $\mathcal{C}$ est obtenu de cette façon : il possède au moins une abscisse curviligne.
- Si x est une abscisse curviligne de M, les abscisses curvilignes de M sont exactement les réels $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Une seule d'entre elles appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$: c'est l'**abscisse curviligne principale** de M.

Repérer des points sur le cercle



Le cercle trigonométrique et deux de ses points. Lis le signe de l'abscisse et de l'ordonnée de M et de N.

Méthode : trouver une abscisse curviligne principale

1. **Écris** le réel sous la forme $\frac{p\pi}{q}$, avec $q > 0$.
2. **Cherche** l'entier k tel que $\theta = \frac{p\pi}{q} - 2k\pi$ vérifie $-\pi < \theta \leq \pi$: on encadre k.
3. **Vérifie** que le résultat θ vérifie $-\pi < \theta \leq \pi$.
4. **Conclus** : θ est l'abscisse curviligne principale ; les autres sont les réels $\theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Retirer des tours complets

Exemple : deux abscisses curvilignes principales

Le réel $\frac{29\pi}{6}$. On retire deux tours complets :

$$\begin{aligned}\frac{29\pi}{6} &= \frac{5\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} \\ &= \frac{5\pi}{6} + 2 \times 2\pi.\end{aligned}$$

Or $-\pi < \frac{5\pi}{6} \leq \pi$. L'abscisse curviligne principale est donc $\frac{5\pi}{6}$: c'est le point M de la figure.

Contrôle par l'encadrement. L'inégalité $-\pi < \frac{29\pi}{6} - 2k\pi \leq \pi$ équivaut à :

$$\frac{23}{12} \leq k < \frac{35}{12}.$$

Le seul entier de cet intervalle est $k = 2$.

Le réel $-\dfrac{17\pi}{4}$. On ajoute deux tours complets :

$$\begin{aligned} -\frac{17\pi}{4} &= -\frac{\pi}{4} - \frac{16\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{4} - 2\times 2\pi. \end{aligned}$$

Or $-\pi < -\dfrac{\pi}{4} \leq \pi$. L'abscisse curviligne principale est $-\dfrac{\pi}{4}$: c'est le point N.

Vérifie : Le même point ?

Les réels $\dfrac{7\pi}{3}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$ sont-ils des abscisses curvilignes du même point du cercle ?

A. Non : l'un est positif, l'autre est négatif.

Faux.

Un même point a des abscisses curvilignes positives et négatives.

B. Oui : leur différence vaut 4π.

Juste.

Juste : $4\pi = 2\times 2\pi$, soit deux tours complets.

C. Non : leur différence n'est pas 2π.

Faux.

Il suffit d'un multiple de 2π : 4π convient.

D. Non : ils donnent deux points symétriques.

Faux.

Des points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ont des abscisses curvilignes opposées, à $2k\pi$ près ; ce n'est pas le cas ici.

Correction

On calcule la différence des deux réels :

$$\begin{aligned} \frac{7\pi}{3} - \left(-\frac{5\pi}{3}\right) &= \frac{12\pi}{3} \\ &= 4\pi = 2\times 2\pi. \end{aligned}$$

Cette différence vaut deux tours. Par définition du cercle trigonométrique, les deux réels sont des abscisses curvilignes du même point.

Ce point a pour abscisse curviligne principale $\dfrac{7\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{\pi}{3}$.

À toi : Deux réels à ramener

Détermine l'abscisse curviligne principale du point associé à $\dfrac{35\pi}{4}$, puis celle du point associé à $-\dfrac{23\pi}{6}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : pour chaque réel, encadre l'entier k de tours complets à retirer.

Indice 2

Écris 2π avec le même dénominateur : $2\pi = \dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{12\pi}{6}$.

Indice 3

Point délicat : le résultat doit vérifier $-\pi < \theta \leq \pi$; contrôle l'encadrement à la fin.

Réponse

Le réel $\dfrac{35\pi}{4}$. L'encadrement $-\pi < \dfrac{35\pi}{4} - 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $\dfrac{31}{8} \leq k < \dfrac{39}{8}$, donc $k = 4$. On retire quatre tours :

$$\begin{aligned} \frac{35\pi}{4} &= \frac{3\pi}{4} + \frac{32\pi}{4} \\ &= \frac{3\pi}{4} + 4 \times 2\pi. \end{aligned}$$

L'abscisse curviligne principale est $\dfrac{3\pi}{4}$.

Le réel $-\dfrac{23\pi}{6}$. L'encadrement $-\pi < -\dfrac{23\pi}{6} - 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{29}{12} \leq k < -\dfrac{17}{12}$, donc $k = -2$. On ajoute deux tours :

$$\begin{aligned} -\frac{23\pi}{6} &= \frac{\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6} - 2 \times 2\pi. \end{aligned}$$

L'abscisse curviligne principale est $\dfrac{\pi}{6}$.

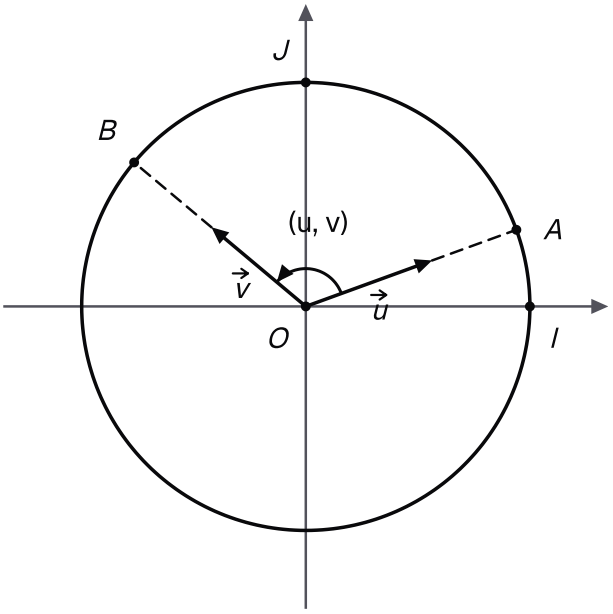
Conclusion. Les abscisses curvilignes principales cherchées sont $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

Angles orientés de deux vecteurs

Tourner d'un vecteur à l'autre

En clair. Pour aller de la direction de $\vec{u}$ à celle de $\vec{v}$, tu tournes : dans le sens direct, ou dans l'autre sens.

Tu peux aussi faire des tours complets en plus. Un angle orienté a donc plusieurs mesures. On les lit sur le cercle trigonométrique, par des abscisses curvilignes.



Les vecteurs u et v, repérés par les points A et B du cercle : l'angle orienté (u, v) se lit en tournant de A vers B.

Devine : Une rotation lue sur le cercle

Le vecteur $\vec{u}$ est associé au point du cercle d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{6}$. Le vecteur $\vec{v}$ est associé au point d'abscisse curviligne $\frac{2\pi}{3}$. De combien tourne-t-on pour aller de $\vec{u}$ à $\vec{v}$?

A. De $\frac{5\pi}{6}$.

Faux.

On n'additionne pas les deux abscisses : on part de l'une pour arriver à l'autre.

B. De $\frac{2\pi}{3}$.

Faux.

C'est l'abscisse d'arrivée seulement ; il faut retrancher celle du départ.

C. De $-\frac{\pi}{2}$.

Faux.

Tu as calculé le chemin de $\vec{v}$ vers $\vec{u}$: l'ordre compte.

D. De $\frac{\pi}{2}$.

Juste.

Juste : $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, un quart de tour direct.

Correction

On part du point d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{6}$ et on arrive au point d'abscisse curviligne $\frac{2\pi}{3}$. On tourne donc de :

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}&=\frac{4\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

C'est un quart de tour dans le sens direct. Ce réel est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

Définition : Angle orienté de deux vecteurs et ses mesures

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On note A et B les points du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{OA}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{u}$, et $\overrightarrow{OB}$ la même direction et le même sens que $\vec{v}$. Si a et b sont des abscisses curvilignes de A et de B, le réel $b-a$ est une **mesure** de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

- Les mesures de $(\vec{u},\vec{v})$ sont les réels $b-a+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$; on écrit $(\vec{u},\vec{v})\equiv b-a\ [2\pi]$.
- Une seule mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ appartient à $]-\pi,\pi]$: c'est la **mesure principale** de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

Exemple : mesures et mesure principale

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont associés aux points d'abscisses curvilignes $a=\dfrac{3\pi}{4}$ et $b=-\dfrac{5\pi}{6}$.

Par définition, une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ est $b-a$:

$$\begin{aligned}b-a&=-\frac{10\pi}{12}-\frac{9\pi}{12}\\&=-\frac{19\pi}{12}.\end{aligned}$$

Ce réel est inférieur à $-\pi$. On ajoute un tour : $-\dfrac{19\pi}{12}+2\pi=\dfrac{5\pi}{12}$.

Donc $(\vec{u},\vec{v})\equiv\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$, et la mesure principale est $\dfrac{5\pi}{12}$.

Enchaîner deux rotations

En clair. Tourner de α pour aller de $\vec{u}$ à $\vec{v}$, puis de β pour aller de $\vec{v}$ à $\vec{w}$, c'est tourner de $\alpha+\beta$ pour aller de $\vec{u}$ à $\vec{w}$: les rotations s'ajoutent.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont sur une même droite, il faut tourner de 0 ou d'un demi-tour.

Propriété : Relation de Chasles et conséquences

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.

- **Relation de Chasles** : $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})\equiv(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi]$.
- $(\vec{v},\vec{u})\equiv-(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$ et $(-\vec{u},\vec{v})\equiv(\vec{u},\vec{v})+\pi\ [2\pi]$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [\pi]$. En particulier, trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$.

Démonstration

Idée de la preuve. On associe à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes a, b et c. La relation de Chasles vient de l'égalité $(b-a)+(c-b)=c-a$, à $2k\pi$ près. De même, $a-b=-(b-a)$ donne la deuxième égalité. Le vecteur $-\vec{u}$ est associé au point diamétralement opposé, d'abscisse curviligne $a+\pi$, car un demi-tour mesure π (symétrie du cercle par rapport à O, admise comme au tronc commun) : on retranche π à la mesure, ce qui revient à ajouter π à 2π près. Enfin, $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$ exactement quand son point associé est celui de $\vec{u}$ ou le point diamétralement opposé, c'est-à-dire quand $b-a \equiv 0\ [\pi]$. Ces vérifications ne sont pas détaillées ici.

Exemple : la relation de Chasles

On sait que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Enchaîner les deux angles. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\vec{u}, \vec{w}) &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \\ &\equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure principale : $\dfrac{7\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Échanger les vecteurs. De plus, $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Vecteur opposé. Enfin, $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, de mesure principale $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Exemple : trois points alignés

Soit A, B et C trois points distincts, et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On sait que $(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Une mesure de cet angle est un multiple de π : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$.

D'après la caractérisation de l'alignement, les points A, B et C sont alignés.

Vecteur opposé, puis à toi

Vérifie : Avec un vecteur opposé

On sait que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Quelle est la mesure principale de $(\vec{v}, -\vec{u})$?

A. $-\dfrac{2\pi}{3}$

Faux.

C'est la mesure de $(\vec{v}, \vec{u})$: le signe moins devant $\vec{u}$ ajoute π.

B. $\dfrac{2\pi}{3}$

Faux.

Quand on permute $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la mesure devient l'opposée.

C. $\dfrac{\pi}{3}$

Juste.

Juste : $-\dfrac{2\pi}{3} + \pi = \dfrac{\pi}{3}$.

D. $-\dfrac{5\pi}{6}$

Faux.

Ajouter π à $-\dfrac{2\pi}{3}$ donne $\dfrac{\pi}{3}$, pas $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Correction

D'après les conséquences de la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\vec{v}, -\vec{u}) &\equiv -(-\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi] \\ &\equiv -\left((\vec{u}, \vec{v}) + \pi\right)\ [2\pi].\end{aligned}$$

On remplace $(\vec{u}, \vec{v})$ par $\dfrac{2\pi}{3}$, puis on ajoute un tour :

$$\begin{aligned}(\vec{v}, -\vec{u}) &\equiv -\frac{2\pi}{3} - \pi\ [2\pi] \\ &\equiv -\frac{2\pi}{3} + \pi\ [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Or $-\pi < \dfrac{\pi}{3} \leq \pi$: la mesure principale est $\dfrac{\pi}{3}$.

À toi : Trois points alignés ?

Soit A, B, C et D quatre points distincts tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \dfrac{5\pi}{8}\ [2\pi]$. Les points A, B et D sont-ils alignés ? Donne la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la relation de Chasles pour obtenir une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Indice 2

Compare le résultat à un multiple de π.

Indice 3

Point délicat : une mesure principale est dans $]-\pi, \pi]$; vérifie la position de ton résultat par rapport à $-\pi$ et à π.

Réponse

Alignement. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\\ &\equiv \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8}\ [2\pi]\\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv 0\ [\pi]$: les points A, B et D sont alignés.

Mesure principale. On a $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\pi\ [2\pi]$. Or $-\pi + 2\pi = \pi$, et $-\pi < \pi \leq \pi$.

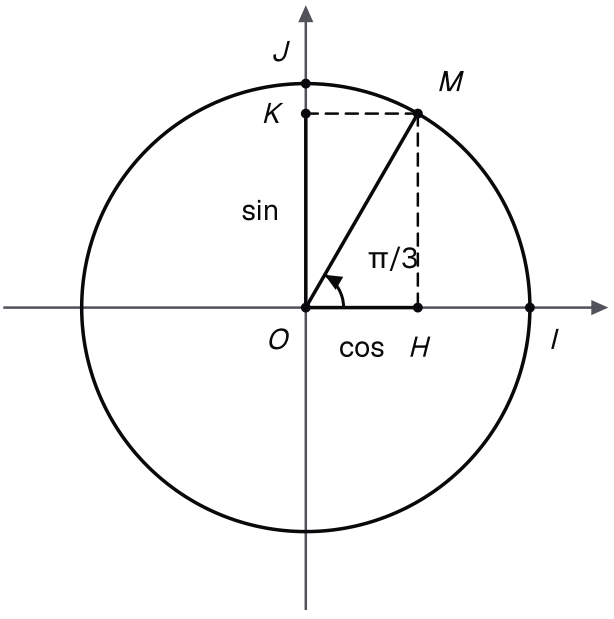
Conclusion. Les points A, B et D sont alignés, et la mesure principale de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est π.

Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Les coordonnées d'un point du cercle

Rappel du tronc commun. Au point d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$, la projection sur l'axe des abscisses tombe en $\frac{1}{2}$, et la projection sur l'axe des ordonnées en $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ces deux nombres sont le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{3}$. Leur signe dépend du quart de cercle où se trouve le point.



Au point d'abscisse curviligne π/3, le pied H donne le cosinus, le pied K donne le sinus.

Devine : Des signes lus sur le cercle

Soit P le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne $\frac{3\pi}{4}$. Quels sont les signes de ses deux coordonnées ?

A. Abscisse positive, ordonnée positive.

Faux.
$\frac{3\pi}{4}$ dépasse $\frac{\pi}{2}$: le point est passé à gauche de l'axe des ordonnées.

B. Abscisse négative, ordonnée positive.

Juste.
Juste : $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, le point est en haut à gauche.

C. Abscisse négative, ordonnée négative.

Faux.
$\frac{3\pi}{4}$ est inférieur à π : le point est encore au-dessus de l'axe des abscisses.

D. Abscisse positive, ordonnée négative.

Faux.
C'est le cas d'un point d'abscisse curviligne comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0.

Correction
On a $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$: le point P est sur le quart de cercle situé en haut à gauche.

Son abscisse est négative et son ordonnée positive : $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Définition : Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M ; le **sinus** de x, noté $\sin x$, est son ordonnée : $M(\cos x, \sin x)$.
- Si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos x \neq 0$, et la **tangente** de x est le réel $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Exemple : les valeurs remarquables

Ces valeurs viennent du tronc commun. Par définition de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Les relations fondamentales

En clair. Le point $M(\cos x, \sin x)$ est sur le cercle de rayon 1 : sa distance à O vaut 1, quel que soit x.

Pourquoi est-ce vrai ? Cette distance, écrite avec les coordonnées de M, donne une relation entre $\cos x$ et $\sin x$.

Propriété : Relations fondamentales

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; en particulier $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Si de plus $\cos x \neq 0$, alors $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Démonstration

Étape 1. Soit $M(\cos x, \sin x)$ le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. Le repère est orthonormé et $OM = 1$, donc $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Étape 2. Un carré est positif ou nul, donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \leq 1$, d'où $-1 \leq \cos x \leq 1$. On raisonne de même pour $\sin x$.

Étape 3. Les réels x et $x + 2k\pi$ sont deux abscisses curvilignes du même point M (définition du cercle trigonométrique) : ils ont donc le même cosinus et le même sinus.

Étape 4. Si $\cos x \neq 0$, on divise l'égalité de l'étape 1 par $\cos^2 x$: $1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, c'est-à-dire $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Vérifie : L'outil de la preuve

Quel outil du tronc commun donne l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dans la preuve ?

A. Le théorème de Thalès.
Faux.
Aucune droite parallèle n'intervient dans la preuve.

B. Le tableau des valeurs remarquables.

Faux.

Ce tableau ne donne que cinq valeurs de x ; l'égalité vaut pour tout réel.

C. Le produit scalaire de deux vecteurs.

Faux.

Il servira pour le cosinus d'une différence, pas ici.

D. La distance de deux points en repère orthonormé.

Juste.

Juste : $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$, et $OM = 1$.

Correction

Le repère est orthonormé. La distance de $O(0,0)$ à $M(\cos x, \sin x)$ vérifie donc $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

Comme M est sur le cercle de rayon 1, $OM = 1$, d'où l'égalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ est la distance $OM = 1$, écrite avec les coordonnées de M.

Les encadrements viennent de ce qu'un carré est positif ou nul. La période 2π vient de ce qu'un tour complet ramène au même point.

On divise enfin par $\cos^2 x$ pour faire apparaître la tangente.

Exemple : deux contrôles numériques

Une vérification. Avec $x = \dfrac{\pi}{3}$:

$$1 + \tan^2 \frac{\pi}{3} = 1 + 3 = 4,$$
$$\frac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Les deux membres sont égaux.

Un tour complet. D'après les relations fondamentales :

$$\cos \frac{13\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi\right)$$
$$= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Un contre-exemple. La relation sur la tangente exige $\cos x \neq 0$: pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$, et $\tan \dfrac{\pi}{2}$ n'existe pas.

Une ligne à partir d'une autre

Méthode : calculer une ligne à partir d'une autre

1. **Pars** de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ou de $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
2. **Calcule** le carré de la ligne cherchée.
3. **Choisis le signe** d'après la position du point sur le cercle.
4. **Déduis** la tangente par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, si $\cos x \neq 0$.

Exemple : le sinus et la tangente à partir du cosinus

On sait que $\cos x = -\dfrac{4}{5}$, avec $-\pi < x < -\dfrac{\pi}{2}$.

Le carré du sinus. D'après les relations fondamentales :

$$\sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Le signe. Le point associé à x est en bas à gauche du cercle : son ordonnée est négative. Donc $\sin x = -\dfrac{3}{5}$.

La tangente. Par définition de la tangente :

$$\tan x = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Attention : le carré ne donne pas le signe

✗ « $\sin x = \dfrac{5}{13}$ avec $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. Donc $\cos^2 x = \dfrac{144}{169}$, et $\cos x = \dfrac{12}{13}$. »

✓ La relation fondamentale donne seulement $\cos^2 x$. Ici, le point associé à x est à gauche de l'axe des ordonnées. Donc $\cos x = -\dfrac{12}{13}$.

Choisis toujours le signe d'après la position du point.

À toi : Partir de la tangente

On sait que $\tan x = 2$, avec $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Calcule $\cos x$, puis $\sin x$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise la relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Indice 2

Tu obtiens $\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$; puis $\sin x = \tan x \times \cos x$.

Indice 3

Point délicat : pour $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, le point est en bas à gauche ; ses deux coordonnées sont négatives.

Réponse

Le cosinus. D'après les relations fondamentales, $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + 4 = 5$, donc $\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$.

Le point associé à x est en bas à gauche du cercle : $\cos x < 0$. Donc $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Le sinus. Par définition de la tangente, $\sin x = \tan x \times \cos x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Contrôle. On a bien $\cos^2 x + \sin^2 x = \dfrac{5}{25} + \dfrac{20}{25} = 1$.

Conclusion. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

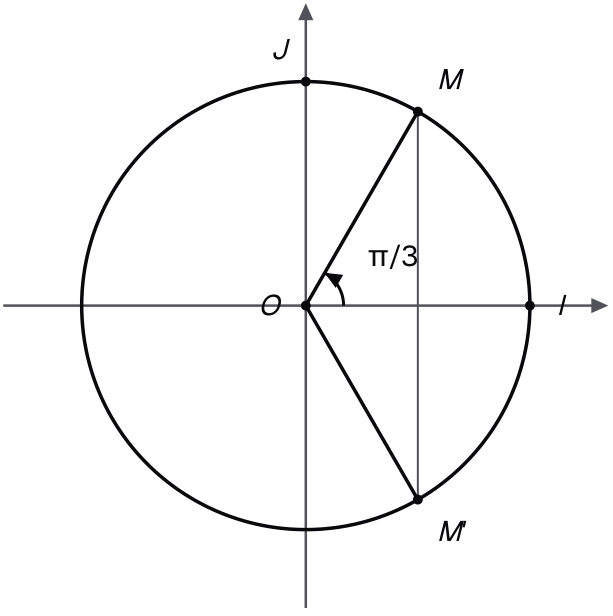
Angles associés

Les symétries du cercle

En clair. Place le point M d'abscisse curviligne $\dfrac{\pi}{3}$, puis le point d'abscisse curviligne $-\dfrac{\pi}{3}$. Ce second point est le reflet de M dans l'axe des abscisses : il a la même première coordonnée $\dfrac{1}{2}$, et une seconde coordonnée opposée.

Les symétries du cercle relient ainsi les lignes de réels comme x, $-x$, $\pi - x$ ou $\pi + x$.

Le quart de tour donne de même $\dfrac{\pi}{2} - x$ et $\dfrac{\pi}{2} + x$: cosinus et sinus s'échangent.



M d'abscisse curviligne π/3 et son reflet M' dans l'axe des abscisses, d'abscisse curviligne -π/3.

Devine : Quel reflet ?

Soit M le point du cercle d'abscisse curviligne x. Le point d'abscisse curviligne $\pi - x$ est le symétrique de M par rapport à quoi ?

A. Par rapport à l'axe des abscisses.

Faux.

Ce symétrique est le point d'abscisse curviligne $-x$.

B. Par rapport au point O.

Faux.

Ce symétrique est le point d'abscisse curviligne $\pi + x$.

C. Par rapport à l'axe des ordonnées.

Juste.

Juste : par exemple, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ ont le même sinus et des cosinus opposés.

D. Par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Faux.

Ce symétrique est le point d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{2} - x$.

Correction

Prenons $0 \leq x \leq \pi$, et notons M' le point d'abscisse curviligne $\pi - x$. Les arcs de I à M et de M' à $(-1, 0)$ ont la même longueur x.

Le point M' est donc le reflet de M dans l'axe des ordonnées. Il a la même ordonnée que M, et une abscisse opposée.

La propriété reste vraie pour tout réel x : c'est l'un des angles associés, énoncés ci-dessous.

Propriété : Angles associés

Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Lorsque les tangentes existent : $\tan(-x) = -\tan x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Démonstration

Idée de la preuve. Soit M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne x. Le point d'abscisse curviligne $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses ; celui de $\pi - x$, son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; celui de $\pi + x$, son symétrique par rapport à O ; celui de $\dfrac{\pi}{2} - x$, son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ces symétries du cercle sont admises ici. On lit ensuite les coordonnées : par exemple, le symétrique de $M(\cos x, \sin x)$ par rapport à l'axe des abscisses est le point $(\cos x, -\sin x)$. La dernière ligne vient de l'égalité $\dfrac{\pi}{2} + x = \dfrac{\pi}{2} - (-x)$, et les formules sur la tangente s'obtiennent par quotient. Ces calculs ne sont pas détaillés ici.

Exemple : trois valeurs exactes

D'après les angles associés, voici trois valeurs exactes.

Le réel $\dfrac{5\pi}{6}$. On a $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$, donc :

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

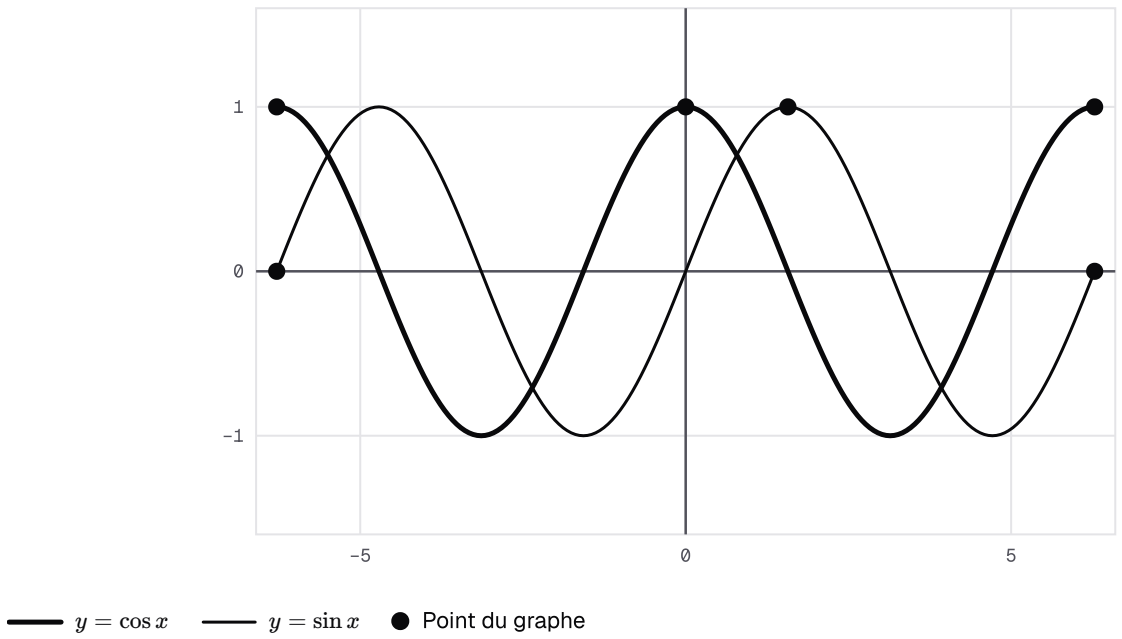
Le réel $-\dfrac{2\pi}{3}$. Le cosinus est pair, et $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\frac{2\pi}{3}\\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Le sinus est impair : $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le réel $\dfrac{7\pi}{4}$. On a $\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, donc $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Les courbes du cosinus et du sinus



Les courbes du cosinus et du sinus sur un intervalle de longueur 4π. Repère où chaque courbe s'annule et où les deux se coupent.

Méthode : simplifier avec les angles associés

1. **Écris** chaque réel sous la forme $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$ ou $\frac{\pi}{2} + x$, à un multiple de 2π près.
2. **Supprime** les multiples de 2π, grâce aux relations fondamentales.
3. **Applique** la formule de l'angle associé, en surveillant le signe.
4. **Regroupe** les termes semblables.

Exemple : simplifier une somme

Soit x un réel. Simplifions :

$$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + 6\pi).$$

Angles associés. D'après les angles associés, $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.

Tours complets. D'après les relations fondamentales, $\cos(x + 6\pi) = \cos(x + 3 \times 2\pi) = \cos x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $A = \sin x - \sin x + \cos x = \cos x$.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Deux sinus associés

Pour tout réel x, à quoi est égal $\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x)$?

A. À 0.

Faux.

$\sin(\pi + x) = -\sin x$: le second terme change de signe.

B. À $-2\sin x$.

Faux.

$\sin(\pi - x) = \sin x$, et non $-\sin x$.

C. À $2\cos x$.

Faux.

Ces deux angles associés ne font pas apparaître de cosinus.

D. À $2\sin x$.

Juste.

Juste : $\sin x - (-\sin x) = 2\sin x$.

Correction

D'après les angles associés, $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x)\\ &= \sin x + \sin x = 2\sin x.\end{aligned}$$

À toi : Des valeurs et une simplification

Calcule $\cos\dfrac{4\pi}{3}$, $\sin\dfrac{4\pi}{3}$ et $\tan\dfrac{4\pi}{3}$. Simplifie ensuite, pour tout réel x, $C = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) - 2\cos(-x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$.

Indice 2

Remplace chaque terme de C par $\cos x$ ou $-\cos x$, d'après les angles associés.

Indice 3

Point délicat : $-\cos(\pi - x) = -(-\cos x) = \cos x$; deux signes moins se compensent.

Réponse

Les valeurs. D'après les angles associés, avec $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}\cos\frac{4\pi}{3} &= -\cos\frac{\pi}{3}\\ &= -\frac{1}{2},\\ \sin\frac{4\pi}{3} &= -\sin\frac{\pi}{3}\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \tan\frac{4\pi}{3} &= \tan\frac{\pi}{3}\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

La simplification. Soit x un réel. D'après les angles associés, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$ et $\cos(-x)=\cos x$. Donc :

$$\begin{aligned}C &= \cos x+\cos x\\ &\quad -2\cos x\\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}$, et $C=0$ pour tout réel x.

Formules d'addition

Le cosinus d'une somme

En clair. Tourner de a, puis de b, c'est tourner de $a+b$. Le point d'abscisse curviligne $a+b$ a pour première coordonnée $\cos(a+b)$. Cette coordonnée est-elle $\cos a+\cos b$? Un calcul avec des valeurs remarquables va répondre.

Pourquoi est-ce vrai ? La vraie formule vient du produit scalaire de deux vecteurs du cercle, calculé de deux façons.

Rappel du tronc commun. Pour $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+y_Ay_B$. On a aussi $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}$.

Devine : Une somme de cosinus ?

Que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$?

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Faux.

C'est $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}$; ce nombre dépasse 1, il ne peut pas être un cosinus.

B. 0

Juste.

Juste : $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, et $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Faux.
C'est le produit $\cos\dfrac{\pi}{3}\times\cos\dfrac{\pi}{6}$; ce n'est pas la formule.

D. 1

Faux.
$\cos x = 1$ seulement pour $x = 2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction
On a $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

Or $\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\neq 0$.

Le cosinus d'une somme n'est donc pas la somme des cosinus.

La formule et sa preuve

Propriété : Cosinus d'une différence et d'une somme

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \quad\text{et}\quad \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

Démonstration

Étape 1. Soit A et B les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes a et b : $\overrightarrow{OA}(\cos a,\sin a)$ et $\overrightarrow{OB}(\cos b,\sin b)$. Le repère est orthonormé, donc l'expression analytique du produit scalaire donne $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

Étape 2. Comme $OA=OB=1$, le produit scalaire vaut aussi $\cos\widehat{AOB}$ (tronc commun). On admet, comme au tronc commun, que l'angle $\widehat{AOB}$ mesure $|\theta|$, où θ est la mesure principale de $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$. Par définition d'une mesure, $a-b=\theta+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Le cosinus étant pair et de période 2π : $\cos\widehat{AOB}=\cos\theta=\cos(a-b)$.

Étape 3. On égale les deux expressions : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

Étape 4. On remplace b par $-b$ et on utilise les angles associés : $\cos(a+b)=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans la preuve du cosinus d'une différence, quel outil du tronc commun fournit les deux expressions que l'on égale ?

A. Les angles associés.

Faux.
Ils servent ensuite, pour passer de la différence à la somme.

B. La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Faux.

Elle n'intervient pas dans cette preuve.

C. Le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Juste.

Juste : avec les coordonnées, puis avec l'angle.

D. La relation de Chasles.

Faux.

Elle relie des mesures d'angles, pas des cosinus.

Correction

Avec les coordonnées, le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ s'écrit $\cos a \cos b + \sin a \sin b$.

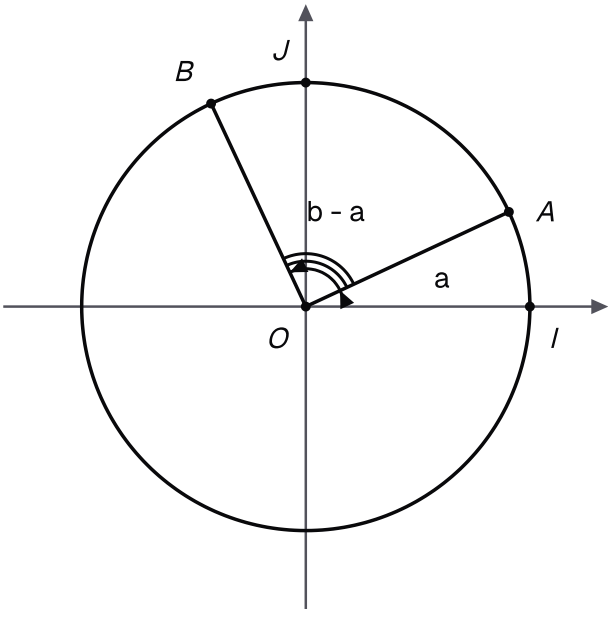
Avec l'angle, il s'écrit $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \cos(a - b)$.

L'égalité de ces deux expressions est le cosinus d'une différence.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On calcule **deux fois** le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$: avec les coordonnées, on obtient $\cos a \cos b + \sin a \sin b$; avec l'angle, on obtient $\cos(a - b)$.

On égale ces deux expressions. La formule de la somme s'en déduit en remplaçant b par $-b$.



A et B sur le cercle, d'abscisses curvilignes a et b : l'angle de OA vers OB mesure b - a.

Exemple : une valeur exacte de cosinus

On écrit $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. D'après le cosinus d'une différence :

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} \\ &\quad + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Contrôle. Ce nombre vaut environ $0{,}966$. Il est compris entre 0 et 1, comme le cosinus d'un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le sinus d'une somme

Attention : une formule d'addition n'est pas une somme

✗ Calcul faux :

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{3} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = 1.\end{aligned}$$

✓ En réalité, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Le cosinus d'une somme se calcule par la formule d'addition.

De même, $\sin 2a$ n'est pas $2\sin a$ en général.

Propriété : Sinus d'une somme et d'une différence

Pour tous réels a et b :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b.$$

Démonstration

Idée de la preuve. D'après les angles associés, $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right) - b\right)$. On développe avec le cosinus d'une différence, puis on remplace $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ par $\sin a$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ par $\cos a$. La seconde formule s'obtient en remplaçant b par $-b$. Ces deux calculs ne sont pas détaillés ici.

Exemple : une valeur exacte de sinus

On écrit $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$. D'après le sinus d'une somme :

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{12} &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} \\ &\quad + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

On retrouve la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$. C'est normal : $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}$, et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$ d'après les angles associés.

La tangente, puis à toi

Méthode : calculer une valeur exacte par une formule

1. **Décompose** le réel en somme ou en différence de deux réels remarquables, ou en moitié d'un réel remarquable.
2. **Choisis** la formule : addition, duplication ou linéarisation.
3. **Remplace** par les valeurs remarquables, puis simplifie les radicaux.
4. **Contrôle** le signe et l'ordre de grandeur : un cosinus ou un sinus est compris entre -1 et 1.

Propriété : Tangente d'une somme et d'une différence

Soit a et b deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ existent. Alors $\tan a \tan b \neq 1$ et

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

De même, si $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a-b)$ existent, alors $\tan a \tan b \neq -1$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Démonstration

Idée de la preuve. On écrit $\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ et on développe le numérateur et le dénominateur avec les formules d'addition. Comme $\cos a \neq 0$ et $\cos b \neq 0$, on les divise tous deux par $\cos a \cos b$. Le dénominateur devient $1 - \tan a \tan b$; il n'est pas nul, car $\cos(a+b) = \cos a \cos b\,(1 - \tan a \tan b)$ ne l'est pas. La formule de la différence s'en déduit en remplaçant b par $-b$; ce calcul n'est pas détaillé ici.

Exemple : une valeur exacte de tangente

On écrit $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$. Les tangentes de $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{12}$ existent.

D'après la tangente d'une somme, avec $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ et $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{aligned}\tan\frac{5\pi}{12}&=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}\\&=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\\&=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}\\&=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}\\&=2+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

À la troisième ligne, on a multiplié le numérateur et le dénominateur par $3+\sqrt{3}$.

À toi : Un cosinus et un sinus

Calcule $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ à l'aide des formules d'addition. Vérifie ensuite que $\cos^2\dfrac{5\pi}{12}+\sin^2\dfrac{5\pi}{12}=1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$.

Indice 2

Développe les deux carrés : les termes en $\sqrt{12}$ se compensent.

Indice 3

Point délicat : dans le cosinus d'une somme, le signe entre les deux produits est un **moins**.

Réponse

On écrit $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$.

Le cosinus. D'après le cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\quad-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Le sinus. D'après le sinus d'une somme :

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\quad+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Les carrés. On développe :

$$\cos^2\frac{5\pi}{12} = \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16},$$
$$\sin^2\frac{5\pi}{12} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}.$$

Conclusion. La somme des carrés vaut bien 1 :

$$\frac{8-4\sqrt{3}}{16} + \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = 1.$$

Duplication et linéarisation

Doubler un angle

En clair. Un ressort oscille selon $\sin t$. Une autre grandeur oscille deux fois plus vite, selon $\sin 2t$. Est-ce le double de $\sin t$?

Non : $2\sin t$ a une amplitude double, alors que $\sin 2t$ garde la même amplitude et fait deux oscillations quand $\sin t$ en fait une.

Pourquoi est-ce vrai ? Doubler un réel, c'est l'ajouter à lui-même : $2a = a + a$. Les formules d'addition vont donc s'appliquer.

Devine : Le double d'un sinus ?

Le réel $\sin\frac{2\pi}{3}$ est-il égal à $2\sin\frac{\pi}{3}$?

A. Oui, il vaut $\sqrt{3}$.

Faux.
$\sqrt{3}$ dépasse 1 : ce ne peut pas être un sinus.

B. Non, il vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Faux.
Le point d'abscisse curviligne $\frac{2\pi}{3}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

C. Non, il vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Juste.
Juste : $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$.

D. Non, il vaut $\frac{1}{2}$.

Faux.
$\frac{1}{2}$ est le sinus de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{5\pi}{6}$.

Correction

D'après les angles associés :

$$\begin{aligned}\sin\frac{2\pi}{3} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Or $2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Les deux nombres sont différents.

Les formules de duplication

Propriété : Formules de duplication

Pour tout réel a :

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$;
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

Si de plus $\tan a$ et $\tan 2a$ existent, alors $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Démonstration

Étape 1. On prend $b = a$ dans le sinus d'une somme : $\sin 2a = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin a\cos a$.

Étape 2. On prend $b = a$ dans le cosinus d'une somme : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

Étape 3. D'après la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on remplace $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$, ce qui donne $2\cos^2 a - 1$; ou bien $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, ce qui donne $1 - 2\sin^2 a$.

Étape 4. On prend $b = a$ dans la tangente d'une somme : $\tan 2a = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a\tan a} = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Vérifie : Passer d'une forme à l'autre

Dans la preuve, quelle égalité transforme $\cos^2 a - \sin^2 a$ en $2\cos^2 a - 1$?

A. L'égalité $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$.

Faux.

Elle n'existe que si $\cos a \neq 0$, et elle ne sert pas ici.

B. L'égalité $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$.

Juste.

Juste : elle vient de $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

C. L'égalité $\sin(-a) = -\sin a$.

Faux.

Les angles associés ne changent pas un carré en un autre.

D. Le cosinus d'une différence avec $b = a$.

Faux.
Il donne $\cos 0 = 1$, et non $\cos 2a$.

Correction
On remplace $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$:

$$\begin{aligned}&\cos^2 a - \sin^2 a\\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)\\ &= 2\cos^2 a - 1.\end{aligned}$$

Ce remplacement vient de la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On prend $b = a$ dans les formules d'addition : c'est tout le calcul. On obtient $\sin 2a$ et une première forme de $\cos 2a$.

La relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donne ensuite les deux autres formes.

Choisis la forme qui ne contient qu'une seule ligne : $\cos a$, ou bien $\sin a$.

Exemple : doubler un réel déjà rencontré

Reprends l'exemple des relations fondamentales : $\cos x = -\dfrac{4}{5}$, $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ et $\tan x = \dfrac{3}{4}$. D'après les formules de duplication :

Le sinus.

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x \cos x\\ &= 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right)\\ &= \frac{24}{25}.\end{aligned}$$

Le cosinus.

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}.\end{aligned}$$

La tangente.

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\\ &= \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}.\end{aligned}$$

C'est bien $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$.

Lue à l'envers, la formule $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donne $\cos^2 a$: c'est la linéarisation.

Linéariser, puis à toi

Propriété : Formules de linéarisation

Pour tout réel a :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Démonstration

Idée de la preuve. On isole $\cos^2 a$ dans l'égalité $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, et $\sin^2 a$ dans l'égalité $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$: ce sont deux des formules de duplication. Ces deux calculs, d'une ligne chacun, ne sont pas détaillés ici.

Exemple : une valeur exacte par linéarisation

D'après les formules de linéarisation, avec $a = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$: le point associé est en haut à droite, et $\cos\frac{\pi}{8} > 0$.

Donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, soit environ $0{,}924$.

À toi : Le sinus du même réel

Calcule la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$. Vérifie ensuite que $\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise la formule de linéarisation du carré du sinus, avec $a = \frac{\pi}{8}$.

Indice 2

Utilise $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ de l'exemple.

Indice 3

Point délicat : choisis le signe de $\sin\frac{\pi}{8}$ d'après la position du point sur le cercle.

Réponse

Le carré. D'après les formules de linéarisation :

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Le signe. Le point associé est en haut à droite, donc $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$, et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

La vérification. Avec la valeur de $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$ trouvée dans l'exemple :

$$\begin{aligned}&\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Produits et sommes

Un produit devient une somme

En clair. Écris côte à côte les formules de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$: elles ont les mêmes termes, avec un seul signe qui change.

En les ajoutant ou en les retranchant, on fait disparaître un terme. On obtient ainsi un produit écrit comme une somme, et l'inverse.

Devine : Ce qui disparaît

On ajoute membre à membre les égalités donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. Quels termes disparaissent ?

A. Les termes en $\sin a \sin b$.

Juste.
Juste : il reste $2\cos a \cos b$.

B. Aucun terme ne disparaît.

Faux.
Les termes en $\sin a \sin b$ ont des signes contraires.

C. Les termes en $\cos a \cos b$.

Faux.
Ils ont le même signe dans les deux formules : ils s'ajoutent.

D. Tous les termes disparaissent.

Faux.
La somme vaut $2\cos a \cos b$, qui n'est pas nul en général.

Correction
On a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

On a aussi $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

En ajoutant, les termes en $\sin a \sin b$ s'éliminent :

$$\begin{aligned}&\cos(a+b)+\cos(a-b)\\&=2\cos a\cos b.\end{aligned}$$

Propriété : Transformation d'un produit en somme

Pour tous réels a et b :

- $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\big]$;
- $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big]$;
- $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\big]$.

Démonstration

Idée de la preuve. On additionne ou on soustrait membre à membre les formules d'addition. Par exemple, $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$, car les termes en $\sin a\sin b$ s'éliminent. Les deux autres lignes s'obtiennent de la même façon, en soustrayant les cosinus, puis en additionnant les sinus ; elles ne sont pas détaillées ici.

Exemple : un produit de lignes

Calculons $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$. On pose $a=\dfrac{5\pi}{12}$ et $b=\dfrac{\pi}{12}$: alors $a+b=\dfrac{\pi}{2}$ et $a-b=\dfrac{\pi}{3}$.

D'après la transformation d'un produit en somme :

$$\begin{aligned}&\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\\&=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Lue dans l'autre sens, la même idée transforme une somme en produit.

Une somme devient un produit

Propriété : Transformation d'une somme en produit

Pour tous réels p et q :

- $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$;
- $\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$;

- $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$;
- $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

Démonstration

Idée de la preuve. On pose $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$, de sorte que $a+b=p$ et $a-b=q$. On applique la transformation d'un produit en somme à $\cos a\cos b$, à $\sin a\sin b$ et à $\sin a\cos b$; la dernière ligne s'obtient de la même façon avec $\cos a\sin b$, en échangeant les rôles de a et de b. Ces calculs ne sont pas détaillés ici.

Exemple : factoriser deux sommes

Soit x un réel. D'après la transformation d'une somme en produit :

Avec $p = 5x$ et $q = 3x$.

$$\begin{aligned}&\cos 5x + \cos 3x\\ &= 2\cos\frac{8x}{2}\cos\frac{2x}{2}\\ &= 2\cos 4x\cos x.\end{aligned}$$

Avec $p = 3x$ et $q = x$.

$$\begin{aligned}&\sin 3x - \sin x\\ &= 2\cos\frac{4x}{2}\sin\frac{2x}{2}\\ &= 2\cos 2x\sin x.\end{aligned}$$

Un produit est utile pour résoudre une équation : il est nul si l'un de ses facteurs est nul.

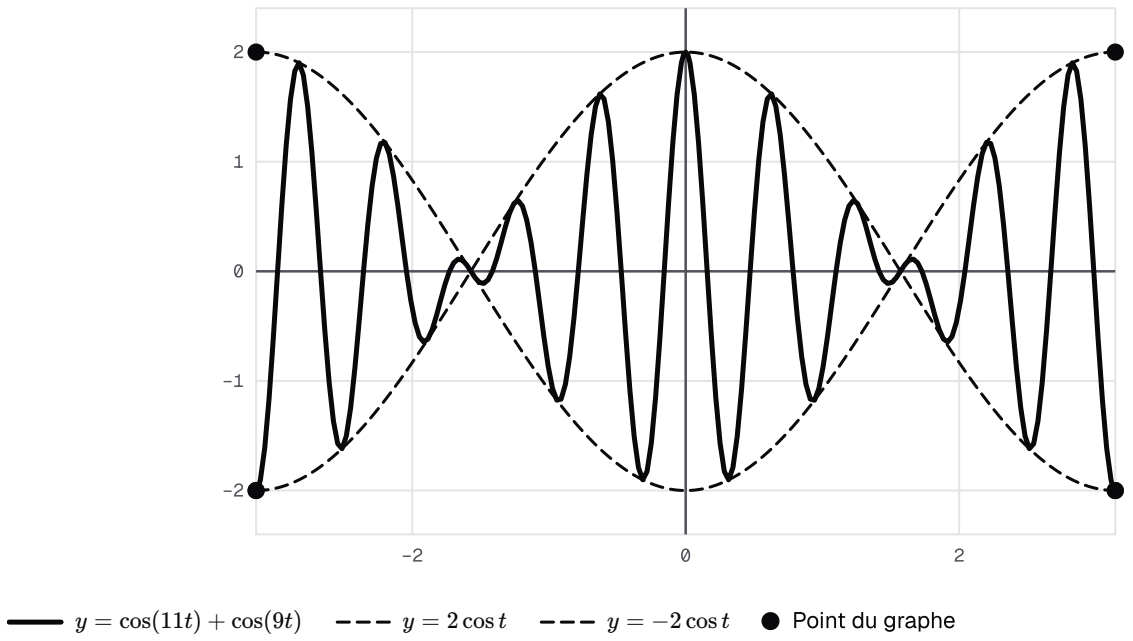
Exemple : deux signaux de fréquences voisines

Deux haut-parleurs émettent des signaux $\cos(11t)$ et $\cos(9t)$. D'après la transformation d'une somme en produit :

$$\begin{aligned}&\cos(11t) + \cos(9t)\\ &= 2\cos(10t)\cos t.\end{aligned}$$

Le facteur $\cos(10t)$ oscille vite. Le facteur $2\cos t$ varie lentement entre -2 et 2.

On entend donc un son dont l'intensité monte et descend : ce sont des **battements**.



La somme cos(11t) + cos(9t) oscille vite, à l'intérieur des deux courbes lentes 2 cos t et -2 cos t.

Vérifier, puis à toi

Vérifie : Une différence de cosinus

Pour tout réel x, à quoi est égal $\cos x - \cos 3x$?

A. À $-2\sin 2x \sin x$.

Faux.

Avec $p = x$ et $q = 3x$, on obtient $\sin(-x) = -\sin x$: un second signe moins apparaît.

B. À $2\cos 2x \cos x$.

Faux.

C'est la factorisation d'une somme de cosinus, pas d'une différence.

C. À $2\sin 2x \sin x$.

Juste.

Juste : $-2\sin 2x \sin(-x) = 2\sin 2x \sin x$.

D. À $-2\cos 2x \sin x$.

Faux.

Une différence de cosinus donne un produit de deux sinus.

Correction

D'après la transformation d'une somme en produit, avec $p = x$ et $q = 3x$:

$$\begin{aligned} &\cos x - \cos 3x \\ &= -2\sin\frac{4x}{2}\sin\frac{-2x}{2} \\ &= -2\sin 2x \sin(-x). \end{aligned}$$

D'après les angles associés, $\sin(-x) = -\sin x$. Donc, pour tout réel x, $\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x$.

À toi : Factoriser, puis calculer

Factorise $\sin 5x + \sin x$ pour tout réel x. Calcule ensuite la valeur exacte de $\cos \dfrac{7\pi}{12} + \cos \dfrac{\pi}{12}$. Calcule enfin la valeur exacte de $\cos \dfrac{5\pi}{12} \cos \dfrac{\pi}{12}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise la transformation d'une somme en produit, avec $p = 5x$ et $q = x$.

Indice 2

Pour la somme, calcule $\dfrac{p+q}{2}$ et $\dfrac{p-q}{2}$ avec $p = \dfrac{7\pi}{12}$ et $q = \dfrac{\pi}{12}$. Pour le produit, transforme-le en somme avec $a = \dfrac{5\pi}{12}$ et $b = \dfrac{\pi}{12}$.

Indice 3

Point délicat : divise bien par 2 ; $\dfrac{8\pi}{12} \div 2 = \dfrac{\pi}{3}$.

Réponse

La factorisation. Soit x un réel. D'après la transformation d'une somme en produit, avec $p = 5x$ et $q = x$:

$$\begin{aligned} &\sin 5x + \sin x \\ &= 2\sin 3x \cos 2x. \end{aligned}$$

La somme. Avec $p = \dfrac{7\pi}{12}$ et $q = \dfrac{\pi}{12}$, on a $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{p-q}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. La même transformation donne :

$$\begin{aligned} &\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \\ &= 2\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Le produit. D'après la transformation d'un produit en somme :

$$\begin{aligned} &\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3}\right] \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Transformer a cos x + b sin x

Superposer deux oscillations

En clair. Revenons aux deux tensions du début. Leur somme oscille avec la même période : c'est encore un cosinus, décalé dans le temps.

Pour le voir, on écrit les deux coefficients comme les coordonnées d'un point du cercle, à un facteur près.

Pourquoi est-ce vrai ? Le cosinus d'une différence fait alors le reste du travail.

Devine : Une valeur maximale

Quelle est la plus grande valeur prise par $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ quand x parcourt $\mathbb{R}$?

A. $\sqrt{3}+1$

Faux.

Il faudrait $\cos x = 1$ et $\sin x = 1$ pour le même x : impossible.

B. 2

Juste.

Juste : $2 = \sqrt{3+1}$, atteint pour $x = \dfrac{\pi}{6}$.

C. 1

Faux.

Pour $x = \dfrac{\pi}{6}$, l'expression vaut déjà $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$.

D. 4

Faux.

4 est la somme des carrés des coefficients ; prends sa racine.

Correction

Pour $x = \dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = 2$.

Tu vas voir que $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Comme un cosinus ne dépasse jamais 1, l'expression ne dépasse jamais 2.

Un seul cosinus

Propriété : Transformation de a cos x + b sin x

Soit a et b deux réels non tous les deux nuls, et $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, et, pour tout réel x :

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi).$$

Démonstration

Étape 1. Comme a et b ne sont pas tous les deux nuls, $r > 0$. Le point $P\left(\dfrac{a}{r}, \dfrac{b}{r}\right)$ vérifie $\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{r}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{r^2} = 1$: sa distance à O vaut 1, donc il appartient au cercle trigonométrique.

Étape 2. D'après la définition du cercle trigonométrique, le point P possède une abscisse curviligne φ. Par définition du cosinus et du sinus, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

Étape 3. Pour tout réel x, on factorise par r, puis on applique le cosinus d'une différence :

$$a\cos x + b\sin x = r\left(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x\right) = r\cos(x-\varphi).$$

Vérifie : Pourquoi diviser par r ?

Dans la preuve, pourquoi divise-t-on a et b par $r = \sqrt{a^2+b^2}$?

A. Pour obtenir un point du cercle trigonométrique.

Juste.

Juste : $\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{r}\right)^2 = 1$.

B. Pour faire disparaître les radicaux.

Faux.

La division peut au contraire faire apparaître des radicaux.

C. Pour obtenir un réel r strictement positif.

Faux.

$r > 0$ est vrai dès le départ ; la division sert à autre chose.

D. Pour que $\cos x$ soit égal à $\dfrac{a}{r}$.

Faux.

C'est $\cos\varphi$, et non $\cos x$, qui vaut $\dfrac{a}{r}$.

Correction

On a :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{r^2} = 1.$$

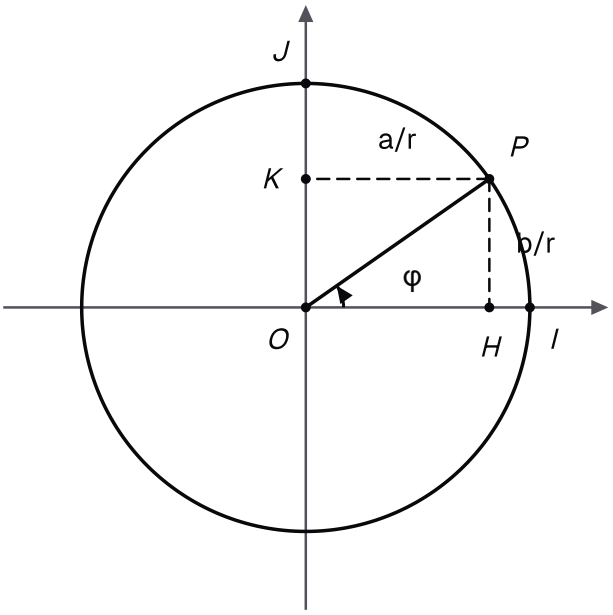
Le point $\left(\dfrac{a}{r}, \dfrac{b}{r}\right)$ est donc sur le cercle trigonométrique.

Ses coordonnées s'écrivent $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, ce qui permet d'appliquer le cosinus d'une différence.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On divise les coefficients par $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Le point $\left(\dfrac{a}{r}, \dfrac{b}{r}\right)$ est alors sur le cercle trigonométrique : il a une abscisse curviligne φ.

Les deux coefficients deviennent $r\cos\varphi$ et $r\sin\varphi$. Le cosinus d'une différence regroupe enfin les deux termes en $r\cos(x-\varphi)$.



Le point P de coordonnées a/r et b/r est sur le cercle trigonométrique ; φ est son abscisse curviligne.

Exemple : un premier cas

Pour $\sqrt{3}\cos x + \sin x$, on a $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, donc $r = \sqrt{3+1} = 2$.

On cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ convient.

D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, pour tout réel x :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

La méthode et la courbe

Méthode : transformer a cos x + b sin x

1. **Calcule** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. **Factorise** : $a\cos x + b\sin x = r\left(\dfrac{a}{r}\cos x + \dfrac{b}{r}\sin x\right)$.
3. **Cherche** φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, en tenant compte des deux signes.
4. **Conclus** : $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi)$, qui reste entre $-r$ et r.

Exemple : un coefficient négatif

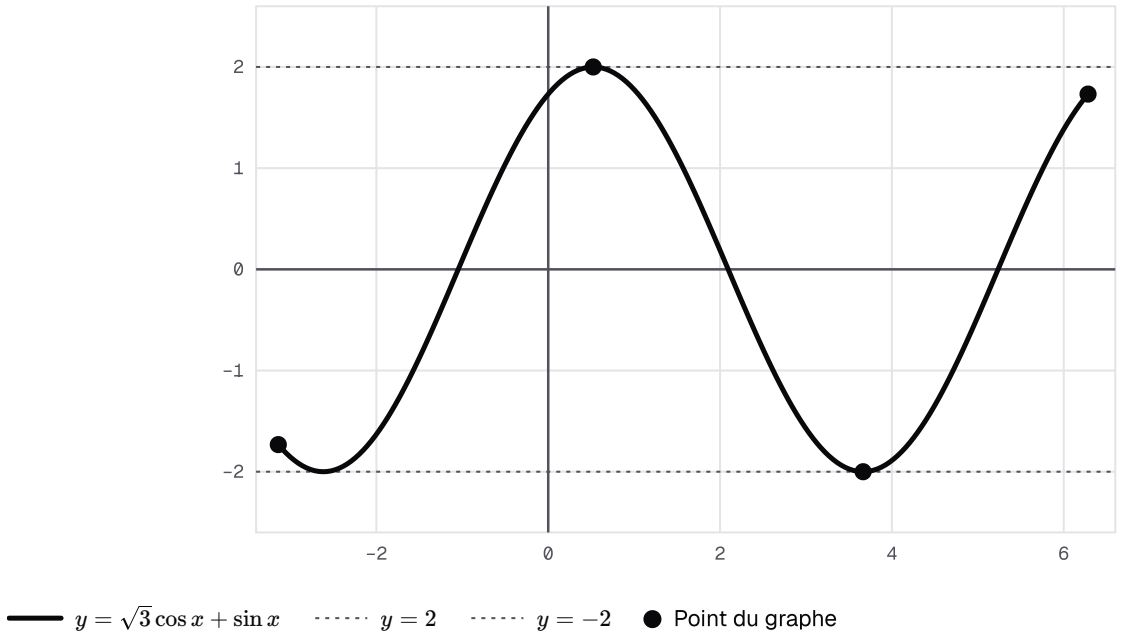
Pour $\cos x - \sin x$, on a $a = 1$ et $b = -1$, donc $r = \sqrt{2}$.

On cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Le point est en bas à droite du cercle : $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, pour tout réel x :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Cette expression reste donc entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.



La courbe de √3 cos x + sin x, entre -2 et 2. Repère où la courbe touche y = 2 et y = -2.

L'amplitude, puis à toi

Exemple : la réponse à la question du début

Pour $3\cos(\omega t) + 4\sin(\omega t)$, on a $r = \sqrt{9+16} = 5$.

Le point $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est sur le cercle, en haut à droite. Il a une abscisse curviligne φ telle que $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, sans valeur remarquable.

D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} &3\cos(\omega t) + 4\sin(\omega t) \\ &= 5\cos(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

L'amplitude est donc 5 volts. Elle est atteinte quand $\omega t = \varphi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

À toi : Une autre transformation

Écris $-\cos x + \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$. Donne sa plus grande valeur et les réels où elle est atteinte. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule r avec $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$.

Indice 2

Cherche φ tel que $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Indice 3

Point délicat : le cosinus de φ est négatif et son sinus positif ; le point est en haut à gauche.

Réponse

Le coefficient r. Ici $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$, donc $r = \sqrt{1+3} = 2$.

Le réel φ. On cherche φ tel que $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ convient.

La forme. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &-\cos x + \sqrt{3}\sin x \\ &= 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. La plus grande valeur est 2. Elle est atteinte quand $x - \dfrac{2\pi}{3} = 2k\pi$, c'est-à-dire pour $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une transformation**

En devoir, chaque étape est écrite et justifiée. Écris : « $r = \sqrt{3+1} = 2$. On a $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$. Donc, pour tout réel x : »

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\cos x + \sin x \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x \right. \\ &\qquad \left. + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) \\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Cite le cosinus d'une différence à la dernière égalité.

Équations fondamentales

Lire les solutions sur une courbe

En clair. Une tension vaut $\cos t$ volts à l'instant t. À quels instants vaut-elle $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ volt ?

Sur la courbe du cosinus, on cherche les points d'ordonnée $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Sur le cercle, on cherche les points d'abscisse $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Devine : Combien de solutions ?

Combien de réels x vérifient $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

A. Une infinité.

Juste.

Juste : chaque tour complet en ajoute deux.

B. Quatre exactement.

Faux.

Une fenêtre de tracé en montre quatre ; la courbe continue au-delà.

C. Deux : $\dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$.

Faux.

Ces deux réels conviennent, mais ils ne sont pas les seuls : le cosinus a pour période 2π.

D. Un seul : $\dfrac{\pi}{4}$.

Faux.

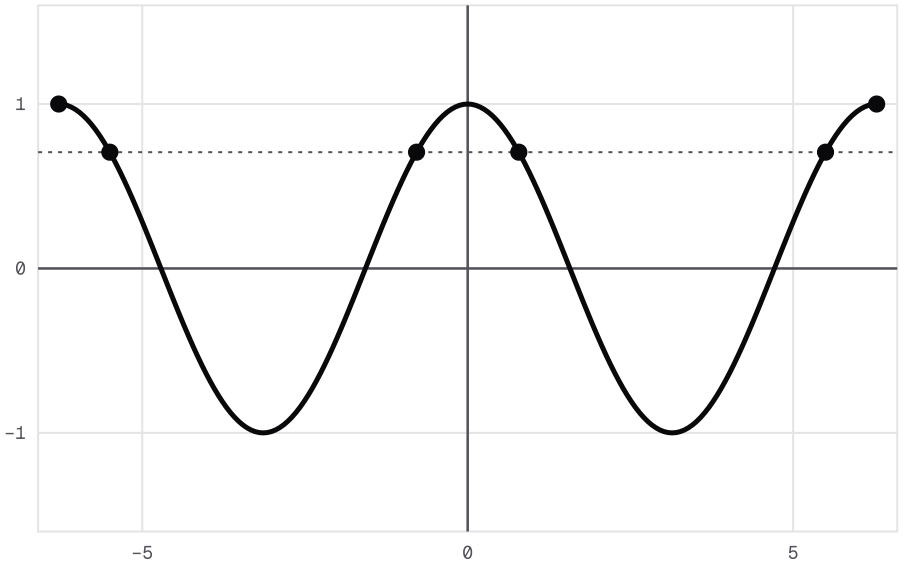
$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}$: le cosinus est pair.

Correction

Les réels $\dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$ conviennent, car le cosinus est pair.

D'après les relations fondamentales, $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ conviennent aussi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation a donc une infinité de solutions.



La courbe du cosinus et la droite d'équation y = √2/2

Les équations fondamentales

Propriété : Équations trigonométriques fondamentales

Soit α un réel. Pour tout réel x :

- $\cos x = \cos \alpha$ si et seulement si $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin x = \sin \alpha$ si et seulement si $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si α et x ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: $\tan x = \tan \alpha$ si et seulement si $x = \alpha + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Soit A le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne α. Les points du cercle qui ont la même abscisse que A sont A et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses, d'abscisse curviligne $-\alpha$; ceux qui ont la même ordonnée sont A et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, d'abscisse curviligne $\pi - \alpha$. On conclut avec les abscisses curvilignes d'un même point, égales à $2k\pi$ près. Pour la tangente, on multiplie par $\cos x \cos \alpha$: l'égalité $\tan x = \tan \alpha$ équivaut à $\sin(x - \alpha) = 0$, d'après le sinus d'une différence, puis à $x - \alpha = k\pi$. Ces vérifications ne sont pas détaillées ici.

Exemple : une équation en cosinus, dans $\mathbb{R}$

Résolvons $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$. On a $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$.

D'après les équations trigonométriques fondamentales, $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ce sont les abscisses des points de la figure, et de tous ceux qui suivent.

Dans un intervalle

Méthode : résoudre une équation trigonométrique

1. **Isole** la ligne trigonométrique : $\cos x = c$, $\sin x = c$ ou $\tan x = c$.
2. Pour le cosinus et le sinus, **vérifie** que $-1 \leq c \leq 1$; sinon, il n'y a aucune solution.
3. **Trouve** un réel α dont la ligne vaut c, puis **écris** les familles de solutions.
4. **Cherche**, dans un intervalle, les entiers k qui conviennent, par un encadrement.

Exemple : une équation en sinus, dans un intervalle

Résolvons $\sin x = -\frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Les familles. On a $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. D'après les équations fondamentales, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Première famille. L'encadrement $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $\frac{1}{12} \leq k < \frac{13}{12}$, donc $k = 1$ et $x = \frac{11\pi}{6}$.

Seconde famille. L'encadrement $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\frac{7}{12} \leq k < \frac{5}{12}$, donc $k = 0$ et $x = \frac{7\pi}{6}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Attention : deux familles de solutions

✗ « $\cos x = \frac{1}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. »

✓ Le réel $-\frac{\pi}{3}$ est aussi solution, et il manque. Il faut écrire $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour le sinus, la seconde famille est $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, et non $x = -\alpha + 2k\pi$.

La tangente, puis à toi

Exemple : une équation en tangente

Résolvons $\tan x = \sqrt{3}$, pour x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$.

D'après les équations fondamentales, $\tan x = \tan\frac{\pi}{3}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans $]-\pi, \pi]$, on trouve $\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Attention : la tangente a pour période π

✗ « $\tan x = \sqrt{3}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. »

✓ Le réel $-\frac{2\pi}{3}$ est solution, et il manque. Les solutions s'écrivent $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$: on ajoute des multiples de π.

Avant de résoudre, écarte les réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où la tangente n'existe pas.

À toi : Une équation dans un intervalle

Résous l'équation $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ dans $]-\pi, \pi]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Isole $\sin x$, puis trouve un réel α remarquable tel que $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Indice 2

Écris les deux familles $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.

Indice 3

Point délicat : encadre k dans chaque famille ; l'intervalle exclut $-\pi$ et contient π.

Réponse

Les familles. L'équation équivaut à $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{3}$. D'après les équations fondamentales, $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Première famille. L'encadrement $-\pi < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{2}{3} < k \leq \dfrac{1}{3}$, donc $k = 0$.

Seconde famille. L'encadrement $-\pi < \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{6} < k \leq \dfrac{1}{6}$, donc $k = 0$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Équations qui s'y ramènent

Poser une inconnue auxiliaire

Devine : Que poser ?

On veut résoudre $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Quelle inconnue poser pour reconnaître une équation connue ?

A. L'inconnue $X = 2x$.

Faux.

Le réel $2x$ n'apparaît pas dans l'équation.

B. L'inconnue $X = \cos^2 x$.

Faux.

Le terme $\cos x$ ne s'écrirait pas simplement avec X : son signe serait inconnu.

C. L'inconnue $X = x^2$.

Faux.

Le carré porte sur $\cos x$, pas sur x.

D. L'inconnue $X = \cos x$.

Juste.

Juste : l'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$.

Correction

En posant $X = \cos x$, on a $\cos^2 x = X^2$.

L'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$: une équation du second degré, que tu sais résoudre avec le discriminant.

Méthode : se ramener au second degré

1. **Exprime** l'équation avec une seule ligne, par exemple $\cos x$, grâce à $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou aux formules de duplication.
2. **Pose** $X = \cos x$ et résous l'équation du second degré obtenue, avec le discriminant.
3. **Garde** seulement les solutions X telles que $-1 \leq X \leq 1$.
4. **Résous** chaque équation $\cos x = X$, puis **réunis** les solutions.

Exemple : une équation du second degré en cosinus

Résolvons $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Second degré. On pose $X = \cos x$: l'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$, et ses racines sont :

$$X = \frac{1+3}{4} = 1,$$
$$X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Les deux valeurs sont dans $[-1, 1]$.

Retour à x. D'après les équations fondamentales :

- $\cos x = 1 = \cos 0$ équivaut à $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ équivaut à $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions sont les réels $2k\pi$, $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Deux autres formes

Exemple : une équation a cos x + b sin x = c

Résolvons $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$.

Un seul cosinus. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, l'équation s'écrit $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$, c'est-à-dire :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Les familles. D'après les équations fondamentales, $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions sont $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : factoriser, puis résoudre

Résolvons $\cos 3x + \cos x = 0$ dans $\mathbb{R}$. D'après la transformation d'une somme en produit, l'équation s'écrit $2\cos 2x \cos x = 0$.

Ce produit s'annule exactement lorsque $\cos 2x = 0$ ou $\cos x = 0$.

Premier facteur. L'équation $\cos 2x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$ équivaut à $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Second facteur. L'équation $\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions sont les réels de ces quatre familles.

Remarque : Vérifier une solution

Une solution se contrôle en la remplaçant dans l'équation de départ. Avec $x = \frac{5\pi}{12}$ et les valeurs exactes données par les formules d'addition :

$$\begin{aligned} &\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Le contrôle confirme la solution. Il repère aussi une famille oubliée ou un signe faux.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une équation dans un intervalle

Résous l'équation $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ dans $]-\pi, \pi]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pose $X = \cos x$ et calcule le discriminant de $2X^2 + X - 1$.
Indice 2
Tu obtiens deux valeurs de X ; résous $\cos x = X$ pour chacune.
Indice 3

Point délicat : $]-\pi, \pi]$ est ouvert en $-\pi$; pour chaque équation $\cos x = X$, vérifie quelles solutions y appartiennent.

Réponse

Second degré. On pose $X = \cos x$: $2X^2 + X - 1 = 0$, avec $\Delta = 1 + 8 = 9$. Les racines sont :

$$X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2},$$
$$X = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Les deux sont dans $[-1, 1]$.

L'équation $\cos x = \frac{1}{2}$. D'après les équations fondamentales, $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ donne $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans $]-\pi, \pi]$:

- $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$;
- $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\frac{1}{3} < k \leq \frac{2}{3}$.

Dans les deux cas, $k = 0$: on garde $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

L'équation $\cos x = -1$. Ici $\cos x = \cos \pi$ donne $x = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Seul π est dans $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution

En devoir, chaque équivalence nomme son outil. Écris :

« D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$, l'équation équivaut à $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$. D'après les équations fondamentales, $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. »

Dans un intervalle, écris l'encadrement de k pour chaque famille.

Inéquations sur le cercle

Un arc du cercle

En clair. Sur le cercle, $\cos x$ est l'abscisse du point M. Dire que $\cos x \geq c$, c'est dire que M est à droite de la droite verticale d'abscisse c, ou dessus.

Ces points forment un **arc** du cercle. Pour le sinus, on regarde au-dessus d'une droite horizontale.

Devine : Un cosinus positif

Dans $]-\pi, \pi]$, pour quels réels x a-t-on $\cos x > 0$?

A. Pour $x \in]0, \pi[$.

Faux.
C'est l'ensemble où le **sinus** est strictement positif.

B. Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Faux.
En $\frac{\pi}{2}$, le cosinus est nul : les bornes sont exclues.

C. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Juste.
Juste : le point est alors à droite de l'axe des ordonnées.

D. Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Faux.
Les réels négatifs proches de 0 conviennent aussi : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Correction
Le cosinus est l'abscisse du point M. Il est strictement positif quand M est strictement à droite de l'axe des ordonnées.

Sur $]-\pi, \pi]$, cela correspond à $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Méthode : résoudre une inéquation sur le cercle

1. **Résous** l'équation associée dans l'intervalle d'étude, $]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$. Si l'argument n'est pas x (par exemple $x - \varphi$ ou $2x$), **pose** u égal à l'argument et **écris** l'intervalle parcouru par u avant de lire l'arc.
2. **Place** les points solutions sur le cercle, avec la droite verticale d'abscisse c (cosinus) ou horizontale d'ordonnée c (sinus).
3. **Repère** l'arc où l'inégalité est vraie : à droite de la droite verticale, ou au-dessus de la droite horizontale, pour une inégalité $\geq$.
4. **Lis** les solutions en parcourant l'arc dans le sens direct, sans sortir de l'intervalle d'étude. Si l'arc passe par le point de départ de l'intervalle (I pour $[0, 2\pi[$, le point $(-1, 0)$ pour $]-\pi, \pi]$), l'ensemble des solutions est la réunion de deux intervalles. Exemple : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ pour $\cos x > 0$ sur $[0, 2\pi[$.

Un cosinus, un sinus, un argument décalé

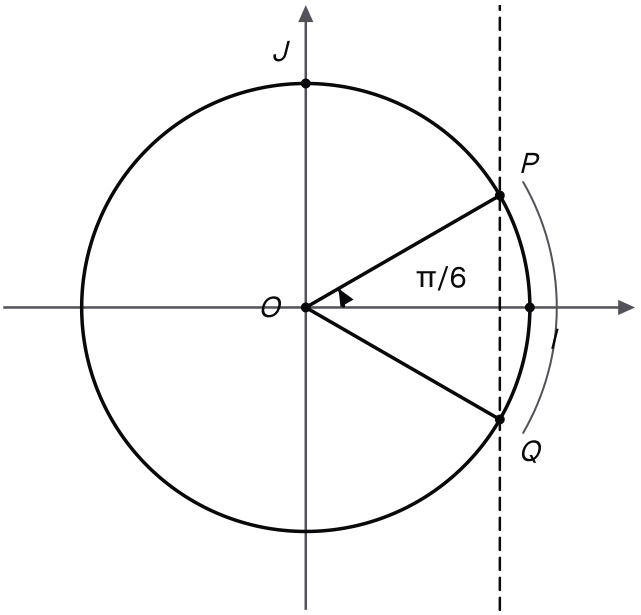
Exemple : une inéquation en cosinus

Résolvons $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$.

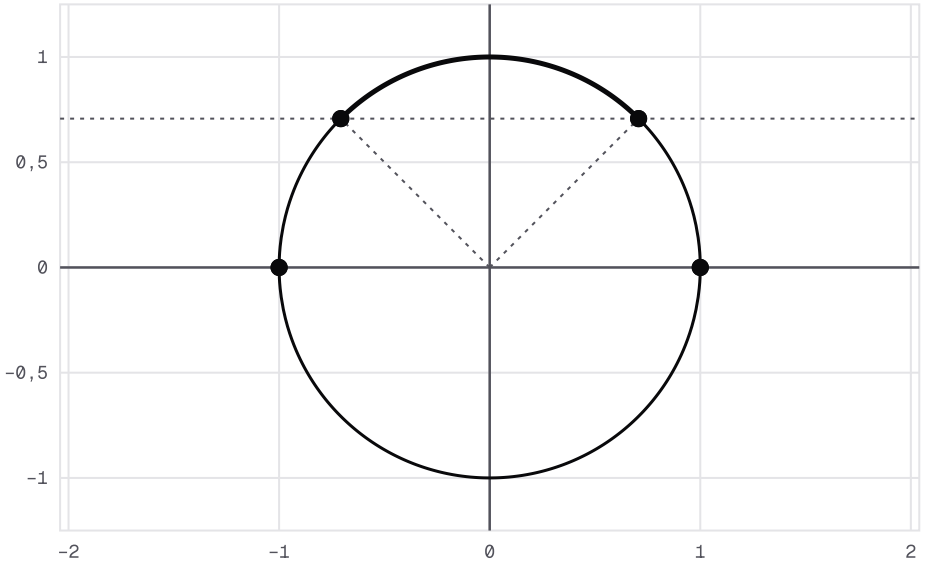
Équation associée. Dans cet intervalle, l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a deux solutions : $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

Lecture de l'arc. Les points d'abscisse au moins $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ forment l'arc qui passe par I, de $-\dfrac{\pi}{6}$ à $\dfrac{\pi}{6}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$. Contrôle : $\cos 0 = 1 \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Sur]-π, π], les points d'abscisse au moins √3/2 forment l'arc qui passe par I, de -π/6 à π/6.



$y = \sqrt{1-x^2}$ $y = -\sqrt{1-x^2}$ $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Point plein $\dfrac{\pi}{4}$ Point plein $\dfrac{3\pi}{4}$ $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Point du graphe

L'arc solution de sin x ≥ √2/2 sur le cercle

Exemple : une inéquation en sinus

Résolvons $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0, 2\pi[$ (figure ci-dessus).

Équation associée. Dans cet intervalle, l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ a deux solutions : $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lecture de l'arc. Les points d'ordonnée au moins $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc du haut, de $\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{3\pi}{4}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Contrôle : $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple : un argument décalé

Résolvons $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \geq \dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

Nouvelle inconnue. On pose $u = x - \dfrac{\pi}{6}$. Quand x décrit $[0, 2\pi[$, le réel u décrit $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right[$.

Lecture de l'arc. Sur cet intervalle, $\sin u = \dfrac{1}{2}$ pour $u = \dfrac{\pi}{6}$ et $u = \dfrac{5\pi}{6}$. Les points d'ordonnée au moins $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc du haut, donc $\dfrac{\pi}{6} \leq u \leq \dfrac{5\pi}{6}$.

Retour à x. On a $x = u + \dfrac{\pi}{6}$, donc $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$, et $S = \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Contrôle. Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \geq \dfrac{1}{2}$.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : lire l'arc dans le bon intervalle

✗ « Sur $]-\pi, \pi]$, l'ensemble des solutions de $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ est $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$. »

✓ Cet intervalle sort de $]-\pi, \pi]$, et le cosinus y est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$. Le bon arc passe par I : l'ensemble est $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Contrôle toujours une valeur, par exemple $\cos 0 = 1$.

À toi : Un arc à gauche

Résous l'inéquation $\cos x \leq -\dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Résous d'abord $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Indice 2

Les points cherchés sont à gauche de la droite verticale d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$, ou dessus.

Indice 3

Point délicat : ces deux points délimitent deux arcs ; garde celui dont tous les points sont à gauche de la droite verticale, et contrôle avec $\cos 0$ et $\cos \pi$.

Réponse

Équation associée. Dans $[0, 2\pi[$, l'équation $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ a pour solutions $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

Lecture de l'arc. Les points d'abscisse au plus $-\dfrac{1}{2}$ forment l'arc de gauche. Il passe par le point $(-1, 0)$, d'abscisse curviligne π.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$. Contrôle : $\cos \pi = -1 \leq -\dfrac{1}{2}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une inéquation

En devoir, la lecture sur le cercle s'accompagne d'une phrase. Écris :

« Sur $]-\pi, \pi]$, $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{6}$. Les points du cercle d'abscisse au moins $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont ceux de l'arc qui passe par I. Donc $S = \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$. »

Trace aussi le cercle et l'arc sur ta copie.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle formule pour quelle question

- **Mesure principale** : retirer ou ajouter des tours complets de 2π, en encadrant leur nombre k.
- **Alignement** : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$, calculé avec la relation de Chasles.
- **Une ligne à partir d'une autre** : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, puis le signe lu sur le cercle.
- **Simplifier** : les angles associés.
- **Valeur exacte** : addition, duplication ou linéarisation.
- **Produit de lignes** : la transformation d'un produit en somme.
- **Factoriser une somme** : la transformation d'une somme en produit.
- **Amplitude, encadrement** : $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$.
- **Équation** : les équations fondamentales, puis l'encadrement de k.
- **Inéquation** : l'arc lu sur le cercle.

Le mot du prof. Avant chaque calcul, situe le point sur le cercle : son signe et son quart de cercle évitent bien des erreurs.

Tu retrouveras ces formules en physique, pour les oscillations et le courant alternatif. Elles serviront aussi dans les chapitres qui suivent, en géométrie analytique.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul trigonométrique » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)