BURHAN

Résumé : Le barycentre dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/resume

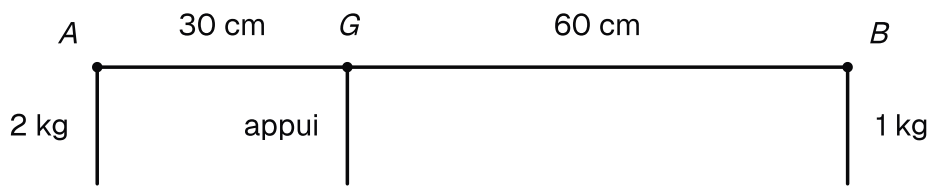
Chapitre	Semestre
Le barycentre dans le plan	Semestre 1

Barycentre de deux points

À retenir : Le barycentre, un point d'équilibre

Imagine deux masses posées aux points A et B. Le barycentre est le point où l'ensemble s'équilibre. Si les masses sont différentes, il se trouve plus près de la plus lourde ; si elles sont égales, c'est le milieu de $[AB]$.

En géométrie, un poids peut aussi être négatif. Avec deux poids de signes contraires, le barycentre sort du segment $[AB]$.



Reprise de la tige du cours : avec 2 kg en A et 1 kg en B, l'appui G se situe à 30 cm de A.

Propriété : Existence et unicité du barycentre de deux points

Soit A et B deux points du plan, et a et b deux réels tels que $a+b\neq 0$. Il existe un **unique** point G du plan tel que

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}.$$

Ce point est caractérisé par l'égalité :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Définition : Barycentre de deux points pondérés

Un **point pondéré** est un couple (A,a) formé d'un point A du plan et d'un réel a, appelé **poids** (ou coefficient) de A.

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$. L'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ s'appelle le **barycentre** des points pondérés (A, a) et (B, b). On note :

$$G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}.$$

Lorsque $a = b$ (et $a \neq 0$), le barycentre s'appelle l'**isobarycentre** de A et B : c'est le milieu du segment $[AB]$, car alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{a}{2a}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Propriété : Position du barycentre de deux points

Soit A et B deux points distincts, a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$.

- G appartient à la droite (AB).
- Si $ab \geq 0$ (poids de même signe), alors G appartient au segment $[AB]$.
- Si $ab < 0$ (poids de signes contraires), alors G n'appartient pas au segment $[AB]$.

Méthode : placer le barycentre de deux points

1. **Calcule** $a + b$ et assure-toi que cette somme n'est pas nulle.
2. **Écris** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$: au numérateur se trouve le poids de l'autre point.
3. **Place** G en reportant cette fraction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir de A.
4. **Contrôle** avec les signes : poids de même signe, G est entre A et B ; signes contraires, G est hors du segment.

Exemple

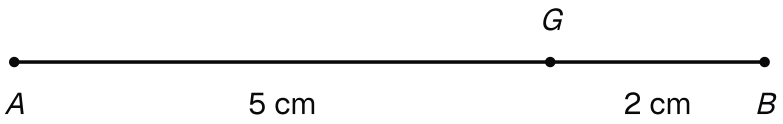
Énoncé. Sur un segment $[AB]$ de longueur 7 cm, place $G = \mathrm{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$.

Somme des poids. $2 + 5 = 7$, qui n'est pas nul : G existe.

Position. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}.$$

Donc $AG = 5$ cm et $GB = 2$ cm. Les deux poids sont positifs : G est sur $[AB]$, plus près de B, le point le plus lourd.



Sur [AB] long de 7 cm, G se place à 5 cm de A, donc à 2 cm de B.

Exemple

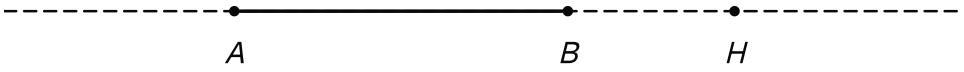
Énoncé. Place $H = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,-3)\}$.

Somme des poids. $1 + (-3) = -2$, qui n'est pas nul : H existe.

Position. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{-3}{-2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Le point H est sur la droite (AB), au-delà de B. Les poids sont de signes contraires : H n'est pas sur le segment $[AB]$.



Poids 1 et -3 : H tombe sur (AB), au-delà de B, avec AH égal à une fois et demie AB.

Attention : Pas de barycentre si les poids s'annulent

Avec $(A,4)$ et $(B,-4)$, la somme des poids vaut 0. L'égalité $4\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donnerait $4\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, ce qui est impossible lorsque $A \neq B$.

Commence donc chaque calcul par la somme des poids.

Attention : Le bon poids au numérateur

Pour $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,5)\}$, écrire $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$ est faux. Ce point serait plus près de A, alors que B porte le poids le plus grand.

En partant de A, le numérateur est le poids de B : la bonne fraction est $\frac{5}{7}$.

Barycentre de trois ou quatre points

Propriété : Existence et unicité du barycentre de trois ou quatre points

Soit A, B, C trois points du plan et a, b, c trois réels tels que $a+b+c \neq 0$. Il existe un **unique** point G du plan tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

et ce point est caractérisé par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right).$$

De même, pour quatre points A, B, C, D et quatre réels a, b, c, d tels que $a+b+c+d \neq 0$, il existe un unique point G tel que

$$\begin{aligned} &a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} \\ &\quad + c\overrightarrow{GC} + d\overrightarrow{GD} = \vec{0}, \end{aligned}$$

caractérisé par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b+c+d}\Big(&b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \\ &+ d\overrightarrow{AD}\Big). \end{aligned}$$

Définition : Barycentre de trois ou quatre points pondérés

Soit (A,a), (B,b), (C,c) trois points pondérés tels que $a+b+c \neq 0$. L'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ s'appelle le **barycentre** de ces trois points pondérés. On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

On définit de même le barycentre $\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c);(D,d)\}$ de quatre points pondérés dont la somme des poids $a+b+c+d$ n'est pas nulle.

Lorsque tous les poids sont égaux (et non nuls), le barycentre s'appelle l'**isobarycentre** des points.

Méthode : placer le barycentre de trois points depuis l'un d'eux

1. **Vérifie** que $a+b+c \neq 0$.
2. **Écris** $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.
3. **Construis** ce vecteur à partir de A : son extrémité est G.
4. **Autre voie** : regroupe d'abord deux points, grâce à l'associativité présentée plus bas.

Exemple

Énoncé. U, V, W sont trois points et I est le milieu de $[VW]$. Place $G = \mathrm{Bar}\{(U,2);(V,1);(W,1)\}$.

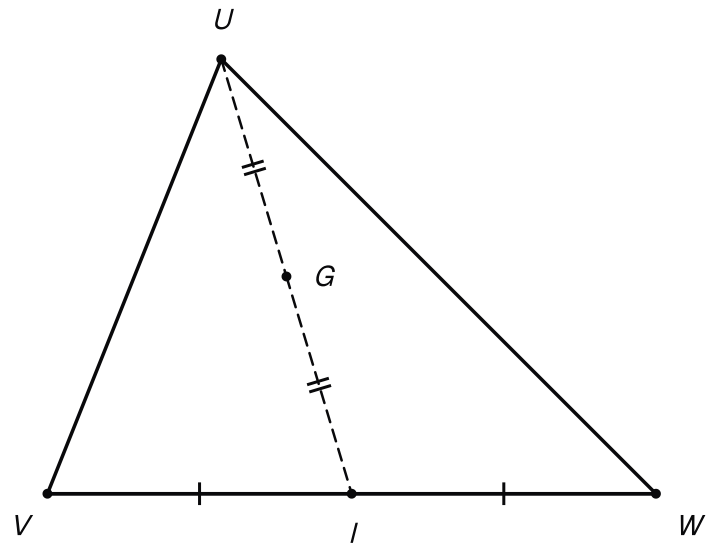
Somme des poids. $2+1+1=4$, qui n'est pas nul.

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points :

$$\overrightarrow{UG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{UW}\right).$$

Or $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{UW} = 2\,\overrightarrow{UI}$, car I est le milieu de $[VW]$.

Conclusion. $\overrightarrow{UG} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{UI}$: G est le milieu du segment $[UI]$.



Les points U, V, W, le milieu I de [VW], et G au milieu de [UI].

Remarque : Trois poids de somme nulle

Avec trois points aussi, tout commence par la somme des poids. Les points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,-2)$ n'ont pas de barycentre : $1+1-2=0$.

Homogénéité et propriété caractéristique

Propriété : Homogénéité du barycentre

Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie tous les poids par un **même** réel non nul : si $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ et si k est un réel non nul, alors

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,ka);(B,kb);\\(C,kc)\}.$$

Il en est de même pour deux ou quatre points pondérés.

Exemple

Énoncé. Simplifie les poids de $G = \mathrm{Bar}\{(A, 0{,}6); (B, 0{,}4)\}$.

Calcul. On multiplie les deux poids par 5, réel non nul. D'après l'homogénéité, $G = \mathrm{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$, et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Autre écriture. En multipliant par -1, on obtient aussi $G = \mathrm{Bar}\{(A, -3); (B, -2)\}$: c'est le même point.

Attention : Ajouter n'est pas multiplier

Pour $\mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 4)\}$, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Ajouter 1 à chaque poids donne $\mathrm{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$, avec la fraction $\frac{5}{7}$: ce n'est plus le même point.

Pour garder le même point, multiplie chaque poids par un facteur commun non nul, sans rien ajouter.

Propriété : Propriété caractéristique du barycentre

Soit (A, a), (B, b), (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$, et G un point du plan. Alors $G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ si et seulement si, **pour tout point** M du plan,

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}.$$

Il en est de même pour deux ou quatre points pondérés.

Méthode : réduire une somme de vecteurs

1. **Lis** les coefficients devant $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$: ce sont les poids.
2. **Additionne**-les : cette somme doit être non nulle.
3. **Nomme** G le barycentre de ces points pondérés.
4. **Écris** la somme comme un seul vecteur, $(a + b + c)\overrightarrow{MG}$, d'après la propriété caractéristique.

Exemple

Énoncé. Pour tout point M, on pose $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Réduis $\vec{u}$.

Somme des poids. $2 - 1 + 3 = 4$, qui n'est pas nul. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$.

Réduction. D'après la propriété caractéristique, $\vec{u} = 4\overrightarrow{MG}$ pour tout point M.

Placer G**.** Avec $M = A$, on obtient $-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AG}$, soit :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

À retenir : Bien choisir le point M

La propriété caractéristique vaut pour **tout** point M : choisis-le selon la question.

- Avec $M = A$, tu places G à partir de A.
- Avec $M = O$, origine du repère, tu obtiens les coordonnées de G.
- Avec $M = G$, tu retrouves la définition du barycentre.

Associativité

Propriété : Associativité du barycentre

- Soit (A, a), (B, b), (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Si $H = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}\\ &= \mathrm{Bar}\{(H, a + b); (C, c)\}.\end{aligned}$$

- Soit (A, a), (B, b), (C, c), (D, d) quatre points pondérés tels que $a + b + c + d \neq 0$, $a + b \neq 0$ et $c + d \neq 0$. Si $H = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$ et $K = \mathrm{Bar}\{(C, c); (D, d)\}$, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b);\\ &\quad (C, c); (D, d)\}\\ &= \mathrm{Bar}\{(H, a + b); (K, c + d)\}.\end{aligned}$$

- Soit (A, a), (B, b), (C, c), (D, d) quatre points pondérés tels que $a + b + c + d \neq 0$ et $a + b + c \neq 0$. Si $L = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$, alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b);\\ &\quad (C, c); (D, d)\}\\ &= \mathrm{Bar}\{(L, a + b + c); (D, d)\}.\end{aligned}$$

Méthode : regrouper des points

1. **Regroupe** des points dont les poids ont une somme non nulle.
2. **Remplace** ce groupe par son barycentre, appelé barycentre partiel.
3. **Donne**-lui pour poids la somme des poids du groupe.
4. **Termine** avec deux points seulement : la construction devient simple.

Exemple

Énoncé. Place le point :

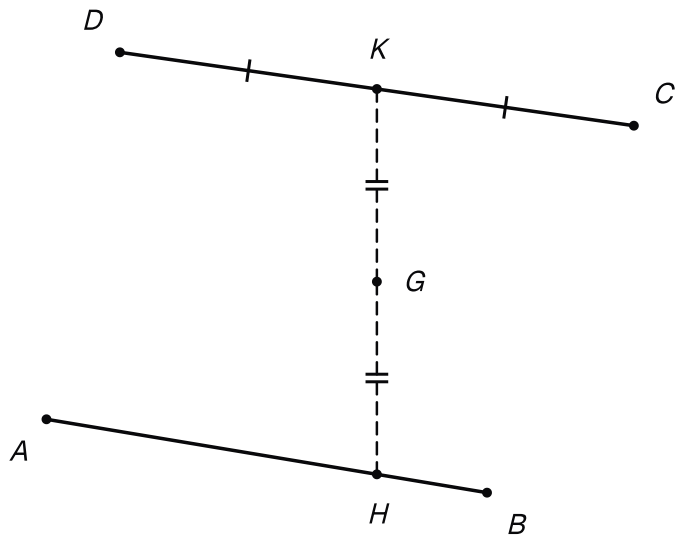
$$G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3);(C,2);(D,2)\}.$$

Somme des poids. $1+3+2+2=8$, qui n'est pas nul.

Deux groupes. $H = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$ vérifie $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et reçoit le poids 4.

Le point $K = \mathrm{Bar}\{(C,2);(D,2)\}$ est le milieu de $[CD]$ et reçoit le poids 4.

Conclusion. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(H,4);(K,4)\}$: G est le milieu de $[HK]$.



Deux groupes de deux points : H sur [AB], K milieu de [CD], puis G milieu de [HK].

Attention : Le poids du barycentre partiel

Dans l'exemple ci-dessus, donner à H le poids 1 au lieu de 4 serait une erreur. On obtiendrait $\mathrm{Bar}\{(H,1);(K,4)\}$, situé aux quatre cinquièmes de $[HK]$ en partant de H. Le barycentre partiel reçoit toujours la somme des poids de son groupe.

Coordonnées du barycentre

Propriété : Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ trois points, a, b, c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$. Alors

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$$

et

$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}.$$

Pour deux ou quatre points pondérés, la règle est la même : chaque coordonnée de G est la moyenne des coordonnées des points, pondérée par leurs poids.

Méthode : calculer les coordonnées

1. **Dresse** un petit tableau : points, coordonnées, poids.
2. **Calcule** la somme des poids : elle doit être non nulle.
3. **Abscisse** : multiplie chaque abscisse par son poids, additionne, puis divise par la somme des poids. Fais de même pour l'ordonnée.
4. **Vérifie** : avec des poids positifs, l'abscisse de G se situe entre l'abscisse minimale et l'abscisse maximale des points ; de même pour l'ordonnée.

Exemple

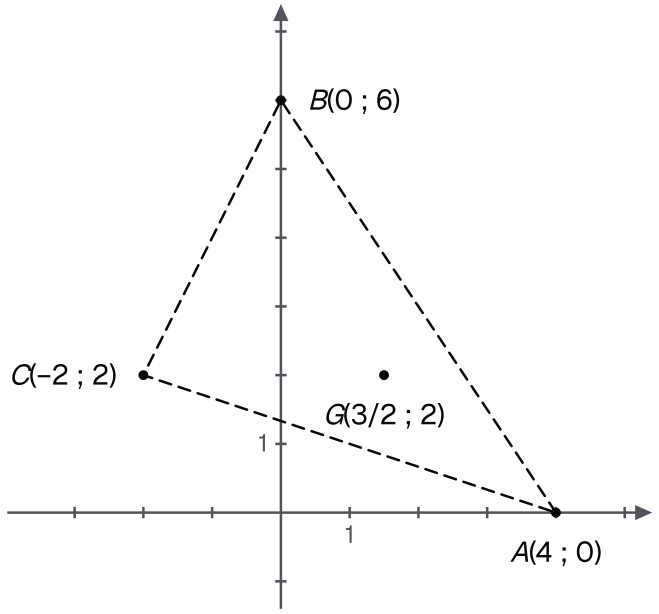
Énoncé. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(4,0)$, $B(0,6)$ et $C(-2,2)$. Calcule les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$.

Somme des poids. $2+1+1=4$, qui n'est pas nul.

Coordonnées. D'après les coordonnées du barycentre :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2\times 4 + 1\times 0 + 1\times(-2)}{4} \\ &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \\ y_G &= \frac{2\times 0 + 1\times 6 + 1\times 2}{4} \\ &= \frac{8}{4} = 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $G\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.



Les trois points de l'exemple et G, de coordonnées 3/2 et 2, à l'intérieur du triangle ABC.

À retenir : Le centre d'inertie, un barycentre

En physique, le centre d'inertie d'un système de masses ponctuelles est le barycentre des points affectés de leurs masses. Ses coordonnées se calculent par la formule ci-dessus.

Les masses sont positives : chaque coordonnée du centre d'inertie se situe entre la valeur minimale et la valeur maximale de cette coordonnée pour les points.

Attention : Diviser par la somme des poids

Dans l'exemple précédent, diviser par 3, le nombre de points, donnerait $x_G = 2$: c'est faux. On divise par la somme des poids, ici 4.

Les deux calculs ne donnent le même résultat que si tous les poids sont égaux.

Alignement et concours de droites

Propriété : Points d'une droite et barycentre

Soit A et B deux points distincts et M un point du plan. Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $a + b \neq 0$ et $M = \text{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$.

En particulier, trois points A, B, M (avec $A \neq B$) sont **alignés** si et seulement si M est un barycentre de A et B.

Méthode : écrire un point comme barycentre

1. **Traduis** l'énoncé par une égalité $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.
2. **Affecte** à A le poids $1-t$ et à B le poids t : $M = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t);(B,t)\}$.
3. **Multiplie** les deux poids par un même réel pour obtenir des entiers, d'après l'homogénéité.
4. **Pour trois points**, l'égalité $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ donne les poids $1-x-y$, x et y.

Exemple

Énoncé. Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Écris M comme barycentre de A et B.

Poids. Avec $t = -\dfrac{1}{3}$, on a $M = \mathrm{Bar}\left\{\left(A, \dfrac{4}{3}\right);\left(B, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

Entiers. On multiplie par 3 : $M = \mathrm{Bar}\{(A,4);(B,-1)\}$.

Contrôle. $\dfrac{-1}{4+(-1)} = -\dfrac{1}{3}$: on retrouve la fraction de départ.

Méthode : prouver un alignement ou un concours

1. **Pour un alignement**, écris l'un des trois points comme barycentre des deux autres, par exemple grâce à l'associativité.
2. **Pour un concours**, considère le barycentre G de tous les points pondérés de la figure.
3. **Regroupe** les points de plusieurs façons : chaque regroupement place G sur l'une des droites.
4. **Conclus** : G appartient à toutes ces droites, qui sont donc concourantes en G.

Exemple

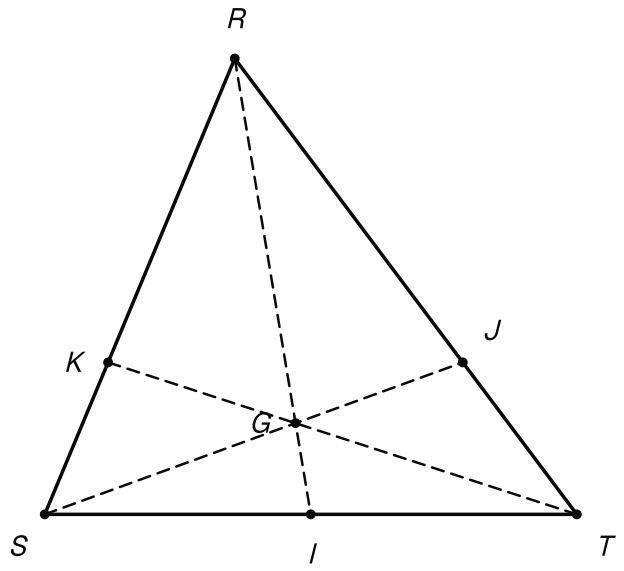
Énoncé. Dans un triangle RST, on note I le milieu de $[ST]$, $J = \mathrm{Bar}\{(R,1);(T,2)\}$ et $K = \mathrm{Bar}\{(R,1);(S,2)\}$. Prouve que (RI), (SJ) et (TK) sont concourantes.

Point commun. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(R,1);(S,2);(T,2)\}$; la somme des poids vaut 5.

Regroupements. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(R,1);(I,4)\}$, donc $G \in (RI)$.

De même, $G = \mathrm{Bar}\{(J,3);(S,2)\}$, donc $G \in (SJ)$, et $G = \mathrm{Bar}\{(K,3);(T,2)\}$, donc $G \in (TK)$.

Conclusion. Les trois droites passent par G : elles sont concourantes.



Les trois droites (RI), (SJ) et (TK) passent par un même point G.

Quelle propriété pour quelle question ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Placer** le barycentre de deux points : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
- **Situer** ce point par rapport au segment : le signe des poids.
- **Simplifier** des poids : l'homogénéité.
- **Réduire** une somme de vecteurs : la propriété caractéristique.
- **Construire** avec trois ou quatre points : l'associativité.
- **Calculer** des coordonnées : les moyennes pondérées.
- **Prouver un alignement** : un point est barycentre des deux autres.
- **Prouver un concours** : le barycentre de tous les points, puis l'associativité.

Deux points, avec a + b non nul

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

Propriété caractéristique, G barycentre, a + b + c non nul

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$$

Associativité, H = Bar{(A, a) ; (B, b)}, a + b et a + b + c non nuls

$$\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\} = \mathrm{Bar}\{(H,a+b);(C,c)\}$$

Abscisse

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$$

Ordonnée

$$y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}$$

Point de la droite (AB)

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow M = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t);(B, t)\}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Commence chaque calcul par la somme des poids, et écris qu'elle n'est pas nulle.

Cite la propriété employée : « d'après la propriété caractéristique », « par associativité ».

Fais une figure sur ton cahier : elle contrôle tes calculs. Termine par une phrase de conclusion.