BURHAN

# Le barycentre dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Le barycentre dans le plan | Niveau examen | 5 |

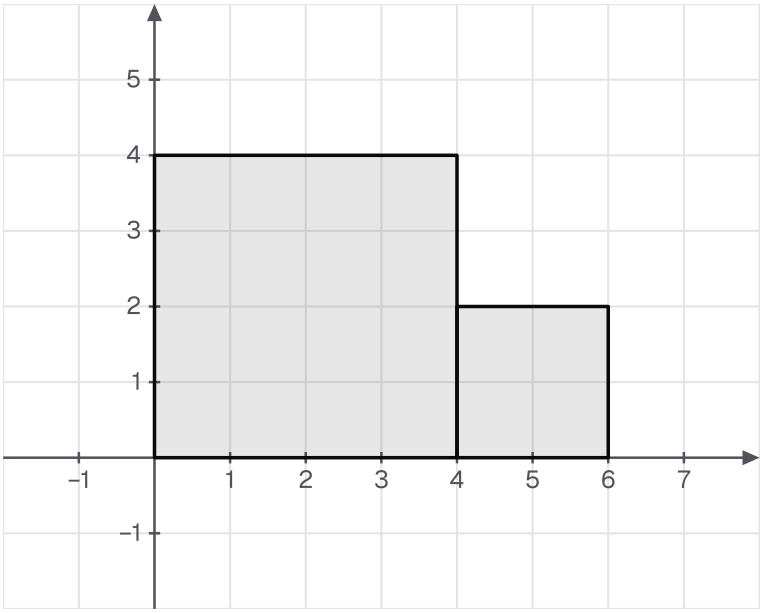
**Exercice 1** 5 pts

## Le centre d'inertie d'une plaque formée de carrés

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $1$ cm. Une plaque mince et homogène est formée de deux carrés accolés :

- le carré $\mathcal{C}_1$ de sommets $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,4)$ et $(0,4)$ ;
- le carré $\mathcal{C}_2$ de sommets $(4,0)$, $(6,0)$, $(6,2)$ et $(4,2)$.

La plaque a une masse de $5$ g par centimètre carré. On admet que le centre d'inertie d'un carré homogène est son centre, et que le centre d'inertie de la plaque est le barycentre des centres des carrés affectés de leurs masses.




**La plaque formée d'un carré de côté 4 et d'un carré de côté 2 accolés, dans le repère.**

**1.** 0,75 pts

Donner les coordonnées des centres $O_1$ et $O_2$ des carrés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, puis calculer la masse de chaque carré.

INDICE

**Début :** le centre d'un carré est le milieu d'une diagonale. **Ensuite :** masse = aire $\times\ 5$ g.

**2.** 0,75 pts

On note $G$ le centre d'inertie de la plaque. Justifier que $G = \mathrm{Bar}\{(O_1, 4); (O_2, 1)\}$.

INDICE

**Outil :** l'homogénéité. **Début :** écris $G$ avec les masses $80$ et $20$, puis divise ces poids par un même nombre.

**3.** 0,75 pts

Calculer les coordonnées de $G$.

INDICE

**Outil :** les coordonnées du barycentre, avec les poids de la question 2.

**4.** 0,75 pts

Exprimer $\overrightarrow{O_1G}$ en fonction de $\overrightarrow{O_1O_2}$. En déduire la position de $G$ par rapport au segment $[O_1O_2]$.

INDICE

**Outil :** l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, puis la position selon le signe des poids.

**5.** 0,5 pts

On accole un troisième carré $\mathcal{C}_3$, de même matière, de sommets $(4,2)$, $(6,2)$, $(6,4)$ et $(4,4)$. On note $O_3$ son centre et $G'$ le centre d'inertie de la nouvelle plaque. Donner les coordonnées de $O_3$ et la masse de $\mathcal{C}_3$, puis écrire $G'$ comme barycentre de $O_1$, $O_2$ et $O_3$.

INDICE

**Début :** comme à la question 1, le centre est le milieu d'une diagonale. **Ensuite :** chaque centre reçoit la masse de son carré.

**6.** 1 pts

On note $K$ le milieu de $[O_2O_3]$. Écrire $G'$ comme barycentre de $O_1$ et $K$ avec des poids entiers, puis calculer ses coordonnées.

INDICE

**Outil :** l'associativité ; $K$ reçoit la masse totale des deux petits carrés. **Ensuite :** simplifie les poids par homogénéité avant de calculer.

**7.** 0,5 pts

Contrôler le résultat de la question 6 avec les coordonnées du barycentre des trois centres.

INDICE

**Outil :** les coordonnées du barycentre de trois points, avec les masses $80$, $20$ et $20$.

**Exercice 2** 5 pts

## Trois droites concourantes, avec un poids négatif

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le triangle $PQR$ avec $P(0,0)$, $Q(4,0)$ et $R(0,5)$. On définit les points :

- $U = \text{Bar}\{(P,3);(Q,-1)\}$ ;
- $V = \text{Bar}\{(Q,-1);(R,2)\}$ ;
- $W = \text{Bar}\{(P,3);(R,2)\}$.

**1.** 0,75 pts

Justifier que $U$ existe, exprimer $\overrightarrow{PU}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$ et calculer les coordonnées de $U$. Le point $U$ appartient-il au segment $[PQ]$ ?

INDICE

**Outil :** l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, puis la position selon le signe des poids.

**2.** 0,75 pts

Même travail pour $V$ : exprimer $\overrightarrow{QV}$ en fonction de $\overrightarrow{QR}$, calculer les coordonnées de $V$ et le situer par rapport à $[QR]$.

INDICE

**Outil :** même méthode, en partant de $Q$.

**3.** 0,5 pts

Exprimer $\overrightarrow{PW}$ en fonction de $\overrightarrow{PR}$ et calculer les coordonnées de $W$.

INDICE

**Outil :** même formule ; ici les poids sont positifs.

**4.** 0,75 pts

On note $G = \text{Bar}\{(P,3);(Q,-1);(R,2)\}$. Justifier que $G$ existe et que $G = \text{Bar}\{(U,2);(R,2)\}$. En déduire que $G$ appartient à la droite $(UR)$.

INDICE

**Outil :** l'associativité, puis la propriété des points d'une droite. **Début :** quel groupe de deux points a pour barycentre $U$ ?

**5.** 0,75 pts

Justifier de même que $G$ appartient à la droite $(PV)$, puis à la droite $(QW)$. Conclure.

INDICE

**Début :** quelle somme de poids pour chaque groupe ? **Point délicat :** $Q$ garde son poids $-1$.

**6.** 0,5 pts

Calculer les coordonnées de $G$.

INDICE

**Outil :** les coordonnées du barycentre ; attention au poids négatif.

**7.** 1 pts

Contrôler les résultats des questions 4 et 5 : vérifier que $G$ est le milieu de $[UR]$, puis que $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PV}$ et $\overrightarrow{QG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{QW}$.

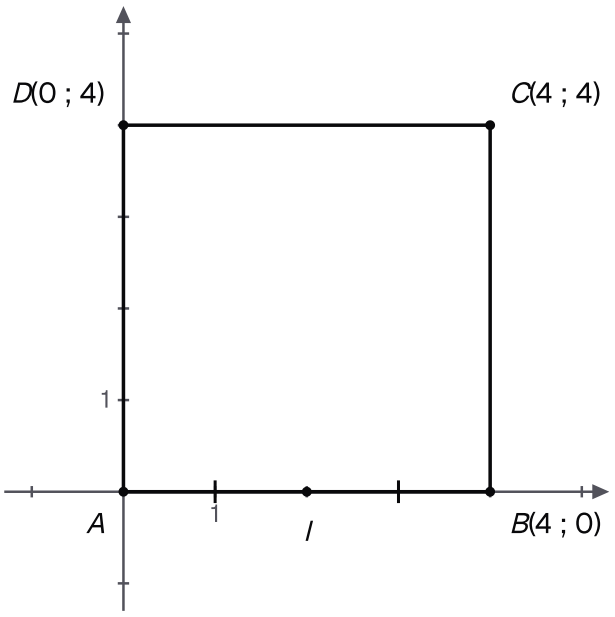
INDICE

**Outil :** les coordonnées des questions 1, 2, 3 et 6. **Début :** calcule le milieu de $[UR]$, puis les coordonnées des vecteurs.

## Exercice 3 — 5 pts

### Un point défini à partir des sommets d'un carré

$ABCD$ est un carré de côté $4$ cm. On le place dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $1$ cm, où $B(4,0)$, $C(4,4)$ et $D(0,4)$. On note $I$ le milieu de $[AB]$.




**Le carré ABCD de côté 4 dans le repère d'origine A, et le milieu I de [AB].**

**1.** — 1 pts

Pour tout point $M$, réduire $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ à l'aide du barycentre $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$, puis calculer les coordonnées de $G$.

INDICE

**Outil :** la propriété caractéristique, puis les coordonnées du barycentre. **Début :** vérifie la somme des poids.

**2.** — 0,75 pts

Justifier que $G$ est le milieu de $[IC]$ et contrôler avec les coordonnées.

INDICE

**Outil :** l'associativité, en regroupant $A$ et $B$.

**3.** — 1 pts

Le point $E$ vérifie $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} - 2\overrightarrow{ED} = \vec{0}$. Justifier que $E$ existe, puis l'écrire comme barycentre de $G$ et $D$ avec des poids entiers.

INDICE

**Début :** reconnais $E$ comme barycentre de quatre points et vérifie la somme des poids. **Outil :** l'associativité, en regroupant $A$, $B$ et $C$.

**4.** 0,5 pts

En déduire que $G$ est le milieu de $[DE]$.

INDICE

**Outil :** l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, en partant de $G$.

**5.** 0,75 pts

En déduire les coordonnées de $E$.

INDICE

**Outil :** $G$ est le milieu de $[DE]$, donc $x_E = 2x_G - x_D$ et de même pour l'ordonnée.

**6.** 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et écrire $E$ comme barycentre de $A$ et $B$ avec des poids entiers. Que peut-on dire des points $A$, $B$ et $E$ ?

INDICE

**Outil :** si $\overrightarrow{AE} = t\,\overrightarrow{AB}$, alors $E = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t);(B, t)\}$ ; puis la propriété des points d'une droite.

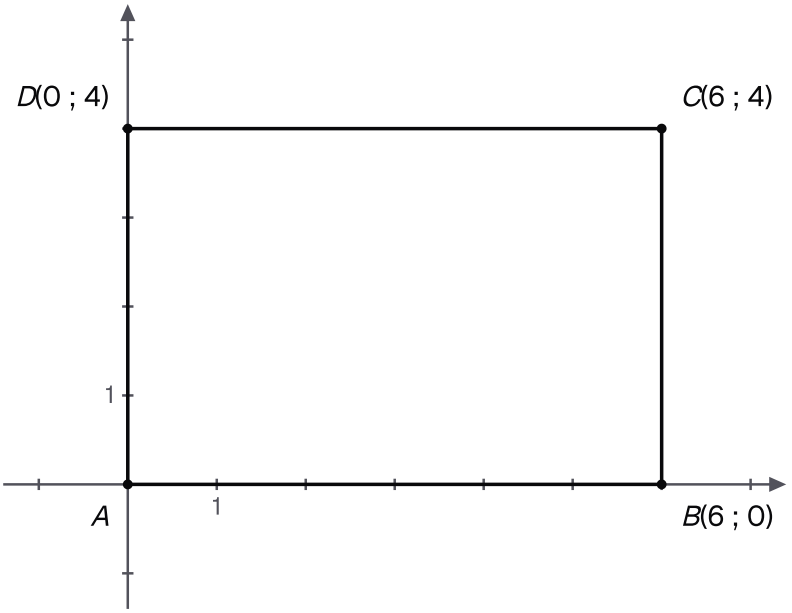
**Exercice 4** 5 pts

## Quatre masses aux sommets d'un rectangle

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $1$ dm. Quatre petits objets, assimilés à des points, sont posés sur une table aux sommets du rectangle $ABCD$, avec $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ et $D(0,4)$ :

- $100$ g en $A$ et $200$ g en $B$ ;
- $600$ g en $C$ et $300$ g en $D$.

On admet que le centre d'inertie $G$ du système est le barycentre des quatre points affectés de leurs masses.




**Le rectangle ABCD de la table, dans le repère d'origine A ; une unité représente 1 dm.**

**1.** 1 pts

Justifier que $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2);(C,6);(D,3)\}$, puis calculer les coordonnées de $G$.

INDICE

**Outil :** l'homogénéité, en divisant les quatre masses par $100$. **Ensuite :** les coordonnées du barycentre ; on divise par la somme des poids.

**2.** 0,75 pts

On note $K = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2)\}$ et $L = \mathrm{Bar}\{(D,3);(C,6)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DL}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$, puis calculer les coordonnées de $K$ et de $L$ et les situer par rapport aux segments $[AB]$ et $[DC]$.

INDICE

**Outil :** l'existence et l'unicité du barycentre de deux points. **Point délicat :** pour $L$, on part de $D$, de poids $3$.

**3.** 0,75 pts

Écrire $G$ comme barycentre de $K$ et $L$ avec des poids entiers. En déduire que $G$ appartient à la droite $(KL)$, puis exprimer $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

INDICE

**Outil :** l'associativité, en regroupant $A$ avec $B$, puis $C$ avec $D$. **Ensuite :** l'homogénéité et la propriété des points d'une droite.

**4.** 0,75 pts

On note $I = \mathrm{Bar}\{(A,1);(D,3)\}$ et $J = \mathrm{Bar}\{(B,2);(C,6)\}$. Calculer les coordonnées de $I$ et de $J$, puis justifier que $G$ appartient à la droite $(IJ)$.

INDICE

**Début :** même méthode qu'aux questions 2 et 3, avec un autre regroupement des quatre points : $A$ avec $D$, puis $B$ avec $C$.

**5.** 0,5 pts

En déduire que $G$ est le point d'intersection des droites $(KL)$ et $(IJ)$.

INDICE

**Outil :** si $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires, les droites $(KL)$ et $(IJ)$ ne sont pas parallèles et se coupent en un seul point. **Ensuite :** les questions 3 et 4.

**6.** 1,25 pts

On remplace l'objet de $300$ g placé en $D$ par un objet de masse $m$ grammes, avec $m > 0$ ; les trois autres objets ne changent pas. On note $G'$ le nouveau centre d'inertie. Calculer les coordonnées de $G'$ en fonction de $m$, puis déterminer $m$ pour que $G'$ appartienne à la droite $(AC)$.

INDICE

**Début :** $G' = \mathrm{Bar}\{(A,100);(B,200);(C,600);(D,m)\}$, de somme des poids $900 + m$. **Ensuite :** $G'$ appartient à $(AC)$ si et seulement s'il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AG'} = t\,\overrightarrow{AC}$, avec $\overrightarrow{AC}(6,4)$.

**Exercice 5** 5 pts

## Trois points alignés, grâce à la propriété caractéristique

$ABC$ est un triangle. On définit les points :

- $P = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$ ;
- $Q = \mathrm{Bar}\{(A,-1);(C,3)\}$ ;
- $R = \mathrm{Bar}\{(B,3);(C,3)\}$.

Les questions 1 à 4 se traitent sans repère.

**1.** 1 pts

Justifier que $P$, $Q$ et $R$ existent. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, puis situer $Q$ par rapport au segment $[AC]$. Que représente $R$ pour le segment $[BC]$ ?

INDICE

**Outil :** l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, puis la position selon le signe des poids. **Pour $R$ :** compare les deux poids.

**2.** 0,75 pts

Pour tout point $M$, réduire $\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}$, puis $-\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MC}$.

INDICE

**Outil :** la propriété caractéristique, appliquée à $P$, puis à $Q$. **Début :** la somme des poids donne le coefficient du vecteur obtenu.

**3.** 1 pts

On choisit $M = R$ dans les deux égalités de la question 2 et on les additionne membre à membre. En déduire que $4\,\overrightarrow{RP} + 2\,\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$.

INDICE

**Début :** en additionnant, les vecteurs $\overrightarrow{RA}$ et $-\overrightarrow{RA}$ s'éliminent. **Ensuite :** utilise la définition de $R$.

**4.** 1 pts

En déduire que $R = \mathrm{Bar}\{(P,2);(Q,1)\}$, puis que les points $P$, $Q$ et $R$ sont alignés. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$.

INDICE

**Outil :** la définition du barycentre de deux points, puis l'homogénéité et la propriété des points d'une droite. **Point délicat :** vérifie que $P \neq Q$.

**5.** 0,75 pts

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1,1)$, $B(5,1)$ et $C(5,3)$. Calculer les coordonnées de $P$, de $Q$ et de $R$.

INDICE

**Outil :** les vecteurs de la question 1, ou les coordonnées du barycentre. **Point délicat :** le poids $-1$ de $A$ dans le calcul de $Q$.

**6.** 0,5 pts

Contrôler les résultats des questions 3 et 4 à l'aide des coordonnées.

INDICE

**Outil :** les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$, puis celles de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$.