BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Niveau examen	5

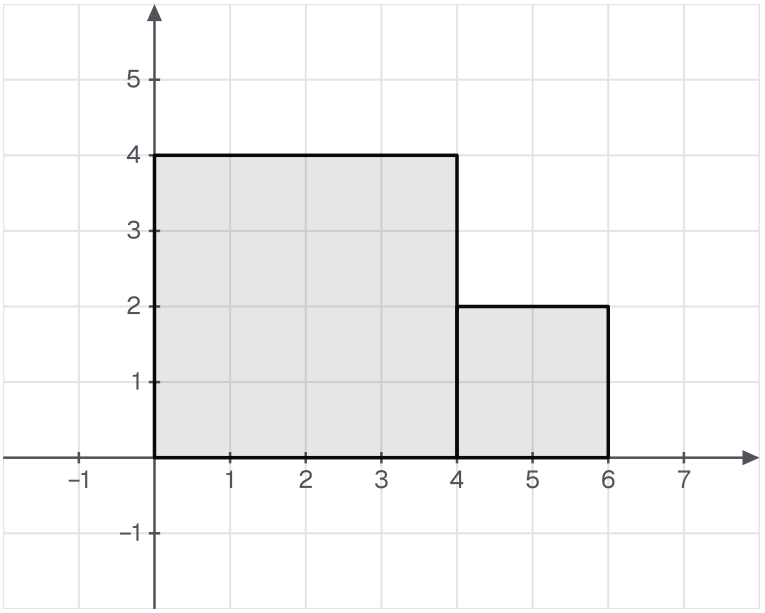
Exercice 1 5 pts

Le centre d'inertie d'une plaque formée de carrés

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm. Une plaque mince et homogène est formée de deux carrés accolés :

- le carré $\mathcal{C}_1$ de sommets $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,4)$ et $(0,4)$;
- le carré $\mathcal{C}_2$ de sommets $(4,0)$, $(6,0)$, $(6,2)$ et $(4,2)$.

La plaque a une masse de 5 g par centimètre carré. On admet que le centre d'inertie d'un carré homogène est son centre, et que le centre d'inertie de la plaque est le barycentre des centres des carrés affectés de leurs masses.



La plaque formée d'un carré de côté 4 et d'un carré de côté 2 accolés, dans le repère.

1. 0,75 pts

Donner les coordonnées des centres O_1 et O_2 des carrés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, puis calculer la masse de chaque carré.

INDICE

Début : le centre d'un carré est le milieu d'une diagonale. **Ensuite :** masse = aire $\times\ 5$ g.

CORRIGÉ

Centres. Le centre d'un carré est le milieu de ses diagonales.

- O_1 est le milieu du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(4,4)$: $O_1(2,2)$.
- O_2 est le milieu du segment d'extrémités $(4,0)$ et $(6,2)$: $O_2(5,1)$.

Masses. Le carré $\mathcal{C}_1$ a pour côté 4 cm, donc pour aire 16 cm² et pour masse $16 \times 5 = 80$ g. Le carré $\mathcal{C}_2$ a pour côté 2 cm, donc pour aire 4 cm² et pour masse $4 \times 5 = 20$ g.

Conclusion. $O_1(2,2)$ et $O_2(5,1)$; les carrés ont pour masses 80 g et 20 g.

2. 0,75 pts

On note G le centre d'inertie de la plaque. Justifier que $G = \mathrm{Bar}\{(O_1, 4); (O_2, 1)\}$.

INDICE

Outil : l'homogénéité. **Début :** écris G avec les masses 80 et 20, puis divise ces poids par un même nombre.

CORRIGÉ

D'après l'énoncé et la question 1, $G = \mathrm{Bar}\{(O_1, 80); (O_2, 20)\}$, et la somme $80 + 20 = 100$ n'est pas nulle.

On multiplie les deux poids par $\dfrac{1}{20}$, réel non nul : 80 devient 4 et 20 devient 1. D'après l'homogénéité, le barycentre ne change pas.

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(O_1, 4); (O_2, 1)\}$.

3. 0,75 pts

Calculer les coordonnées de G.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, avec les poids de la question 2.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut $4 + 1 = 5$. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{4 \times 2 + 1 \times 5}{5} = \frac{13}{5},$$
$$y_G = \frac{4 \times 2 + 1 \times 1}{5} = \frac{9}{5}.$$

Conclusion. Le centre d'inertie de la plaque est $G\left(\dfrac{13}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

4. 0,75 pts

Exprimer $\overrightarrow{O_1G}$ en fonction de $\overrightarrow{O_1O_2}$. En déduire la position de G par rapport au segment $[O_1O_2]$.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, puis la position selon le signe des poids.

CORRIGÉ

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, avec la somme des poids 5 :

$$\overrightarrow{O_1G} = \frac{1}{5}\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Position. Les poids 4 et 1 sont positifs. D'après la position du barycentre de deux points, G appartient au segment $[O_1O_2]$.

Contrôle. $\overrightarrow{O_1O_2}(3,-1)$, et $\frac{1}{5}\overrightarrow{O_1O_2}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$. On retrouve $x_G = 2+\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ et $y_G = 2-\frac{1}{5} = \frac{9}{5}$.

Conclusion. $\overrightarrow{O_1G} = \frac{1}{5}\overrightarrow{O_1O_2}$: G est sur $[O_1O_2]$, au cinquième de sa longueur en partant de O_1, centre du carré le plus lourd.

5. 0,5 pts

On accole un troisième carré $\mathcal{C}_3$, de même matière, de sommets $(4,2)$, $(6,2)$, $(6,4)$ et $(4,4)$. On note O_3 son centre et G' le centre d'inertie de la nouvelle plaque. Donner les coordonnées de O_3 et la masse de $\mathcal{C}_3$, puis écrire G' comme barycentre de O_1, O_2 et O_3.

INDICE

Début : comme à la question 1, le centre est le milieu d'une diagonale. **Ensuite :** chaque centre reçoit la masse de son carré.

CORRIGÉ

Troisième carré. Le centre O_3 est le milieu du segment d'extrémités $(4,2)$ et $(6,4)$: $O_3(5,3)$. Le carré $\mathcal{C}_3$ a pour côté 2 cm, donc pour aire 4 cm² et pour masse $4\times 5 = 20$ g.

Barycentre. D'après l'énoncé, chaque centre reçoit la masse de son carré. La somme des poids vaut $80+20+20 = 120$, qui n'est pas nulle.

Conclusion. $O_3(5,3)$, la masse de $\mathcal{C}_3$ vaut 20 g, et $G' = \mathrm{Bar}\{(O_1,80);(O_2,20);(O_3,20)\}$.

6. 1 pts

On note K le milieu de $[O_2O_3]$. Écrire G' comme barycentre de O_1 et K avec des poids entiers, puis calculer ses coordonnées.

INDICE

Outil : l'associativité ; K reçoit la masse totale des deux petits carrés. **Ensuite :** simplifie les poids par homogénéité avant de calculer.

CORRIGÉ

Point K. Le milieu de $[O_2O_3]$ est l'isobarycentre de O_2 et O_3 : $K = \mathrm{Bar}\{(O_2, 20); (O_3, 20)\}$, avec $K(5, 2)$.

Associativité. La somme $20 + 20 = 40$ n'est pas nulle. Par associativité, $G' = \mathrm{Bar}\{(O_1, 80); (K, 40)\}$. En divisant les poids par 40, d'après l'homogénéité :

$$G' = \mathrm{Bar}\{(O_1, 2); (K, 1)\}.$$

Coordonnées. La somme des poids vaut 3. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_{G'} = \frac{2 \times 2 + 5}{3} = 3,$$
$$y_{G'} = \frac{2 \times 2 + 2}{3} = 2.$$

Conclusion. $G' = \mathrm{Bar}\{(O_1, 2); (K, 1)\}$ et $G'(3, 2)$.

7. 0,5 pts

Contrôler le résultat de la question 6 avec les coordonnées du barycentre des trois centres.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre de trois points, avec les masses 80, 20 et 20.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut 120. D'après les coordonnées du barycentre, avec $80 \times 2 = 160$, $20 \times 5 = 100$, $20 \times 1 = 20$ et $20 \times 3 = 60$:

$$x_{G'} = \frac{160 + 100 + 100}{120} = \frac{360}{120} = 3,$$
$$y_{G'} = \frac{160 + 20 + 60}{120} = \frac{240}{120} = 2.$$

Conclusion. On retrouve $G'(3, 2)$: le résultat de la question 6 est confirmé.

Exercice 2 5 pts

Trois droites concourantes, avec un poids négatif

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le triangle PQR avec $P(0,0)$, $Q(4,0)$ et $R(0,5)$. On définit les points :

- $U = \mathrm{Bar}\{(P,3);(Q,-1)\}$;
- $V = \mathrm{Bar}\{(Q,-1);(R,2)\}$;
- $W = \mathrm{Bar}\{(P,3);(R,2)\}$.

1. 0,75 pts

Justifier que U existe, exprimer $\overrightarrow{PU}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$ et calculer les coordonnées de U. Le point U appartient-il au segment $[PQ]$?

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, puis la position selon le signe des poids.

CORRIGÉ

Existence. $3 + (-1) = 2$, qui n'est pas nul : U existe.

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{PU} = \frac{-1}{2}\,\overrightarrow{PQ}.$$

Comme $\overrightarrow{PQ}(4,0)$, on obtient $\overrightarrow{PU}(-2,0)$; P étant l'origine, $U(-2,0)$.

Position. $3 \times (-1) = -3 < 0$: d'après la position du barycentre de deux points, U n'appartient pas au segment $[PQ]$.

Conclusion. $\overrightarrow{PU} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{PQ}$, $U(-2,0)$, et U n'est pas sur le segment $[PQ]$.

2. 0,75 pts

Même travail pour V : exprimer $\overrightarrow{QV}$ en fonction de $\overrightarrow{QR}$, calculer les coordonnées de V et le situer par rapport à $[QR]$.

INDICE

Outil : même méthode, en partant de Q.

CORRIGÉ

Existence. $-1+2=1$, qui n'est pas nul : V existe.

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QV} &= \frac{2}{1}\overrightarrow{QR}\\ &= 2\overrightarrow{QR}.\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{QR}(-4,5)$, on obtient $\overrightarrow{QV}(-8,10)$, donc $V(4-8,0+10)$, soit $V(-4,10)$.

Position. $(-1)\times 2=-2<0$: d'après la position du barycentre de deux points, V n'appartient pas au segment $[QR]$.

Conclusion. $\overrightarrow{QV}=2\overrightarrow{QR}$, $V(-4,10)$, et V n'est pas sur le segment $[QR]$.

3. 0,5 pts

Exprimer $\overrightarrow{PW}$ en fonction de $\overrightarrow{PR}$ et calculer les coordonnées de W.

INDICE

Outil : même formule ; ici les poids sont positifs.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut $3+2=5$, qui n'est pas nul. On applique l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{PW}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PR}.$$

Comme $\overrightarrow{PR}(0,5)$, on obtient $\overrightarrow{PW}(0,2)$.

Conclusion. $\overrightarrow{PW}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PR}$ et $W(0,2)$, point du segment $[PR]$.

4. 0,75 pts

On note $G = \mathrm{Bar}\{(P,3);(Q,-1);(R,2)\}$. Justifier que G existe et que $G = \mathrm{Bar}\{(U,2);(R,2)\}$. En déduire que G appartient à la droite (UR).

INDICE

Outil : l'associativité, puis la propriété des points d'une droite. **Début :** quel groupe de deux points a pour barycentre U ?

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $3-1+2=4$, qui n'est pas nul : G existe.

Associativité. Le groupe formé de P et Q a pour somme $3-1=2$, non nulle, et pour barycentre U. Par associativité, on le remplace par $(U,2)$:

$$G = \mathrm{Bar}\{(U,2);(R,2)\}.$$

Droite. Les points $U(-2,0)$ et $R(0,5)$ sont distincts. D'après la propriété des points d'une droite, G appartient à (UR).

Conclusion. G existe, $G = \mathrm{Bar}\{(U,2);(R,2)\}$, et G appartient à la droite (UR).

5. 0,75 pts

Justifier de même que G appartient à la droite (PV), puis à la droite (QW). Conclure.

INDICE

Début : quelle somme de poids pour chaque groupe ? **Point délicat :** Q garde son poids -1.

CORRIGÉ

Droite (PV). Le groupe formé de Q et R a pour somme $-1+2=1$, non nulle, et pour barycentre V. Par associativité :

$$G = \mathrm{Bar}\{(P,3);(V,1)\}.$$

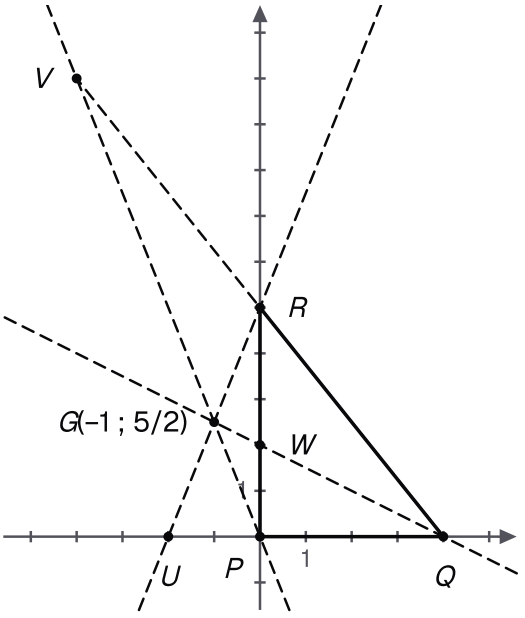
Comme $P \neq V$, d'après la propriété des points d'une droite, G appartient à (PV).

Droite (QW). Le groupe formé de P et R a pour somme $3+2=5$, non nulle, et pour barycentre W. Le point Q garde son poids -1. Par associativité :

$$G = \mathrm{Bar}\{(Q,-1);(W,5)\}.$$

Comme $Q \neq W$, d'après la propriété des points d'une droite, G appartient à (QW).

Conclusion. Les droites (UR), (PV) et (QW) passent toutes les trois par G : elles sont concourantes en G.



Les droites (UR), (PV) et (QW) se coupent en G, même avec un poids négatif.

6. 0,5 pts

Calculer les coordonnées de G.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre ; attention au poids négatif.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut 4. D'après les coordonnées du barycentre, en tenant compte du poids négatif de Q :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{3\times 0 - 1\times 4 + 2\times 0}{4} \\ &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3\times 0 - 1\times 0 + 2\times 5}{4} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $G\left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

7. 1 pts

Contrôler les résultats des questions 4 et 5 : vérifier que G est le milieu de $[UR]$, puis que $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PV}$ et $\overrightarrow{QG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{QW}$.

INDICE

Outil : les coordonnées des questions 1, 2, 3 et 6. **Début :** calcule le milieu de $[UR]$, puis les coordonnées des vecteurs.

CORRIGÉ

Milieu de $[UR]$**.** $\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+5}{2}\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$: c'est le point G.

Sur (PV)**.** $\overrightarrow{PV}(-4, 10)$, donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{PV}$ a pour coordonnées $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$. Comme P est l'origine, ce sont aussi celles de $\overrightarrow{PG}$.

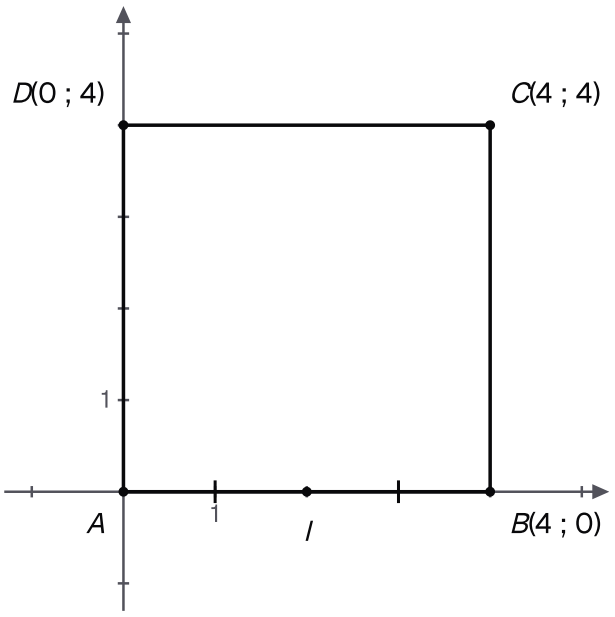
Sur (QW)**.** $\overrightarrow{QW}(-4, 2)$, donc $\frac{5}{4}\overrightarrow{QW}$ a pour coordonnées $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$. Or $\overrightarrow{QG}\left(-1-4, \frac{5}{2}-0\right) = \left(-5, \frac{5}{2}\right)$.

Conclusion. G est le milieu de $[UR]$, $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PV}$ et $\overrightarrow{QG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{QW}$: les résultats des questions 4 et 5 sont confirmés.

Exercice 3 — 5 pts

Un point défini à partir des sommets d'un carré

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. On le place dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm, où $B(4,0)$, $C(4,4)$ et $D(0,4)$. On note I le milieu de $[AB]$.



Le carré ABCD de côté 4 dans le repère d'origine A, et le milieu I de [AB].

1. — 1 pts

Pour tout point M, réduire $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$ à l'aide du barycentre $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$, puis calculer les coordonnées de G.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique, puis les coordonnées du barycentre. **Début :** vérifie la somme des poids.

CORRIGÉ

Réduction. La somme des poids vaut $1 + 1 + 2 = 4$, qui n'est pas nul. D'après la propriété caractéristique du barycentre, pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{MG}.$$

Coordonnées. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{0 + 4 + 2 \times 4}{4} = 3,$$

$$y_G = \frac{0 + 0 + 2 \times 4}{4} = 2.$$

Conclusion. Pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{MG}$, et $G(3,2)$.

2. 0,75 pts

Justifier que G est le milieu de $[IC]$ et contrôler avec les coordonnées.

INDICE

Outil : l'associativité, en regroupant A et B.

CORRIGÉ

Associativité. On a $I = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$, et le groupe formé de A et B a pour somme $1+1=2$, non nulle. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(C,2)\}$. Les poids sont égaux : G est l'isobarycentre de I et C.

Contrôle. $I(2,0)$ et $C(4,4)$; le milieu de $[IC]$ est $\left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (3,2)$, c'est-à-dire G.

Conclusion. G est le milieu de $[IC]$.

3. 1 pts

Le point E vérifie $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} - 2\overrightarrow{ED} = \vec{0}$. Justifier que E existe, puis l'écrire comme barycentre de G et D avec des poids entiers.

INDICE

Début : reconnais E comme barycentre de quatre points et vérifie la somme des poids. **Outil :** l'associativité, en regroupant A, B et C.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids $1+1+2-2=2$ n'est pas nulle. Par définition du barycentre, E est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,-2)$.

Associativité. Le groupe formé de A, B et C a pour somme des poids $1+1+2=4$, non nulle, et pour barycentre G. Par associativité, $E = \mathrm{Bar}\{(G,4);(D,-2)\}$.

Homogénéité. En divisant les poids par 2 :

$$E = \mathrm{Bar}\{(G,2);(D,-1)\}.$$

Conclusion. E existe et $E = \mathrm{Bar}\{(G,2);(D,-1)\}$.

4. 0,5 pts

En déduire que G est le milieu de $[DE]$.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, en partant de G.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut $2 + (-1) = 1$. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, en partant de G :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GE} &= \frac{-1}{1}\,\overrightarrow{GD} \\ &= -\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DG}.\end{aligned}$$

L'égalité $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GE}$ signifie que G est le milieu de $[DE]$.

Conclusion. Comme $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{DG}$, le point G est le milieu de $[DE]$.

5. 0,75 pts

En déduire les coordonnées de E.

INDICE

Outil : G est le milieu de $[DE]$, donc $x_E = 2x_G - x_D$ et de même pour l'ordonnée.

CORRIGÉ

Coordonnées de E. Comme G est le milieu de $[DE]$, $x_E = 2x_G - x_D$ et $y_E = 2y_G - y_D$. Ainsi $x_E = 2 \times 3 - 0 = 6$ et $y_E = 2 \times 2 - 4 = 0$.

Contrôle. D'après les coordonnées du barycentre des quatre points, de somme des poids 2 :

$$x_E = \frac{0 + 4 + 8 - 0}{2} = 6,$$
$$y_E = \frac{0 + 0 + 8 - 8}{2} = 0.$$

Conclusion. On a $x_E = 6$ et $y_E = 0$. Donc $E(6, 0)$.

6. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et écrire E comme barycentre de A et B avec des poids entiers. Que peut-on dire des points A, B et E ?

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{AE} = t\,\overrightarrow{AB}$, alors $E = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t);(B, t)\}$; puis la propriété des points d'une droite.

CORRIGÉ

Vecteur. $\overrightarrow{AE}(6, 0)$ et $\overrightarrow{AB}(4, 0)$, donc $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Barycentre. D'après la méthode pour exprimer un point comme barycentre, avec $t = \dfrac{3}{2}$ et $1 - t = -\dfrac{1}{2}$, puis en multipliant les poids par 2 (homogénéité) :

$$\begin{aligned} E = \mathrm{Bar}\Big\{ &\left(A, -\frac{1}{2}\right); \\ &\left(B, \frac{3}{2}\right) \Big\} \\ = \mathrm{Bar}&\{(A, -1);(B, 3)\}. \end{aligned}$$

Alignement. Comme $A \neq B$, d'après la propriété des points d'une droite, E appartient à (AB). Les poids -1 et 3 sont de signes contraires : d'après la position du barycentre de deux points, E n'est pas sur le segment $[AB]$.

Conclusion. $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $E = \mathrm{Bar}\{(A, -1);(B, 3)\}$: les points A, B et E sont alignés, et E est sur la droite (AB) au-delà de B.

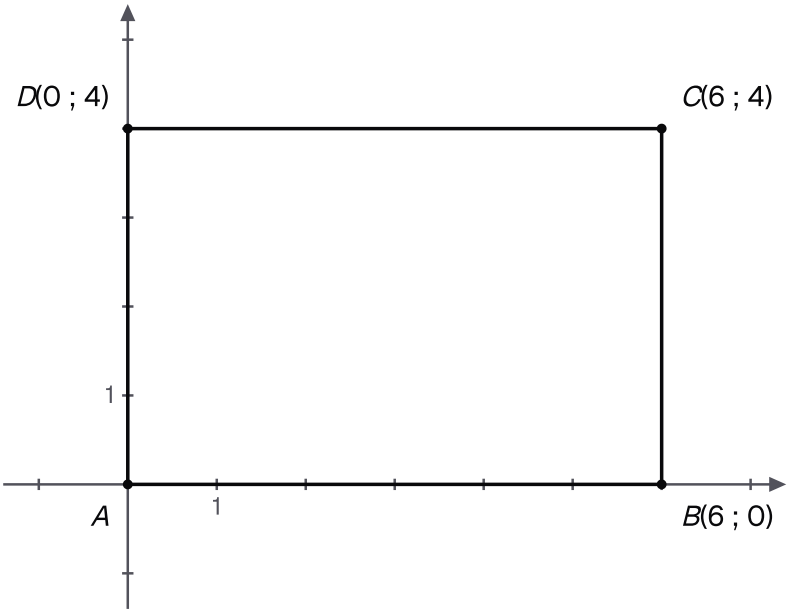
Exercice 4 5 pts

Quatre masses aux sommets d'un rectangle

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 dm. Quatre petits objets, assimilés à des points, sont posés sur une table aux sommets du rectangle $ABCD$, avec $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ et $D(0,4)$:

- 100 g en A et 200 g en B ;
- 600 g en C et 300 g en D.

On admet que le centre d'inertie G du système est le barycentre des quatre points affectés de leurs masses.



Le rectangle ABCD de la table, dans le repère d'origine A ; une unité représente 1 dm.

1. 1 pts

Justifier que $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2);(C,6);(D,3)\}$, puis calculer les coordonnées de G.

INDICE

Outil : l'homogénéité, en divisant les quatre masses par 100. **Ensuite :** les coordonnées du barycentre ; on divise par la somme des poids.

CORRIGÉ

Homogénéité. D'après l'énoncé, G est le barycentre des quatre sommets affectés des poids 100, 200, 600 et 300, de somme 1200, non nulle. On multiplie ces poids par $\dfrac{1}{100}$, réel non nul ; d'après l'homogénéité :

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2);\\ (C,6);(D,3)\}.$$

Coordonnées. La somme des poids vaut 12. D'après les coordonnées du barycentre, avec $2\times 6 = 12$, $6\times 6 = 36$, $6\times 4 = 24$ et $3\times 4 = 12$:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{0+12+36+0}{12} \\ &= \frac{48}{12} = 4, \\ y_G &= \frac{0+0+24+12}{12} \\ &= \frac{36}{12} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. On a $x_G = 4$ et $y_G = 3$. Donc $G(4,3)$.

2. 0,75 pts

On note $K = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2)\}$ et $L = \mathrm{Bar}\{(D,3);(C,6)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DL}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$, puis calculer les coordonnées de K et de L et les situer par rapport aux segments $[AB]$ et $[DC]$.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points. **Point délicat :** pour L, on part de D, de poids 3.

CORRIGÉ

Point K. La somme $1+2=3$ n'est pas nulle. On applique l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}.$$

Comme $\overrightarrow{AB}(6,0)$ et que A est l'origine, on obtient $\overrightarrow{AK}(4,0)$, donc $K(4,0)$.

Point L. La somme $3+6=9$ n'est pas nulle. Avec la même propriété, en partant de D :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DL} &= \frac{6}{9}\,\overrightarrow{DC}\\ &= \frac{2}{3}\,\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{DC}(6,0)$, on obtient $\overrightarrow{DL}(4,0)$, donc $L(4,4)$.

Position. Dans les deux cas, les poids sont positifs. D'après la position du barycentre de deux points, K appartient au segment $[AB]$ et L au segment $[DC]$.

Conclusion. $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{DC}$; $K(4,0)$ est sur $[AB]$ et $L(4,4)$ sur $[DC]$.

3. 0,75 pts

Écrire G comme barycentre de K et L avec des poids entiers. En déduire que G appartient à la droite (KL), puis exprimer $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

INDICE

Outil : l'associativité, en regroupant A avec B, puis C avec D. **Ensuite :** l'homogénéité et la propriété des points d'une droite.

CORRIGÉ

Associativité. Le groupe formé de A et B a pour somme $1+2=3$ et pour barycentre K ; celui formé de C et D a pour somme $6+3=9$ et pour barycentre L. Ces sommes ne sont pas nulles. Par associativité, $G=\mathrm{Bar}\{(K,3);(L,9)\}$, puis, en divisant les poids par 3 (homogénéité) :

$$G=\mathrm{Bar}\{(K,1);(L,3)\}.$$

Droite. Les points $K(4,0)$ et $L(4,4)$ sont distincts. D'après la propriété des points d'une droite, G appartient à (KL).

Vecteur. La somme des poids vaut 4. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{KG}=\frac{3}{4}\,\overrightarrow{KL}.$$

Contrôle. $\overrightarrow{KL}(0,4)$, donc $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $(0,3)$; on retrouve $G(4,0+3)=(4,3)$.

Conclusion. $G=\mathrm{Bar}\{(K,1);(L,3)\}$, G appartient à (KL) et $\overrightarrow{KG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{KL}$.

4. 0,75 pts

On note $I = \mathrm{Bar}\{(A,1);(D,3)\}$ et $J = \mathrm{Bar}\{(B,2);(C,6)\}$. Calculer les coordonnées de I et de J, puis justifier que G appartient à la droite (IJ).

INDICE

Début : même méthode qu'aux questions 2 et 3, avec un autre regroupement des quatre points : A avec D, puis B avec C.

CORRIGÉ

Point I. La somme $1+3=4$ n'est pas nulle ; l'existence et l'unicité du barycentre de deux points donne $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{AD}(0,4)$, on obtient $\overrightarrow{AI}(0,3)$, donc $I(0,3)$.

Point J. La somme $2+6=8$ n'est pas nulle. De même, $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{6}{8}\overrightarrow{BC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Comme $\overrightarrow{BC}(0,4)$, on obtient $\overrightarrow{BJ}(0,3)$, donc $J(6,3)$.

Associativité. Les groupes formés de A et D, puis de B et C, ont pour sommes 4 et 8, non nulles, et pour barycentres I et J. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(I,4);(J,8)\}$, puis, en divisant par 4 (homogénéité) :

$$G = \mathrm{Bar}\{(I,1);(J,2)\}.$$

Droite. Comme $I \neq J$, d'après la propriété des points d'une droite, G appartient à (IJ).

Conclusion. $I(0,3)$, $J(6,3)$, et G appartient à la droite (IJ).

5. `0,5 pts`

En déduire que G est le point d'intersection des droites (KL) et (IJ).

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires, les droites (KL) et (IJ) ne sont pas parallèles et se coupent en un seul point. **Ensuite :** les questions 3 et 4.

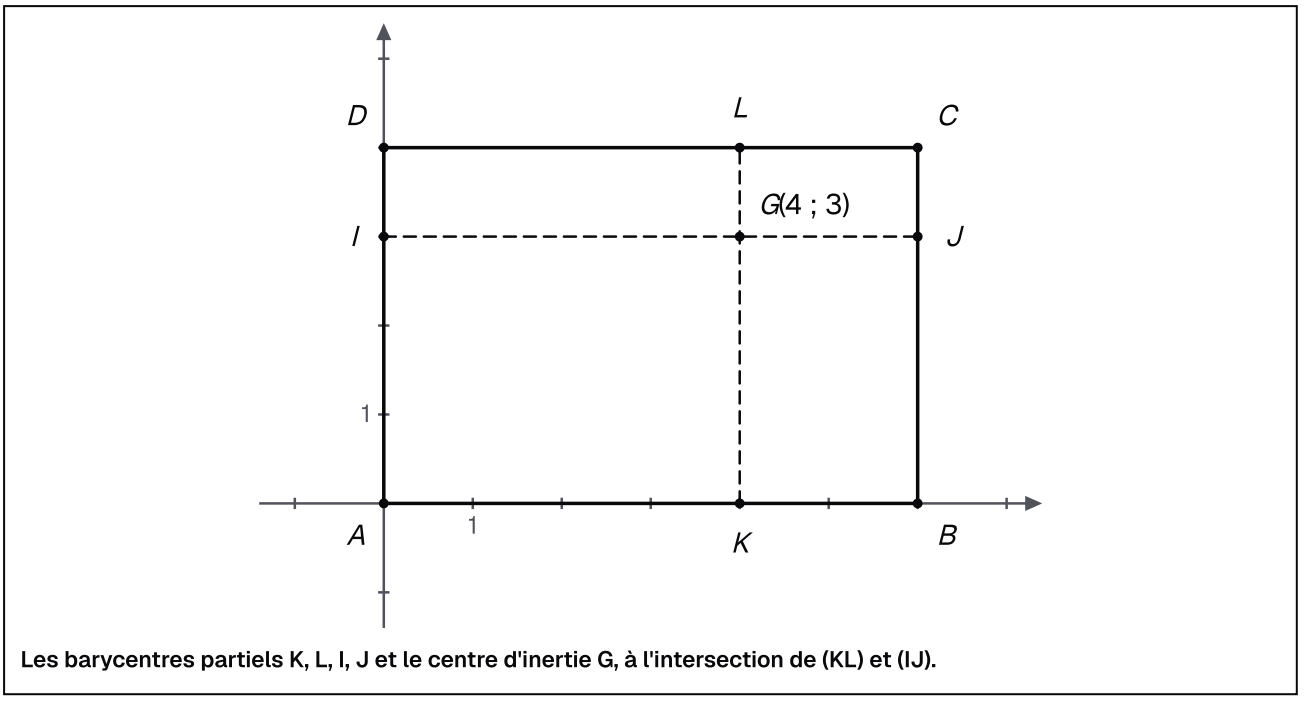
CORRIGÉ

Droites sécantes. $\overrightarrow{KL}(0,4)$ et $\overrightarrow{IJ}(6,0)$. S'il existait un réel t tel que $\overrightarrow{IJ} = t\,\overrightarrow{KL}$, on aurait $6 = t \times 0 = 0$, ce qui est faux. Ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires : les droites (KL) et (IJ) ne sont pas parallèles et se coupent en un seul point.

Point commun. D'après les questions 3 et 4, G appartient à la fois à (KL) et à (IJ).

Contrôle. (KL) est la droite des points d'abscisse 4 et (IJ) celle des points d'ordonnée 3 : leur point commun est $(4,3)$, c'est-à-dire G.

Conclusion. G est le point d'intersection des droites (KL) et (IJ).



Les barycentres partiels K, L, I, J et le centre d'inertie G, à l'intersection de (KL) et (IJ).

6. 1,25 pts

On remplace l'objet de 300 g placé en D par un objet de masse m grammes, avec $m > 0$; les trois autres objets ne changent pas. On note G' le nouveau centre d'inertie. Calculer les coordonnées de G' en fonction de m, puis déterminer m pour que G' appartienne à la droite (AC).

INDICE

Début : $G' = \mathrm{Bar}\{(A,100);(B,200);(C,600);(D,m)\}$, de somme des poids $900+m$. **Ensuite :** G' appartient à (AC) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AG'} = t\,\overrightarrow{AC}$, avec $\overrightarrow{AC}(6,4)$.

CORRIGÉ

Coordonnées. On a $G' = \mathrm{Bar}\{(A,100);(B,200);(C,600);(D,m)\}$. La somme des poids vaut $900+m$, qui n'est pas nulle car $m > 0$. D'après les coordonnées du barycentre, avec $A(0,0)$:

$$\begin{aligned} x_{G'} &= \frac{200\times 6 + 600\times 6}{900+m} \\ &= \frac{4800}{900+m}, \\ y_{G'} &= \frac{600\times 4 + 4m}{900+m} \\ &= \frac{2400+4m}{900+m}. \end{aligned}$$

Condition d'alignement. Comme A est l'origine, $\overrightarrow{AG'}$ a pour coordonnées $(x_{G'}, y_{G'})$, et $\overrightarrow{AC}(6,4)$. Le point G' appartient à (AC) si et seulement s'il existe un réel t tel que $x_{G'} = 6t$ et $y_{G'} = 4t$. En éliminant t, cette condition équivaut à :

$$6\,y_{G'} = 4\,x_{G'}.$$

Équation. En multipliant par $900+m$, non nul :

$$\begin{aligned} 6(2400+4m) &= 4\times 4800 \\ 14400 + 24m &= 19200 \\ 24m &= 4800 \\ m &= 200. \end{aligned}$$

Donc $m = 200$ g.

Contrôle. Avec $m = 200$: $x_{G'} = \dfrac{4800}{1100} = \dfrac{48}{11}$ et $y_{G'} = \dfrac{3200}{1100} = \dfrac{32}{11}$. On a bien $6\times\dfrac{32}{11} - 4\times\dfrac{48}{11} = \dfrac{192-192}{11} = 0$.

Conclusion. $x_{G'} = \dfrac{4800}{900+m}$, $y_{G'} = \dfrac{2400+4m}{900+m}$, et G' appartient à (AC) pour $m = 200$ g.

Exercice 5 5 pts

Trois points alignés, grâce à la propriété caractéristique

ABC est un triangle. On définit les points :

- $P = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$;
- $Q = \mathrm{Bar}\{(A,-1);(C,3)\}$;
- $R = \mathrm{Bar}\{(B,3);(C,3)\}$.

Les questions 1 à 4 se traitent sans repère.

1. 1 pts

Justifier que P, Q et R existent. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, puis situer Q par rapport au segment $[AC]$. Que représente R pour le segment $[BC]$?

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, puis la position selon le signe des poids.
Pour R : compare les deux poids.

CORRIGÉ

Existence. Les sommes des poids valent $1+3=4$, $-1+3=2$ et $3+3=6$: aucune n'est nulle, donc P, Q et R existent.

Vecteurs. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Position de Q. $(-1)\times 3 = -3 < 0$: d'après la position du barycentre de deux points, Q n'appartient pas au segment $[AC]$.

Point R. Les poids de B et de C sont égaux : R est l'isobarycentre de B et C.

Conclusion. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, Q est hors du segment $[AC]$, et R est le milieu de $[BC]$.

2. 0,75 pts

Pour tout point M, réduire $\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}$, puis $-\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MC}$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique, appliquée à P, puis à Q. **Début :** la somme des poids donne le coefficient du vecteur obtenu.

CORRIGÉ

Première somme. $P = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$, de somme des poids 4, non nulle. D'après la propriété caractéristique du barycentre, pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} = 4\,\overrightarrow{MP}.$$

Seconde somme. $Q = \mathrm{Bar}\{(A,-1);(C,3)\}$, de somme des poids 2, non nulle. De même, pour tout point M :

$$-\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{MQ}.$$

Conclusion. Pour tout point M, la première somme vaut $4\,\overrightarrow{MP}$ et la seconde $2\,\overrightarrow{MQ}$.

3. 1 pts

On choisit $M = R$ dans les deux égalités de la question 2 et on les additionne membre à membre. En déduire que $4\,\overrightarrow{RP} + 2\,\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$.

INDICE

Début : en additionnant, les vecteurs $\overrightarrow{RA}$ et $-\overrightarrow{RA}$ s'éliminent. **Ensuite :** utilise la définition de R.

CORRIGÉ

Choix de M. Les égalités de la question 2 valent pour tout point M ; pour $M = R$:

$$\overrightarrow{RA} + 3\,\overrightarrow{RB} = 4\,\overrightarrow{RP},$$
$$-\overrightarrow{RA} + 3\,\overrightarrow{RC} = 2\,\overrightarrow{RQ}.$$

Addition. En additionnant membre à membre, $\overrightarrow{RA}$ et $-\overrightarrow{RA}$ s'éliminent :

$$3\,\overrightarrow{RB} + 3\,\overrightarrow{RC} = 4\,\overrightarrow{RP} + 2\,\overrightarrow{RQ}.$$

Définition de R. Comme $R = \mathrm{Bar}\{(B,3);(C,3)\}$, on a $3\,\overrightarrow{RB} + 3\,\overrightarrow{RC} = \vec{0}$.

Conclusion. Donc $4\,\overrightarrow{RP} + 2\,\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$.

4. 1 pts

En déduire que $R = \mathrm{Bar}\{(P,2);(Q,1)\}$, puis que les points P, Q et R sont alignés. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$.

INDICE

Outil : la définition du barycentre de deux points, puis l'homogénéité et la propriété des points d'une droite. **Point délicat :** vérifie que $P \neq Q$.

CORRIGÉ

Barycentre. La somme $4+2=6$ n'est pas nulle et $4\,\overrightarrow{RP}+2\,\overrightarrow{RQ}=\vec{0}$. Par définition du barycentre, $R=\mathrm{Bar}\{(P,4);(Q,2)\}$, puis, en divisant les poids par 2 (homogénéité) :

$$R=\mathrm{Bar}\{(P,2);(Q,1)\}.$$

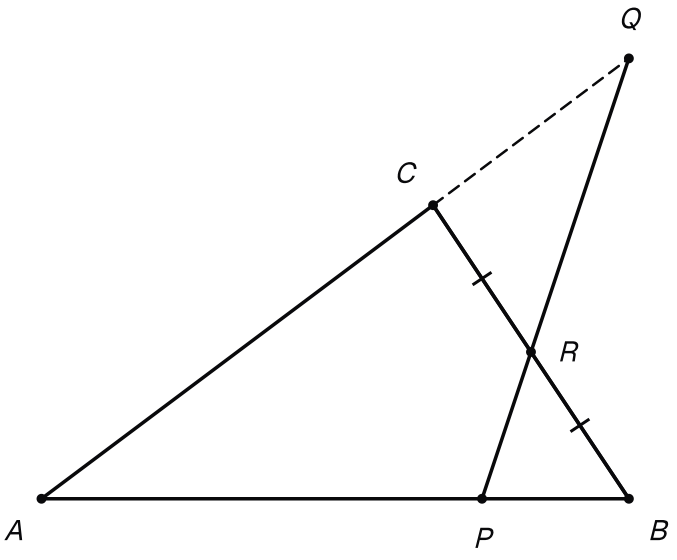
Points distincts. Le point P est sur (AB) et Q sur (AC) ; ces deux droites n'ont que le point A en commun. Or $P\neq A$ et $Q\neq A$, car les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ de la question 1 ne sont pas nuls. Donc $P\neq Q$.

Alignement. D'après la propriété des points d'une droite, R appartient à (PQ) : les points P, Q et R sont alignés.

Vecteur. La somme des poids vaut 3. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{PR}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{PQ}.$$

Conclusion. $R=\mathrm{Bar}\{(P,2);(Q,1)\}$, les points P, Q et R sont alignés, et $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{PQ}$: R est sur $[PQ]$, au tiers de sa longueur en partant de P.



P sur [AB], Q au-delà de C sur (AC), R milieu de [BC] : les trois points sont sur une même droite.

5. 0,75 pts

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1,1)$, $B(5,1)$ et $C(5,3)$. Calculer les coordonnées de P, de Q et de R.

INDICE

Outil : les vecteurs de la question 1, ou les coordonnées du barycentre. **Point délicat :** le poids -1 de A dans le calcul de Q.

CORRIGÉ

Point P. $\overrightarrow{AB}(4,0)$ et $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AP}(3,0)$: $x_P = 1+3 = 4$ et $y_P = 1+0 = 1$, donc $P(4,1)$.

Point Q. La somme des poids vaut 2. D'après les coordonnées du barycentre, avec le poids -1 pour A :

$$x_Q = \frac{-1\times 1 + 3\times 5}{2} = 7,$$
$$y_Q = \frac{-1\times 1 + 3\times 3}{2} = 4.$$

Point R. C'est le milieu de $[BC]$: $R\left(\dfrac{5+5}{2}, \dfrac{1+3}{2}\right) = (5,2)$.

Conclusion. $P(4,1)$, $Q(7,4)$ et $R(5,2)$.

6. 0,5 pts

Contrôler les résultats des questions 3 et 4 à l'aide des coordonnées.

INDICE

Outil : les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$, puis celles de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$.

CORRIGÉ

Question 4. $\overrightarrow{PR}(5-4, 2-1) = (1,1)$ et $\overrightarrow{PQ}(7-4, 4-1) = (3,3)$. Ainsi $\overrightarrow{PQ} = 3\,\overrightarrow{PR}$, soit $\overrightarrow{PR} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$: les vecteurs sont colinéaires, donc P, Q et R sont alignés.

Question 3. $\overrightarrow{RP}(-1,-1)$ et $\overrightarrow{RQ}(2,2)$. Le vecteur $4\,\overrightarrow{RP} + 2\,\overrightarrow{RQ}$ a pour coordonnées $(-4+4, -4+4) = (0,0)$: c'est le vecteur nul.

Conclusion. Les coordonnées confirment $\overrightarrow{PR} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ et $4\,\overrightarrow{RP} + 2\,\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$.