BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

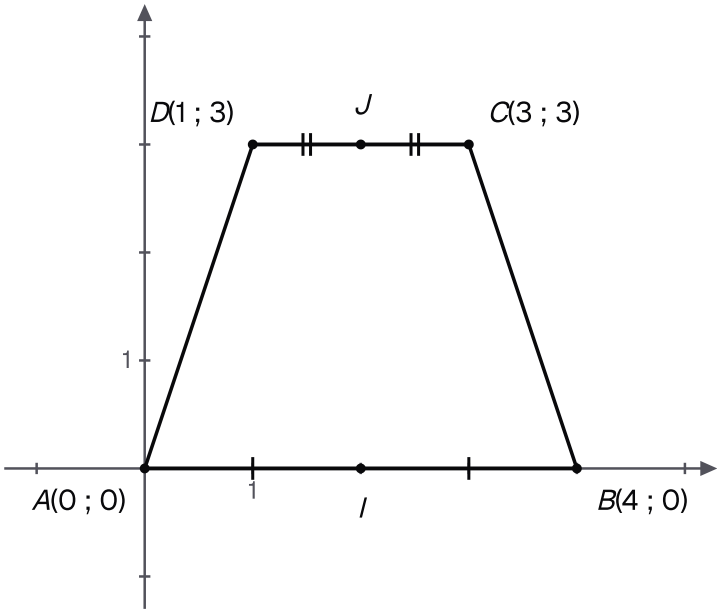
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Le barycentre des sommets d'un trapèze

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le trapèze $ABCD$ de sommets $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(3,3)$ et $D(1,3)$: ses côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,2);(D,2)\}$.



Le trapèze ABCD de l'énoncé avec les milieux I et J de ses bases ; G n'est pas placé.

1.

Justifier que G existe. Écrire I comme barycentre de A et B, puis J comme barycentre de C et D, avec les poids de l'énoncé.

INDICE

Outil : le milieu d'un segment est l'isobarycentre de ses extrémités, quels que soient les poids égaux choisis.

2.

En déduire que $G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(J,4)\}$, puis exprimer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Outil : l'associativité ; chaque barycentre partiel reçoit la somme des poids de son groupe.

3.

Calculer les coordonnées de I, J, puis de G de deux façons.

INDICE

Outil : d'une part la question 2, d'autre part les coordonnées du barycentre des quatre points.

Exercice 2

Des coordonnées à l'alignement

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(-1, 2)$, $B(5, -1)$ et $C(3, 4)$. On note $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$.

1.

Calculer les coordonnées de G, puis celles de H.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre ; vérifie d'abord chaque somme de poids.

2.

Démontrer que les points G, H et C sont alignés à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$.

INDICE

Outil : deux vecteurs colinéaires de même origine donnent trois points alignés.

3.

Retrouver cet alignement sans coordonnées, par associativité. Préciser la position de H sur le segment $[GC]$.

INDICE

Outil : l'associativité, avec G comme barycentre partiel de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

Exercice 3

Un point écrit avec trois poids

XYZ est un triangle. Le point M est défini par $\overrightarrow{XM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{XY} + \frac{1}{5}\overrightarrow{XZ}$.

1.

Écrire M comme barycentre de X, Y et Z avec des poids entiers.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{XM} = x\,\overrightarrow{XY} + y\,\overrightarrow{XZ}$, quels poids donner à Y et à Z ? Quel poids pour X, pour que la somme vaille 1 ? Pense ensuite à l'homogénéité.

2.

On note $P = \mathrm{Bar}\{(X,5);(Y,3)\}$. Placer P, puis démontrer que P, M et Z sont alignés et préciser $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{PZ}$.

INDICE

Outil : l'associativité ; le barycentre partiel P reçoit le poids $5+3$.

3.

Dans un repère, on prend $X(0,0)$, $Y(10,0)$ et $Z(0,10)$. Calculer les coordonnées de M et de P, et vérifier le résultat de la question 2.

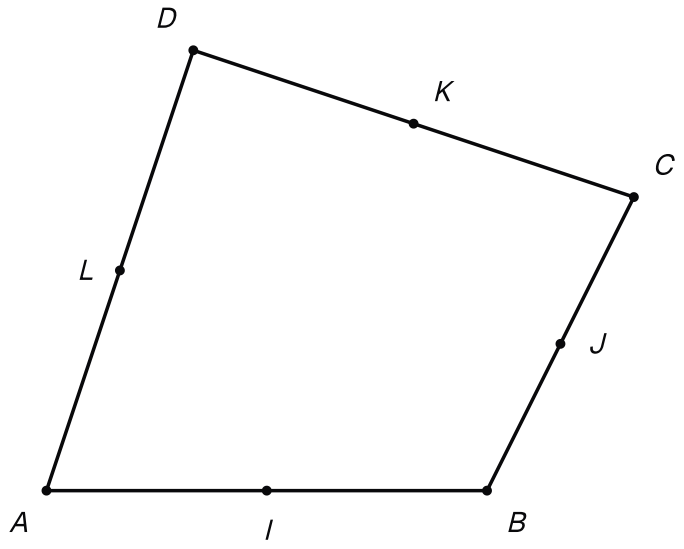
INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, ou directement l'égalité qui définit M.

Exercice 4

Les milieux des côtés d'un quadrilatère

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. On note I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, et G l'isobarycentre de A, B, C et D.



Un quadrilatère ABCD et les milieux I, J, K, L de ses quatre côtés.

1.

Écrire G comme barycentre de I et K, et en déduire la position de G sur le segment $[IK]$.

INDICE

Outil : l'associativité, en regroupant A avec B, puis C avec D ; chaque milieu reçoit le poids 2.

2.

Par un autre regroupement, écrire G comme barycentre de J et L.

INDICE

Outil : regroupe cette fois B avec C, puis D avec A.

3.

Que peut-on en déduire pour les segments $[IK]$ et $[JL]$? Contrôler avec $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(8,4)$ et $D(2,6)$ dans un repère.

INDICE

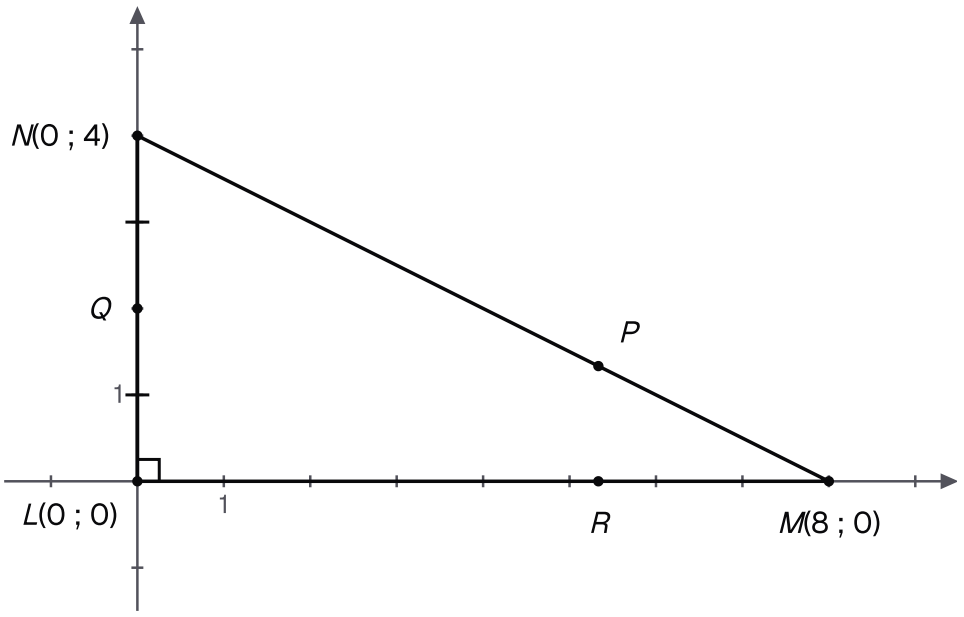
Outil : les questions 1 et 2 ; puis la formule des coordonnées d'un milieu.

Exercice 5

Trois droites concourantes dans un triangle rectangle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le triangle LMN, rectangle en L, avec $L(0,0)$, $M(8,0)$ et $N(0,4)$. On définit :

- le point P de $[MN]$ tel que $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$;
- le milieu Q de $[LN]$;
- le point R de $[LM]$ tel que $\overrightarrow{LR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LM}$.



Le triangle LMN, rectangle en L, et les trois points P, Q, R définis sur ses côtés.

1.

Écrire P, Q et R comme barycentres de deux sommets du triangle, avec les poids entiers les plus simples.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{UV} = t\overrightarrow{UW}$, alors $V = \mathrm{Bar}\{(U, 1-t); (W, t)\}$. Simplifie ensuite par homogénéité.

2.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(L,1); (M,2); (N,1)\}$. Démontrer que les droites (LP), (MQ) et (NR) sont concourantes en G.

INDICE

Outil : l'associativité, appliquée trois fois. Dans chaque regroupement, le barycentre partiel est l'un des points P, Q ou R.

3.

Calculer les coordonnées de G, P, Q et R, puis vérifier que G est le milieu de $[MQ]$ et que $\overrightarrow{LG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{LP}$.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre.

Exercice 6

Le centre d'inertie d'une molécule

Dans un modèle simplifié d'une molécule, un atome lourd O de masse 16 est lié à deux atomes légers H et H' de masse 1 chacun (masses en unités de masse atomique). Dans un repère du plan de la molécule, on a $O(0,0)$, $H(4,3)$ et $H'(-4,3)$; l'unité de longueur est arbitraire. Le centre d'inertie de la molécule est le barycentre G des trois atomes affectés de leurs masses.

1.

Calculer les coordonnées de G.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, avec les poids 16, 1 et 1.

2.

On note K le milieu de $[HH']$. Retrouver G par associativité, en exprimant $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

INDICE

Outil : l'associativité ; K reçoit la somme des masses des deux atomes légers. Pense ensuite à l'homogénéité.

3.

Situer G sur le segment $[OK]$ et interpréter.

INDICE

Outil : la position du barycentre de deux points de poids positifs.

Exercice 7

Deux sommes de vecteurs à comparer

A, B et C sont trois points non alignés, et I est le milieu de $[BC]$. Pour tout point M, on pose

$$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

et

$$\vec{v} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

1.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. Réduire $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis justifier que G est le milieu de $[AI]$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique, pour trois points puis pour deux points ; ensuite l'associativité.

2.

Justifier que $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $M = \mathrm{Bar}\{(G,2);(I,-1)\}$.

INDICE

Outil : écris $\vec{u} - \vec{v}$ à l'aide de la question 1, puis reconnais la définition d'un barycentre de G et I.

3.

Quelle est la position de M par rapport à G et I ? En déduire le point M à l'aide de la question 1.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points donne $\overrightarrow{GM}$ en fonction de $\overrightarrow{GI}$.

4.

Vérifier ce résultat en calculant directement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour $M = A$.

INDICE

Outil : le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul.