BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

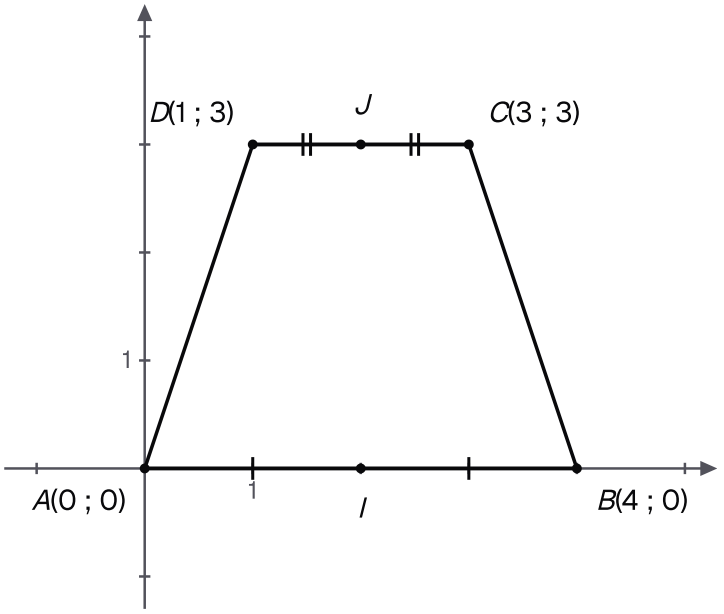
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Le barycentre des sommets d'un trapèze

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le trapèze $ABCD$ de sommets $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(3,3)$ et $D(1,3)$: ses côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,2);(D,2)\}$.



Le trapèze ABCD de l'énoncé avec les milieux I et J de ses bases ; G n'est pas placé.

1.

Justifier que G existe. Écrire I comme barycentre de A et B, puis J comme barycentre de C et D, avec les poids de l'énoncé.

INDICE

Outil : le milieu d'un segment est l'isobarycentre de ses extrémités, quels que soient les poids égaux choisis.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $1+1+2+2=6$, qui n'est pas nul : G existe.

Point I. Le milieu de $[AB]$ est l'isobarycentre de A et B. Avec les poids de l'énoncé, $I = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$.

Point J. Le milieu de $[CD]$ est l'isobarycentre de C et D. D'après l'homogénéité, deux poids égaux non nuls quelconques conviennent, donc $J = \mathrm{Bar}\{(C,2);(D,2)\}$.

Conclusion. G existe, $I = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$ et $J = \mathrm{Bar}\{(C,2);(D,2)\}$.

2.

En déduire que $G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(J,4)\}$, puis exprimer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Outil : l'associativité ; chaque barycentre partiel reçoit la somme des poids de son groupe.

CORRIGÉ

Associativité. Le groupe formé de A et B a pour somme des poids $1+1=2$, et celui formé de C et D a pour somme $2+2=4$: aucune n'est nulle. Par associativité, on remplace chaque groupe par son barycentre affecté de cette somme :

$$G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(J,4)\}.$$

Vecteur. La somme des poids vaut 6. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \frac{4}{6}\overrightarrow{IJ}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(J,4)\}$ et $\overrightarrow{IG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

3.

Calculer les coordonnées de I, J, puis de G de deux façons.

INDICE

Outil : d'une part la question 2, d'autre part les coordonnées du barycentre des quatre points.

CORRIGÉ

Milieux. $I(2,0)$ et $J(2,3)$, donc $\overrightarrow{IJ}(0,3)$.

Par la question 2. Le vecteur $\overrightarrow{IG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(0,2)$. Donc $x_G = 2+0 = 2$ et $y_G = 0+2 = 2$.

Par les coordonnées du barycentre. La somme des poids vaut 6 :

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{0+4+2\times 3+2\times 1}{6}\\ &= \frac{12}{6} = 2,\\ y_G &= \frac{0+0+2\times 3+2\times 3}{6}\\ &= \frac{12}{6} = 2.\end{aligned}$$

Conclusion. $I(2,0)$ et $J(2,3)$; les deux méthodes donnent le même point. On retrouve $G(2,2)$.

Exercice 2

Des coordonnées à l'alignement

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(-1, 2)$, $B(5, -1)$ et $C(3, 4)$. On note $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$.

1.

Calculer les coordonnées de G, puis celles de H.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre ; vérifie d'abord chaque somme de poids.

CORRIGÉ

Point G. La somme des poids vaut $1 + 2 = 3$, qui n'est pas nul. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{-1 + 2 \times 5}{3} = 3,$$
$$y_G = \frac{2 + 2 \times (-1)}{3} = 0.$$

Point H. La somme des poids vaut $1 + 2 + 3 = 6$, qui n'est pas nul. De même, avec $2 \times 5 = 10$ et $3 \times 3 = 9$ pour l'abscisse :

$$x_H = \frac{-1 + 10 + 9}{6} = 3,$$
$$y_H = \frac{2 - 2 + 12}{6} = 2.$$

Conclusion. $G(3, 0)$ et $H(3, 2)$.

2.

Démontrer que les points G, H et C sont alignés à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$.

INDICE

Outil : deux vecteurs colinéaires de même origine donnent trois points alignés.

CORRIGÉ

Vecteurs. Avec $G(3, 0)$, $H(3, 2)$ et $C(3, 4)$: $\overrightarrow{GH}(0, 2)$ et $\overrightarrow{GC}(0, 4)$.

Colinéarité. Chaque coordonnée de $\overrightarrow{GC}$ est le double de celle de $\overrightarrow{GH}$:

$$\overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{GH}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont colinéaires et ont la même origine G.

Conclusion. Les points G, H et C sont alignés.

3.

Retrouver cet alignement sans coordonnées, par associativité. Préciser la position de H sur le segment $[GC]$.

INDICE

Outil : l'associativité, avec G comme barycentre partiel de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

CORRIGÉ

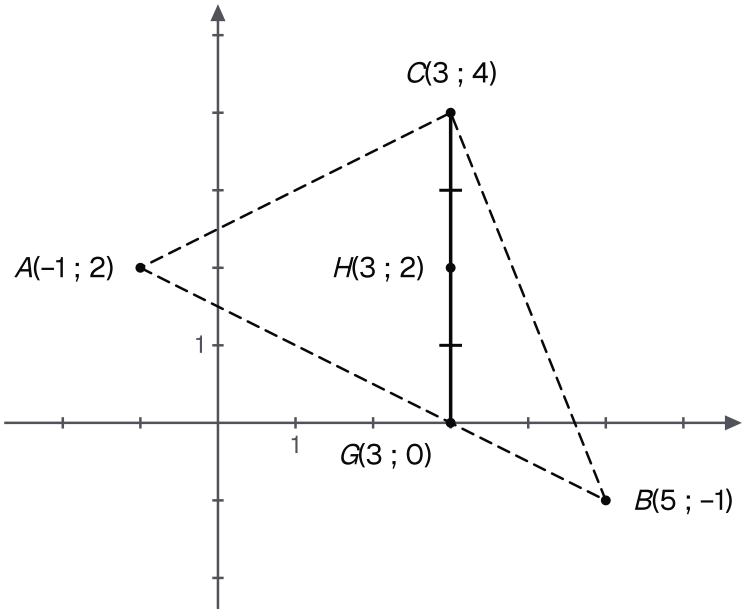
Associativité. La somme totale $1 + 2 + 3 = 6$ n'est pas nulle, ni celle du groupe formé de A et B, qui vaut $1 + 2 = 3$; ce groupe a pour barycentre G. Par associativité :

$$H = \mathrm{Bar}\{(G, 3); (C, 3)\}.$$

Alignement. Les points G et C sont distincts. D'après la propriété des points d'une droite, H appartient à la droite (GC).

Position. Les poids de G et de C sont égaux : H est le milieu de $[GC]$. Contrôle : ce milieu a pour coordonnées $\left(3, \dfrac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$, celles de H.

Conclusion. Par associativité, H est un barycentre de G et C, donc G, H et C sont alignés ; H est le milieu du segment $[GC]$.



G sur [AB], puis H milieu de [GC] : les points G, H et C sont alignés.

Exercice 3

Un point écrit avec trois poids

XYZ est un triangle. Le point M est défini par $\overrightarrow{XM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{XY} + \frac{1}{5}\overrightarrow{XZ}$.

1.

Écrire M comme barycentre de X, Y et Z avec des poids entiers.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{XM} = x\,\overrightarrow{XY} + y\,\overrightarrow{XZ}$, quels poids donner à Y et à Z ? Quel poids pour X, pour que la somme vaille 1 ? Pense ensuite à l'homogénéité.

CORRIGÉ

Poids de somme 1. D'après la méthode pour exprimer un point comme barycentre, on donne à Y et à Z les coefficients de l'énoncé, $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{5}$, et à X le poids qui complète la somme à 1 :

$$1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.$$

Poids entiers. On multiplie les trois poids par 10, réel non nul : on obtient 5, 3 et 2. On note $M' = \mathrm{Bar}\{(X,5);(Y,3);(Z,2)\}$ et l'on vérifie que $M' = M$.

Justification. La somme des poids vaut 10, qui n'est pas nul. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XM'} &= \frac{1}{10}\left(3\,\overrightarrow{XY} + 2\,\overrightarrow{XZ}\right)\\ &= \frac{3}{10}\overrightarrow{XY} + \frac{1}{5}\overrightarrow{XZ}\\ &= \overrightarrow{XM}.\end{aligned}$$

Donc $M' = M$.

Conclusion. $M = \mathrm{Bar}\{(X,5);(Y,3);(Z,2)\}$.

2.

On note $P = \mathrm{Bar}\{(X,5);(Y,3)\}$. Placer P, puis démontrer que P, M et Z sont alignés et préciser $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{PZ}$.

INDICE

Outil : l'associativité ; le barycentre partiel P reçoit le poids $5+3$.

CORRIGÉ

Placement de P. La somme $5+3=8$ n'est pas nulle. On applique l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

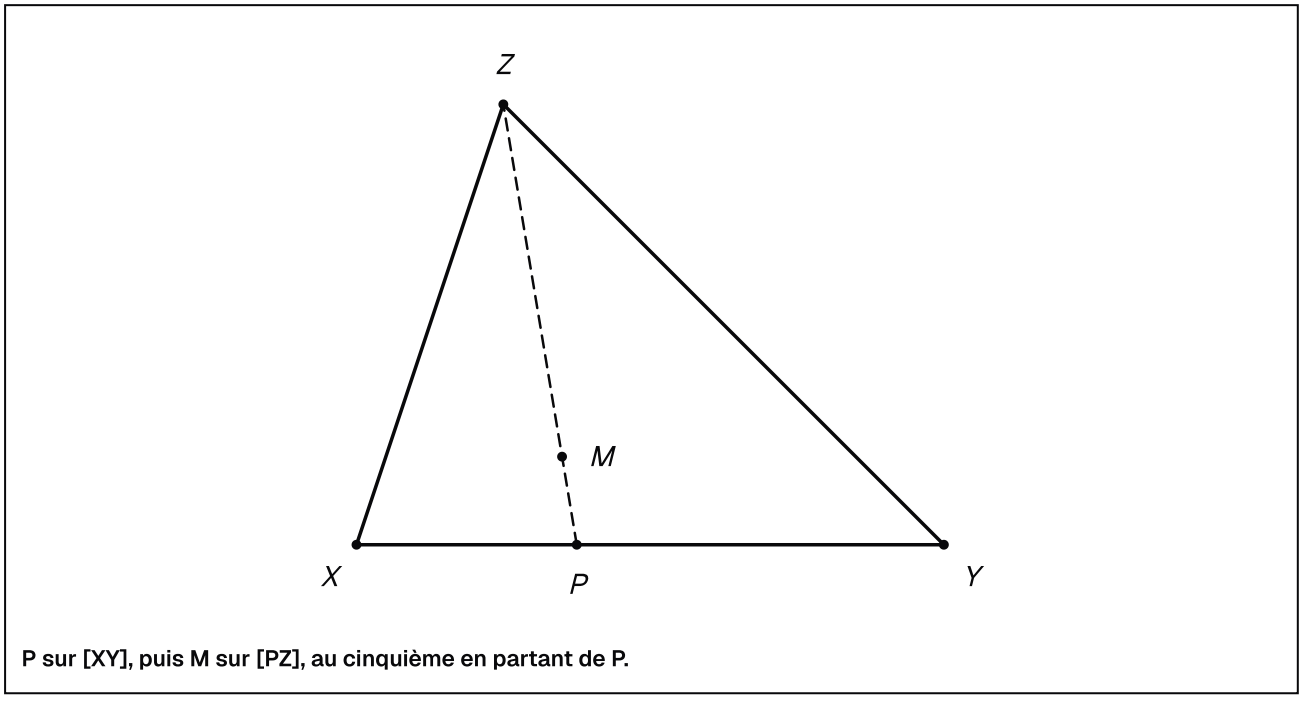
$$\overrightarrow{XP} = \frac{3}{8}\,\overrightarrow{XY}.$$

Ce coefficient est compris entre 0 et 1 : P est sur $[XY]$, aux trois huitièmes de $[XY]$ en partant de X.

Alignement. Par associativité, on remplace $(X,5)$ et $(Y,3)$ par $(P,8)$: $M = \mathrm{Bar}\{(P,8);(Z,2)\}$. Le point P est sur (XY), et Z n'y est pas, car XYZ est un triangle : $P \neq Z$. D'après la propriété des points d'une droite, M appartient à (PZ).

Position. La somme $8+2=10$ n'est pas nulle ; l'existence et l'unicité du barycentre de deux points donne $\overrightarrow{PM} = \frac{2}{10}\,\overrightarrow{PZ} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{PZ}$.

Conclusion. Les points P, M et Z sont alignés, et $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{PZ}$.



P sur [XY], puis M sur [PZ], au cinquième en partant de P.

3.

Dans un repère, on prend $X(0,0)$, $Y(10,0)$ et $Z(0,10)$. Calculer les coordonnées de M et de P, et vérifier le résultat de la question 2.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, ou directement l'égalité qui définit M.

CORRIGÉ

Point M. Comme X est l'origine, $\overrightarrow{XY}(10,0)$ et $\overrightarrow{XZ}(0,10)$. D'après l'égalité qui définit M :

$$x_M = \frac{3}{10}\times 10 + \frac{1}{5}\times 0 = 3,$$

$$y_M = \frac{3}{10}\times 0 + \frac{1}{5}\times 10 = 2.$$

Contrôle par les coordonnées du barycentre : $x_M = \dfrac{3\times 10}{10} = 3$ et $y_M = \dfrac{2\times 10}{10} = 2$.

Point P. La somme des poids vaut 8 : $x_P = \dfrac{3\times 10}{8} = \dfrac{15}{4}$ et $y_P = 0$.

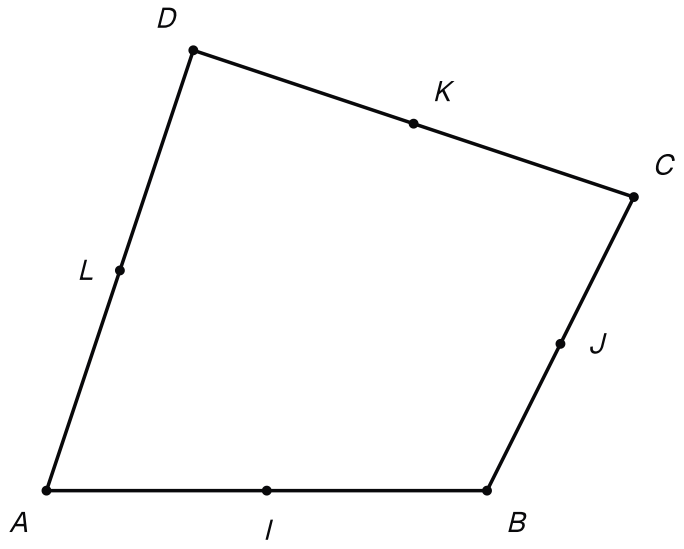
Vérification. $\overrightarrow{PM}\left(-\dfrac{3}{4}, 2\right)$ et $\overrightarrow{PZ}\left(-\dfrac{15}{4}, 10\right)$. Chaque coordonnée de $\overrightarrow{PM}$ est le cinquième de celle de $\overrightarrow{PZ}$, donc $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{PZ}$.

Conclusion. $M(3,2)$ et $P\left(\dfrac{15}{4}, 0\right)$; le résultat de la question 2 est vérifié.

Exercice 4

Les milieux des côtés d'un quadrilatère

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. On note I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, et G l'isobarycentre de A, B, C et D.



Un quadrilatère ABCD et les milieux I, J, K, L de ses quatre côtés.

1.

Écrire G comme barycentre de I et K, et en déduire la position de G sur le segment $[IK]$.

INDICE

Outil : l'associativité, en regroupant A avec B, puis C avec D ; chaque milieu reçoit le poids 2.

CORRIGÉ

Barycentres partiels. G est l'isobarycentre de A, B, C et D : chacun de ces points reçoit le poids 1, et la somme des poids vaut 4. De plus, $I = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1)\}$ et $K = \mathrm{Bar}\{(C,1);(D,1)\}$.

Associativité. Le groupe formé de A et B et celui formé de C et D ont chacun pour somme des poids 2, non nulle. Par associativité :

$$G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(K,2)\}.$$

Position. Les poids de I et de K sont égaux : G est l'isobarycentre de I et K.

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(I,2);(K,2)\}$: le point G est le milieu de $[IK]$.

2.

Par un autre regroupement, écrire G comme barycentre de J et L.

INDICE

Outil : regroupe cette fois B avec C, puis D avec A.

CORRIGÉ

On regroupe cette fois B avec C, puis D avec A : $J = \mathrm{Bar}\{(B,1);(C,1)\}$ et $L = \mathrm{Bar}\{(D,1);(A,1)\}$. Chaque groupe a pour somme des poids 2, non nulle.

Par associativité :

$$G = \mathrm{Bar}\{(J,2);(L,2)\}.$$

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(J,2);(L,2)\}$: les poids sont égaux, donc G est aussi le milieu de $[JL]$.

3.

Que peut-on en déduire pour les segments $[IK]$ et $[JL]$? Contrôler avec $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(8,4)$ et $D(2,6)$ dans un repère.

INDICE

Outil : les questions 1 et 2 ; puis la formule des coordonnées d'un milieu.

CORRIGÉ

Déduction. D'après les questions 1 et 2, le point G est à la fois le milieu de $[IK]$ et celui de $[JL]$.

Contrôle. Avec les coordonnées proposées :

- $I(3,0)$, $J(7,2)$, $K(5,5)$ et $L(1,3)$;
- le milieu de $[IK]$ est $\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{0+5}{2}\right) = \left(4, \dfrac{5}{2}\right)$;
- le milieu de $[JL]$ est $\left(\dfrac{7+1}{2}, \dfrac{2+3}{2}\right) = \left(4, \dfrac{5}{2}\right)$;
- d'après les coordonnées du barycentre, $x_G = \dfrac{0+6+8+2}{4} = 4$ et $y_G = \dfrac{0+0+4+6}{4} = \dfrac{5}{2}$.

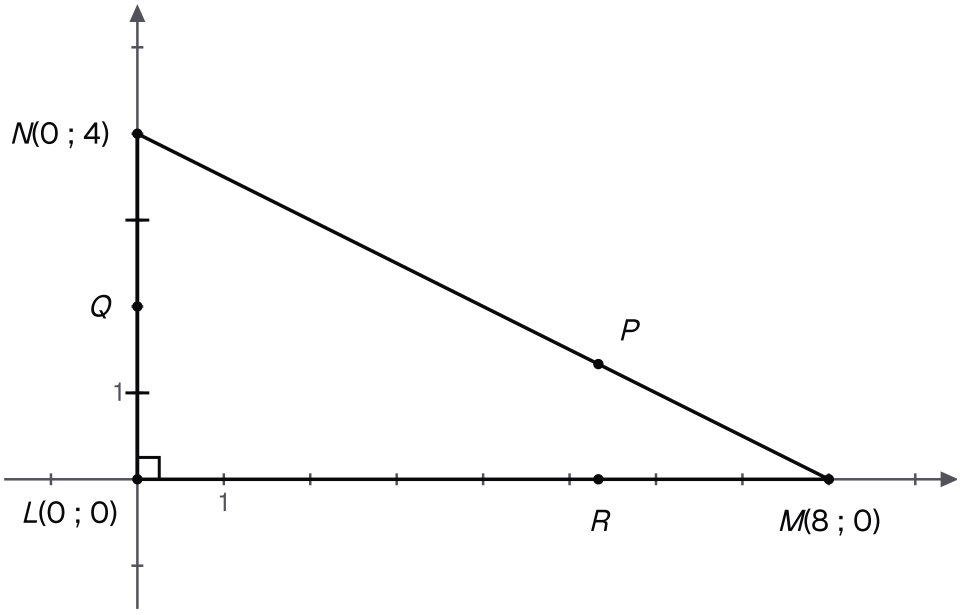
Conclusion. Les segments $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu, le point G ; le calcul donne bien les coordonnées $\left(4, \dfrac{5}{2}\right)$ pour G.

Exercice 5

Trois droites concourantes dans un triangle rectangle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le triangle LMN, rectangle en L, avec $L(0,0)$, $M(8,0)$ et $N(0,4)$. On définit :

- le point P de $[MN]$ tel que $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$;
- le milieu Q de $[LN]$;
- le point R de $[LM]$ tel que $\overrightarrow{LR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LM}$.



Le triangle LMN, rectangle en L, et les trois points P, Q, R définis sur ses côtés.

1.

Écrire P, Q et R comme barycentres de deux sommets du triangle, avec les poids entiers les plus simples.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{UV} = t\overrightarrow{UW}$, alors $V = \mathrm{Bar}\{(U, 1-t);(W, t)\}$. Simplifie ensuite par homogénéité.

CORRIGÉ

On applique la méthode pour exprimer un point comme barycentre : si $\overrightarrow{UV} = t\overrightarrow{UW}$, alors $V = \mathrm{Bar}\{(U, 1-t);(W, t)\}$. L'homogénéité donne ensuite des poids entiers.

- **Point P.** Avec $t = \dfrac{1}{3}$: $P = \mathrm{Bar}\left\{\left(M, \dfrac{2}{3}\right);\left(N, \dfrac{1}{3}\right)\right\}$. En multipliant par 3, $P = \mathrm{Bar}\{(M, 2);(N, 1)\}$.
- **Point Q.** C'est le milieu de $[LN]$: $Q = \mathrm{Bar}\{(L, 1);(N, 1)\}$.
- **Point R.** Avec $t = \dfrac{2}{3}$: $R = \mathrm{Bar}\left\{\left(L, \dfrac{1}{3}\right);\left(M, \dfrac{2}{3}\right)\right\}$. En multipliant par 3, $R = \mathrm{Bar}\{(L, 1);(M, 2)\}$.

Conclusion. $P = \mathrm{Bar}\{(M, 2);(N, 1)\}$, $Q = \mathrm{Bar}\{(L, 1);(N, 1)\}$ et $R = \mathrm{Bar}\{(L, 1);(M, 2)\}$.

2.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(L, 1);(M, 2);(N, 1)\}$. Démontrer que les droites (LP), (MQ) et (NR) sont concourantes en G.

INDICE

Outil : l'associativité, appliquée trois fois. Dans chaque regroupement, le barycentre partiel est l'un des points P, Q ou R.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $1 + 2 + 1 = 4$, qui n'est pas nul : G existe.

Trois regroupements. Les groupes formés de M et N, de L et N, puis de L et M ont pour sommes 3, 2 et 3, non nulles, et pour barycentres P, Q et R (question 1). Par associativité :

- $G = \mathrm{Bar}\{(L, 1);(P, 3)\}$;
- $G = \mathrm{Bar}\{(M, 2);(Q, 2)\}$;
- $G = \mathrm{Bar}\{(N, 1);(R, 3)\}$.

Droites. Chacune des trois droites passe par un sommet et par un point du côté opposé, distinct de ce sommet. D'après la propriété des points d'une droite, G appartient à (LP), à (MQ) et à (NR).

Conclusion. Les droites (LP), (MQ) et (NR) passent toutes par G : elles sont concourantes en G.

3.

Calculer les coordonnées de G, P, Q et R, puis vérifier que G est le milieu de $[MQ]$ et que $\overrightarrow{LG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{LP}$.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre.

CORRIGÉ

Coordonnées. D'après les coordonnées du barycentre :

- $G\left(\frac{16}{4}, \frac{4}{4}\right) = (4, 1)$;
- $P\left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $Q(0, 2)$ et $R\left(\frac{16}{3}, 0\right)$.

Milieu de $[MQ]$. $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (4, 1)$: c'est le point G.

Sur (LP). Comme L est l'origine, $\overrightarrow{LP}\left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Le vecteur $\frac{3}{4}\overrightarrow{LP}$ a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4} \times \frac{16}{3}, \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right) = (4, 1)$, celles de $\overrightarrow{LG}$.

Conclusion. $G(4, 1)$ est le milieu de $[MQ]$, et $\overrightarrow{LG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{LP}$.

Exercice 6

Le centre d'inertie d'une molécule

Dans un modèle simplifié d'une molécule, un atome lourd O de masse 16 est lié à deux atomes légers H et H' de masse 1 chacun (masses en unités de masse atomique). Dans un repère du plan de la molécule, on a $O(0,0)$, $H(4,3)$ et $H'(-4,3)$; l'unité de longueur est arbitraire. Le centre d'inertie de la molécule est le barycentre G des trois atomes affectés de leurs masses.

1.

Calculer les coordonnées de G.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, avec les poids 16, 1 et 1.

CORRIGÉ

La somme des masses vaut $16+1+1=18$, qui n'est pas nulle. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{16\times 0 + 4 - 4}{18} = 0,$$
$$y_G = \frac{16\times 0 + 3 + 3}{18} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion. Le centre d'inertie est le point $G\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

2.

On note K le milieu de $[HH']$. Retrouver G par associativité, en exprimant $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$.

INDICE

Outil : l'associativité ; K reçoit la somme des masses des deux atomes légers. Pense ensuite à l'homogénéité.

CORRIGÉ

Barycentre partiel. Le point K est le milieu de $[HH']$: $K = \mathrm{Bar}\{(H,1);(H',1)\}$, avec $K(0,3)$.

Associativité. La somme $1+1=2$ n'est pas nulle. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(O,16);(K,2)\}$. En divisant les poids par 2, d'après l'homogénéité, $G = \mathrm{Bar}\{(O,8);(K,1)\}$.

Vecteur. La somme des poids vaut 9. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OK}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OK}$. Comme $\overrightarrow{OK}(0,3)$, on retrouve $G\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

3.

Situer G sur le segment $[OK]$ et interpréter.

INDICE

Outil : la position du barycentre de deux points de poids positifs.

CORRIGÉ

Les poids 8 et 1 sont positifs. D'après la position du barycentre de deux points, G appartient au segment $[OK]$.

De plus, $OG = \dfrac{1}{9}\,OK$: le point G est très proche de O.

Conclusion. G est sur $[OK]$, au neuvième de sa longueur en partant de O : l'atome lourd attire le centre d'inertie vers lui.

Exercice 7

Deux sommes de vecteurs à comparer

A, B et C sont trois points non alignés, et I est le milieu de $[BC]$. Pour tout point M, on pose

$$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

et

$$\vec{v} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

1.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. Réduire $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis justifier que G est le milieu de $[AI]$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique, pour trois points puis pour deux points ; ensuite l'associativité.

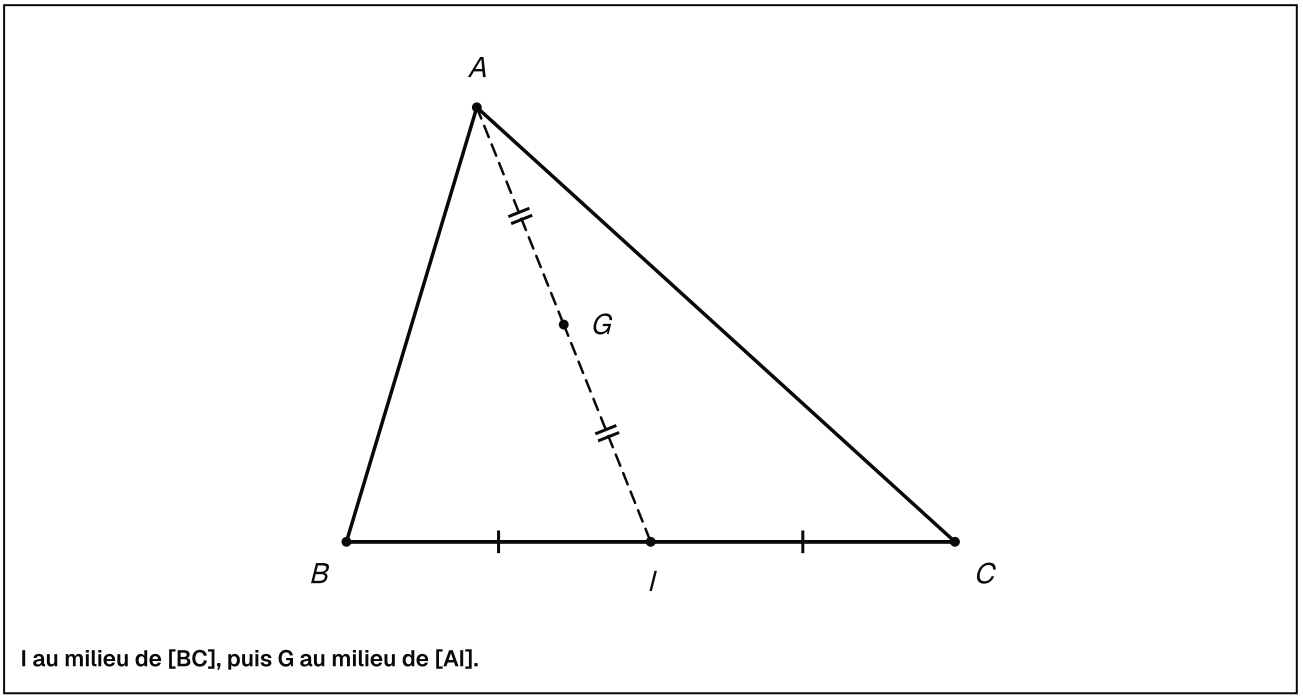
CORRIGÉ

Réduction de $\vec{u}$. La somme des poids $2+1+1=4$ n'est pas nulle. D'après la propriété caractéristique du barycentre, pour tout point M, $\vec{u} = 4\,\overrightarrow{MG}$.

Réduction de $\vec{v}$. Le milieu I de $[BC]$ vérifie $I = \mathrm{Bar}\{(B,1);(C,1)\}$, de somme des poids 2. De même, pour tout point M, $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

Position de G. Le groupe formé de B et C a pour somme $1+1=2$, non nulle, et pour barycentre I. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(I,2)\}$: les poids sont égaux.

Conclusion. Pour tout point M, $\vec{u} = 4\,\overrightarrow{MG}$ et $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{MI}$; le point G est le milieu de $[AI]$.



I au milieu de [BC], puis G au milieu de [AI].

2.

Justifier que $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $M = \mathrm{Bar}\{(G, 2); (I, -1)\}$.

INDICE

Outil : écris $\vec{u} - \vec{v}$ à l'aide de la question 1, puis reconnais la définition d'un barycentre de G et I.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout point M, $\vec{u} - \vec{v} = 4\,\overrightarrow{MG} - 2\,\overrightarrow{MI}$. Donc $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à :

$$4\,\overrightarrow{MG} - 2\,\overrightarrow{MI} = \vec{0}.$$

La somme $4 - 2 = 2$ n'est pas nulle. Par définition du barycentre, cette égalité équivaut à $M = \mathrm{Bar}\{(G, 4); (I, -2)\}$. En divisant les poids par 2, d'après l'homogénéité, c'est aussi le barycentre de $(G, 2)$ et $(I, -1)$.

Conclusion. $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $M = \mathrm{Bar}\{(G, 2); (I, -1)\}$.

3.

Quelle est la position de M par rapport à G et I ? En déduire le point M à l'aide de la question 1.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points donne $\overrightarrow{GM}$ en fonction de $\overrightarrow{GI}$.

CORRIGÉ

Position de M. La somme des poids vaut $2 + (-1) = 1$. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} &= \frac{-1}{1}\,\overrightarrow{GI} \\ &= -\overrightarrow{GI}.\end{aligned}$$

Le point M est donc le symétrique de I par rapport à G.

Identification. D'après la question 1, G est le milieu de $[AI]$: le symétrique de I par rapport à G est A. Donc $M = A$.

Conclusion. M est le symétrique de I par rapport à G, c'est-à-dire le point A.

4.

Vérifier ce résultat en calculant directement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour $M = A$.

INDICE

Outil : le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul.

CORRIGÉ

Pour $M = A$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\,\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Conclusion. Pour $M = A$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux, ce qui confirme $M = A$.