BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Application	8

Exercice 1

Deux barycentres sur un segment de 9 cm

On considère deux points A et B tels que $AB = 9$ cm. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Justifier que le point $G = \mathrm{Bar}\{(A, 4); (B, 5)\}$ existe, puis calculer AG et placer G.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points donne $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2.

Même travail pour le point $K = \mathrm{Bar}\{(A, 5); (B, -2)\}$.

INDICE

Outil : même formule ; attention au signe de la fraction obtenue.

3.

Contrôler la position de G et de K par rapport au segment $[AB]$ à l'aide du signe des poids.

INDICE

Outil : la position du barycentre de deux points dépend du signe du produit des poids.

Exercice 2

Le barycentre existe-t-il ?

A, B et C sont trois points non alignés. On considère quatre systèmes de points pondérés :

- (a) $(A, 3)$ et $(B, -3)$;
- (b) $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, -1)$;
- (c) $(A, 5)$, $(B, -2)$ et $(C, 1)$;
- (d) $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

1.

Pour chacun des quatre systèmes, dire s'il admet un barycentre.

INDICE

Outil : un barycentre existe si et seulement si la somme des poids n'est pas nulle.

2.

On note G le barycentre du système (c). Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, avec $a = 5$, $b = -2$ et $c = 1$.

3.

On note S le barycentre du système (d). Exprimer de même $\overrightarrow{AS}$.

INDICE

Outil : même formule, avec trois poids égaux à 1.

Exercice 3

Changer les poids sans déplacer le point

A et B sont deux points distincts. On note $G = \mathrm{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right) ; \left(B, \frac{3}{2}\right)\right\}$.

1.

Écrire G comme barycentre de A et B affectés de poids entiers, puis exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : l'homogénéité. Par quel réel multiplier les deux poids ?

2.

Le point G est-il le barycentre de $(A, -2)$ et $(B, -6)$?

INDICE

Outil : cherche un réel k non nul qui transforme les poids de départ en -2 et -6.

3.

Un élève ajoute 1 à chaque poids de départ et affirme que $G = \mathrm{Bar}\left\{\left(A, \frac{3}{2}\right) ; \left(B, \frac{5}{2}\right)\right\}$. A-t-il raison ?

INDICE

Outil : calcule la fraction $\frac{b}{a+b}$ pour ces nouveaux poids et compare-la à celle de la question 1.

Exercice 4

L'isobarycentre de trois points d'un repère

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $D(-1, 1)$, $E(5, 3)$ et $F(2, -4)$. On note G l'isobarycentre de D, E et F.

1.

Justifier que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}\right)$.

INDICE

Outil : l'isobarycentre est le barycentre de $(D, 1)$, $(E, 1)$ et $(F, 1)$; utilise l'existence et l'unicité du barycentre de trois points.

2.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DG}$, puis celles de G.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $(x_E - x_D, y_E - y_D)$.

3.

Retrouver les coordonnées de G par des moyennes pondérées, d'après les coordonnées du barycentre.

INDICE

Outil : pour des poids égaux, chaque coordonnée est la moyenne des coordonnées des trois points.

Exercice 5

Réduire une somme de trois vecteurs

A, B et C sont trois points non alignés. Pour tout point M du plan, on pose $\vec{w} = 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$.

1.

Justifier l'existence du point $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$, puis écrire $\vec{w}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{MG}$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique du barycentre.

2.

En choisissant $M = A$, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : remplace M par A dans l'égalité de la question 1 ; le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul.

3.

Déterminer le point N tel que $3\,\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + 2\,\overrightarrow{NC} = 4\,\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : la question 1 avec $M = N$; puis compare deux vecteurs.

Exercice 6

Des coordonnées avec un poids négatif

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(1,3)$, $B(5,-1)$ et $C(3,-1)$.

1.

Calculer les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,1);(C,-2)\}$.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre ; le dénominateur est la somme des poids.

2.

Contrôler ce résultat en calculant $3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\,\overrightarrow{GC}$.

INDICE

Outil : la définition du barycentre ; calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

3.

Calculer les coordonnées de $H = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,1)\}$.

INDICE

Outil : même formule, avec deux points.

Exercice 7

Trois points de la droite (AB)

A et B sont deux points distincts.

1.

Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Écrire M comme barycentre de A et B avec des poids entiers.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, alors $M = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t);(B, t)\}$.

2.

Le point N vérifie $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. Écrire N comme barycentre de A et B avec des poids entiers.

INDICE

Outil : même méthode, avec $t = \frac{5}{2}$; le poids de A est alors négatif.

3.

Le point P vérifie $\overrightarrow{PA} = 4\,\overrightarrow{PB}$. Écrire P comme barycentre de A et B, puis exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

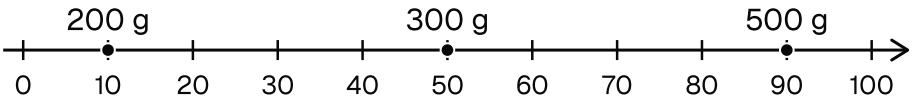
INDICE

Outil : fais passer tous les termes dans le même membre et reconnais la définition du barycentre.

Exercice 8

Une règle graduée en équilibre

Une règle d'un mètre, de masse négligeable, est graduée en centimètres de 0 à 100. On y fixe trois masses : 200 g à la graduation 10, 300 g à la graduation 50 et 500 g à la graduation 90. On admet que la règle reste horizontale lorsqu'on la soutient au barycentre des trois points affectés de leurs masses.



La règle graduée de 0 à 100 et ses trois masses ; le point où la soutenir reste à calculer.

1.

Justifier que l'on peut prendre les poids 2, 3 et 5 pour ces trois points.

INDICE

Outil : l'homogénéité du barycentre.

2.

À quelle graduation faut-il soutenir la règle ?

INDICE

Outil : sur la règle, chaque point est repéré par sa graduation ; calcule la moyenne des graduations pondérée par les poids.

3.

On ajoute une quatrième masse de 400 g à la graduation x. Le point d'équilibre est alors à la graduation $\dfrac{620 + 4x}{14}$. Pour quelle valeur de x vaut-elle 50 ?

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, avec le poids 4 au point de graduation x ; puis résous l'équation obtenue.