BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Application	8

Exercice 1

Deux barycentres sur un segment de 9 cm

On considère deux points A et B tels que $AB = 9$ cm. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Justifier que le point $G = \mathrm{Bar}\{(A,4);(B,5)\}$ existe, puis calculer AG et placer G.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de deux points donne $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $4 + 5 = 9$, qui n'est pas nul : G existe.

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{9}\,\overrightarrow{AB}.$$

Placement. Le coefficient $\frac{5}{9}$ est compris entre 0 et 1 : G est sur le segment $[AB]$, et $AG = \frac{5}{9} \times 9 = 5$ cm.

Conclusion. Le point G existe ; il se place sur $[AB]$, à 5 cm de A.

2.

Même travail pour le point $K = \mathrm{Bar}\{(A,5);(B,-2)\}$.

INDICE

Outil : même formule ; attention au signe de la fraction obtenue.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $5 + (-2) = 3$, qui n'est pas nul : K existe.

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{-2}{3}\,\overrightarrow{AB}.$$

Placement. Le coefficient est négatif : $\overrightarrow{AK}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$. Sa longueur vaut $AK = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm.

Conclusion. Le point K existe ; il se place sur la droite (AB), à 6 cm de A, du côté opposé à B.

3.

Contrôler la position de G et de K par rapport au segment $[AB]$ à l'aide du signe des poids.

INDICE

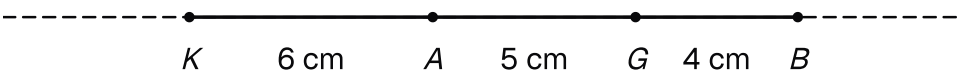
Outil : la position du barycentre de deux points dépend du signe du produit des poids.

CORRIGÉ

On applique la position du barycentre de deux points : le barycentre est sur le segment quand le produit des poids est positif ou nul, hors du segment quand ce produit est strictement négatif.

- Pour G : $4 \times 5 = 20 \geq 0$, donc G appartient à $[AB]$.
- Pour K : $5 \times (-2) = -10 < 0$, donc K n'appartient pas à $[AB]$.

Conclusion. G est sur le segment $[AB]$ et K en dehors, comme sur les constructions des questions 1 et 2.



G entre A et B, à 5 cm de A ; K sur la droite, du côté opposé à B, à 6 cm de A.

Exercice 2

Le barycentre existe-t-il ?

A, B et C sont trois points non alignés. On considère quatre systèmes de points pondérés :

- (a) $(A, 3)$ et $(B, -3)$;
- (b) $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, -1)$;
- (c) $(A, 5)$, $(B, -2)$ et $(C, 1)$;
- (d) $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

1.

Pour chacun des quatre systèmes, dire s'il admet un barycentre.

INDICE

Outil : un barycentre existe si et seulement si la somme des poids n'est pas nulle.

CORRIGÉ

Un système de points pondérés admet un barycentre exactement lorsque la somme de ses poids n'est pas nulle.

- (a) $3 + (-3) = 0$: aucun barycentre.
- (b) $2 - 1 - 1 = 0$: aucun barycentre.
- (c) $5 - 2 + 1 = 4$, non nul : le barycentre existe.
- (d) $1 + 1 + 1 = 3$, non nul : le barycentre existe. Ses poids sont égaux : c'est l'isobarycentre de A, B et C.

Conclusion. Les systèmes (c) et (d) admettent un barycentre ; les systèmes (a) et (b) n'en ont pas.

2.

On note G le barycentre du système (c). Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, avec $a = 5$, $b = -2$ et $c = 1$.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut 4. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, avec $a = 5$, $b = -2$ et $c = 1$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\left(-2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}$.

3.

On note S le barycentre du système (d). Exprimer de même $\overrightarrow{AS}$.

INDICE

Outil : même formule, avec trois poids égaux à 1.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut 3, non nulle. On applique l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, avec trois poids égaux à 1 :

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Conclusion. $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

Changer les poids sans déplacer le point

A et B sont deux points distincts. On note $G = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right) ; \left(B, \frac{3}{2}\right)\right\}$.

1.

Écrire G comme barycentre de A et B affectés de poids entiers, puis exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : l'homogénéité. Par quel réel multiplier les deux poids ?

CORRIGÉ

Poids entiers. On multiplie les deux poids par 2, réel non nul : $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ et $\frac{3}{2} \times 2 = 3$. D'après l'homogénéité :

$$G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}.$$

Vecteur. La somme des poids vaut 4. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Conclusion. $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

2.

Le point G est-il le barycentre de $(A, -2)$ et $(B, -6)$?

INDICE

Outil : cherche un réel k non nul qui transforme les poids de départ en -2 et -6.

CORRIGÉ

On cherche un réel k non nul qui transforme $\frac{1}{2}$ en -2 et $\frac{3}{2}$ en -6.

La condition $k \times \frac{1}{2} = -2$ donne $k = -4$, et ce réel convient aussi pour le second poids : $-4 \times \frac{3}{2} = -6$.

Les deux poids sont donc multipliés par le même réel non nul -4. D'après l'homogénéité, $G = \text{Bar}\{(A, -2); (B, -6)\}$.

Conclusion. Oui : G est le barycentre de $(A, -2)$ et $(B, -6)$.

3.

Un élève ajoute 1 à chaque poids de départ et affirme que $G = \mathrm{Bar}\left\{\left(A, \frac{3}{2}\right) ; \left(B, \frac{5}{2}\right)\right\}$. A-t-il raison ?

INDICE

Outil : calcule la fraction $\frac{b}{a+b}$ pour ces nouveaux poids et compare-la à celle de la question 1.

CORRIGÉ

Notons G' le point proposé par l'élève. La somme de ses poids vaut $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$, non nulle. On applique l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG'} &= \frac{5}{2} \times \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Or $\frac{5}{8} \neq \frac{3}{4}$: les vecteurs $\overrightarrow{AG'}$ et $\overrightarrow{AG}$ diffèrent, donc $G' \neq G$.

Conclusion. L'élève a tort. Multiplier tous les poids par un même réel non nul conserve le barycentre ; leur ajouter un même nombre le déplace en général.

Exercice 4

L'isobarycentre de trois points d'un repère

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $D(-1, 1)$, $E(5, 3)$ et $F(2, -4)$. On note G l'isobarycentre de D, E et F.

1.

Justifier que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}\right)$.

INDICE

Outil : l'isobarycentre est le barycentre de $(D, 1)$, $(E, 1)$ et $(F, 1)$; utilise l'existence et l'unicité du barycentre de trois points.

CORRIGÉ

Par définition, $G = \mathrm{Bar}\{(D, 1); (E, 1); (F, 1)\}$, et la somme des poids vaut 3, qui n'est pas nul.

D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points :

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}\right).$$

Conclusion. L'égalité $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}\right)$ est justifiée.

2.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DG}$, puis celles de G.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $(x_E - x_D, y_E - y_D)$.

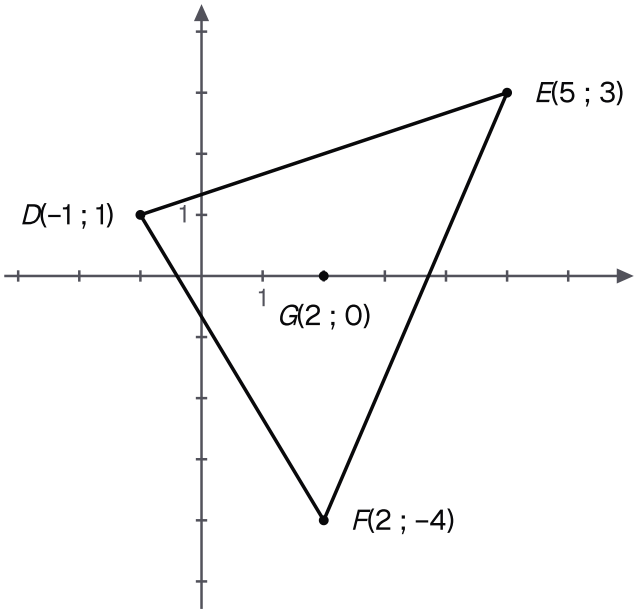
CORRIGÉ

Vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$. On a $5 - (-1) = 6$ et $3 - 1 = 2$, donc $\overrightarrow{DE}(6, 2)$. De même, $2 - (-1) = 3$ et $-4 - 1 = -5$, donc $\overrightarrow{DF}(3, -5)$.

Vecteur $\overrightarrow{DG}$. La somme $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(9, -3)$. D'après la question 1, $\overrightarrow{DG}$ en est le tiers : $\overrightarrow{DG}(3, -1)$.

Point G. $x_G = -1 + 3 = 2$ et $y_G = 1 + (-1) = 0$.

Conclusion. $\overrightarrow{DE}(6, 2)$, $\overrightarrow{DF}(3, -5)$, $\overrightarrow{DG}(3, -1)$ et $G(2, 0)$.



Le triangle DEF et son isobarycentre G, de coordonnées 2 et 0.

3.

Retrouver les coordonnées de G par des moyennes pondérées, d'après les coordonnées du barycentre.

INDICE

Outil : pour des poids égaux, chaque coordonnée est la moyenne des coordonnées des trois points.

CORRIGÉ

D'après les coordonnées du barycentre, avec trois poids égaux à 1 et une somme égale à 3 :

$$x_G = \frac{-1 + 5 + 2}{3} = 2,$$

$$y_G = \frac{1 + 3 - 4}{3} = 0.$$

Conclusion. On retrouve $G(2, 0)$.

Exercice 5

Réduire une somme de trois vecteurs

A, B et C sont trois points non alignés. Pour tout point M du plan, on pose $\vec{w} = 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$.

1.

Justifier l'existence du point $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$, puis écrire $\vec{w}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{MG}$.

INDICE

Outil : la propriété caractéristique du barycentre.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $3 - 1 + 2 = 4$, qui n'est pas nul : G existe.

Réduction. D'après la propriété caractéristique du barycentre, pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned} &3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \\ &= 4\,\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le point G existe et, pour tout point M, $\vec{w} = 4\,\overrightarrow{MG}$.

2.

En choisissant $M = A$, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Outil : remplace M par A dans l'égalité de la question 1 ; le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul.

CORRIGÉ

L'égalité de la question 1 vaut pour tout point M ; on l'écrit pour $M = A$:

$$3\,\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = 4\,\overrightarrow{AG}.$$

Comme $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, il reste $-\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = 4\,\overrightarrow{AG}$. On divise par 4 :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$.

3.

Déterminer le point N tel que $3\,\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + 2\,\overrightarrow{NC} = 4\,\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : la question 1 avec $M = N$; puis compare deux vecteurs.

CORRIGÉ

D'après la question 1 écrite pour $M = N$, le membre de gauche vaut $4\,\overrightarrow{NG}$. L'égalité de l'énoncé devient :

$$4\,\overrightarrow{NG} = 4\,\overrightarrow{AB}.$$

En divisant par 4, on obtient $\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{BA}$.

Conclusion. Le point N cherché est l'unique point tel que $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{BA}$: on le construit en reportant le vecteur $\overrightarrow{BA}$ à partir de G.

Exercice 6

Des coordonnées avec un poids négatif

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(1,3)$, $B(5,-1)$ et $C(3,-1)$.

1.

Calculer les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,1);(C,-2)\}$.

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre ; le dénominateur est la somme des poids.

CORRIGÉ

Existence. La somme des poids vaut $3+1-2=2$, qui n'est pas nul.

Abscisse. D'après les coordonnées du barycentre :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{3\times 1 + 1\times 5 - 2\times 3}{2} \\ &= \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ordonnée. De même, avec $3\times 3 = 9$, $1\times(-1) = -1$ et $-2\times(-1) = 2$:

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{9 - 1 + 2}{2} \\ &= \frac{10}{2} = 5. \end{aligned}$$

Conclusion. On a $x_G = 1$ et $y_G = 5$. Donc $G(1,5)$.

2.

Contrôler ce résultat en calculant $3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\,\overrightarrow{GC}$.

INDICE

Outil : la définition du barycentre ; calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

CORRIGÉ

Vecteurs. Avec $G(1,5)$: $\overrightarrow{GA}(0,-2)$, $\overrightarrow{GB}(4,-6)$ et $\overrightarrow{GC}(2,-6)$.

Somme. Le vecteur $3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\,\overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées $(0+4-4, -6-6+12) = (0,0)$.

Conclusion. $3\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$: par définition du barycentre, G est bien le point trouvé à la question 1.

3.

Calculer les coordonnées de $H = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,1)\}$.

INDICE

Outil : même formule, avec deux points.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut $3+1=4$, qui n'est pas nul. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_H = \frac{3\times 1+5}{4} = 2,$$
$$y_H = \frac{3\times 3+(-1)}{4} = 2.$$

Conclusion. On a $x_H = 2$ et $y_H = 2$. Donc $H(2,2)$.

Exercice 7

Trois points de la droite (AB)

A et B sont deux points distincts.

1.

Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Écrire M comme barycentre de A et B avec des poids entiers.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, alors $M = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t);(B, t)\}$.

CORRIGÉ

Poids de somme 1**.** D'après la méthode pour exprimer un point comme barycentre, avec $t = \frac{3}{5}$ et $1 - t = \frac{2}{5}$:

$$M = \mathrm{Bar}\Big\{ \left(A, \frac{2}{5}\right) ; \left(B, \frac{3}{5}\right) \Big\}.$$

Ces poids ont pour somme 1, qui n'est pas nul.

Poids entiers. On multiplie les deux poids par 5, réel non nul. D'après l'homogénéité, $M = \mathrm{Bar}\{(A, 2);(B, 3)\}$.

Contrôle. $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$: on retrouve le coefficient de l'énoncé.

Conclusion. $M = \mathrm{Bar}\{(A, 2);(B, 3)\}$.

2.

Le point N vérifie $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. Écrire N comme barycentre de A et B avec des poids entiers.

INDICE

Outil : même méthode, avec $t = \frac{5}{2}$; le poids de A est alors négatif.

CORRIGÉ

Poids de somme 1**.** Avec $t = \frac{5}{2}$, on a $1 - t = -\frac{3}{2}$. D'après la méthode pour exprimer un point comme barycentre :

$$N = \mathrm{Bar}\Big\{\left(A, -\frac{3}{2}\right); \left(B, \frac{5}{2}\right)\Big\}.$$

Ces poids ont pour somme 1, qui n'est pas nul.

Poids entiers. On multiplie les deux poids par 2, réel non nul. D'après l'homogénéité, $N = \mathrm{Bar}\{(A, -3); (B, 5)\}$.

Contrôle. $\frac{5}{-3+5} = \frac{5}{2}$: on retrouve le coefficient de l'énoncé.

Conclusion. $N = \mathrm{Bar}\{(A, -3); (B, 5)\}$.

3.

Le point P vérifie $\overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{PB}$. Écrire P comme barycentre de A et B, puis exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Outil : fais passer tous les termes dans le même membre et reconnais la définition du barycentre.

CORRIGÉ

Barycentre. L'égalité $\overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{PB}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{PA} - 4\overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

La somme des poids $1 + (-4) = -3$ n'est pas nulle. Par définition du barycentre, $P = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, -4)\}$.

Vecteur. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

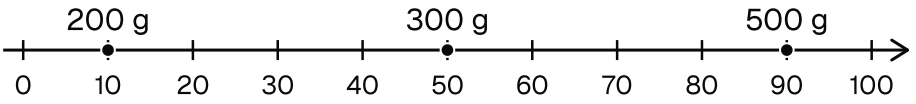
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{-4}{-3}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Conclusion. $P = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, -4)\}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$: le point P est sur la droite (AB), au-delà de B.

Exercice 8

Une règle graduée en équilibre

Une règle d'un mètre, de masse négligeable, est graduée en centimètres de 0 à 100. On y fixe trois masses : 200 g à la graduation 10, 300 g à la graduation 50 et 500 g à la graduation 90. On admet que la règle reste horizontale lorsqu'on la soutient au barycentre des trois points affectés de leurs masses.



La règle graduée de 0 à 100 et ses trois masses ; le point où la soutenir reste à calculer.

1.

Justifier que l'on peut prendre les poids 2, 3 et 5 pour ces trois points.

INDICE

Outil : l'homogénéité du barycentre.

CORRIGÉ

Diviser les trois masses par 100 revient à les multiplier par le même réel non nul $\frac{1}{100}$: on obtient 2, 3 et 5.

D'après l'homogénéité, les trois points affectés des poids 200, 300 et 500 ont le même barycentre que les mêmes points affectés des poids 2, 3 et 5.

Conclusion. On peut prendre les poids 2, 3 et 5 sans changer le point d'équilibre.

2.

À quelle graduation faut-il soutenir la règle ?

INDICE

Outil : sur la règle, chaque point est repéré par sa graduation ; calcule la moyenne des graduations pondérée par les poids.

CORRIGÉ

La somme des poids vaut $2+3+5=10$, qui n'est pas nul. Sur la règle, chaque point est repéré par sa graduation, qui joue le rôle d'une abscisse.

D'après les coordonnées du barycentre, la graduation g du point d'équilibre vaut :

$$\begin{aligned} g &= \frac{2\times 10+3\times 50+5\times 90}{10} \\ &= \frac{20+150+450}{10} \\ &= 62. \end{aligned}$$

Contrôle. 62 est au-delà du milieu de la règle, la graduation 50, du côté de la masse la plus lourde, 500 g.

Conclusion. Il faut soutenir la règle à la graduation 62.

3.

On ajoute une quatrième masse de 400 g à la graduation x. Le point d'équilibre est alors à la graduation $\dfrac{620+4x}{14}$. Pour quelle valeur de x vaut-elle 50 ?

INDICE

Outil : les coordonnées du barycentre, avec le poids 4 au point de graduation x ; puis résous l'équation obtenue.

CORRIGÉ

La formule de l'énoncé. La masse de 400 g correspond au poids 4 ; la somme des poids devient $10+4=14$. Le numérateur de la question 2 valait 620. D'après les coordonnées du barycentre, le point d'équilibre est à la graduation $\dfrac{620+4x}{14}$.

Équation. On cherche x tel que :

$$\frac{620+4x}{14}=50.$$

En multipliant par 14 : $620+4x=700$, puis $4x=80$, donc $x=20$.

Conclusion. Le point d'équilibre est à la graduation 50 pour $x=20$: il faut fixer la masse de 400 g à la graduation 20.