BURHAN

Le barycentre dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

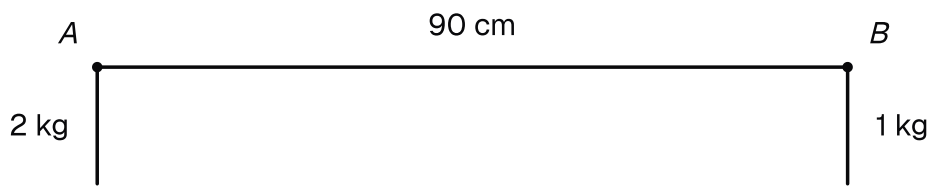
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/cours

Chapitre	Semestre
Le barycentre dans le plan	Semestre 1

Où mettre le point d'appui ?

Une tige légère de 90 cm porte deux masses à ses extrémités : 2 kg en A et 1 kg en B. Tu veux la poser sur un seul point d'appui, sans qu'elle penche.

Où placer cet appui ? Au milieu, la masse de 2 kg ferait basculer la tige du côté de A.



La tige de 90 cm et ses deux charges : 2 kg au bout A, 1 kg au bout B. L'appui reste à placer.

Devine : Une prédiction

À quelle distance de A faut-il placer le point d'appui pour que la tige reste horizontale ?

A. À 45 cm de A.

Faux.

Au milieu, les deux côtés ont la même longueur, mais pas la même masse : la tige penche vers A.

B. À 30 cm de A.

Juste.

Juste : l'appui est deux fois plus près de la masse double.

C. À 60 cm de A.

Faux.

Cet appui est plus près de la masse légère : c'est l'inverse qu'il faut.

Correction

À l'équilibre, les produits « masse × distance à l'appui » sont égaux de part et d'autre de l'appui.

Si G est l'appui, on a donc $2 \times GA = 1 \times GB$, avec $GA + GB = 90$.

On en tire $GB = 2\,GA$, puis $3\,GA = 90$: on trouve $GA = 30$ cm et $GB = 60$ cm.

Contrôle : $2 \times 30 = 1 \times 60$.

Ce point d'appui est un **barycentre** : le point d'équilibre de points affectés de poids.

Dans ce chapitre, tu apprends à le définir avec des vecteurs, à le construire et à calculer ses coordonnées. Tu t'en sers ensuite pour démontrer que des points sont alignés, ou que des droites sont concourantes.

Tu emploies le calcul vectoriel du tronc commun : relation de Chasles, vecteurs colinéaires, coordonnées dans un repère.

Barycentre de deux points pondérés

L'équilibre écrit avec des vecteurs

En clair. Reprends la tige : 2 kg en A, 1 kg en B, et l'appui G à 30 cm de A.

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraires, et $GB = 2\,GA$. Donc $\overrightarrow{GB} = -2\,\overrightarrow{GA}$, c'est-à-dire :

$$2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Chaque vecteur est multiplié par la masse de son point : c'est l'équilibre, écrit avec des vecteurs.

Devine : Un point défini par des vecteurs

Soit A et B deux points distincts. Où se trouve le point G tel que $\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$?

A. Au milieu de $[AB]$.

Faux.

Le milieu équilibre deux poids égaux ; ici, B pèse trois fois plus que A.

B. Sur $[AB]$, plus près de A.

Faux.

Le plus grand poids attire G : ici, c'est celui de B.

C. Sur $[AB]$, plus près de B.

Juste.

Juste : G est entre A et B, trois fois plus près de B.

D. En dehors du segment $[AB]$.

Faux.

Avec deux poids positifs, l'équilibre se fait entre les deux points.

Correction

L'égalité donne $\overrightarrow{GA} = -3\,\overrightarrow{GB}$. Les deux vecteurs sont de sens contraires : G est entre A et B.

De plus, $GA = 3\,GB$: G est trois fois plus près de B que de A. Précisément :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Un tel point existe-t-il toujours ? Est-il unique ?

Pourquoi est-ce vrai ? La relation de Chasles ramène tous les vecteurs au point A. L'égalité donne alors directement $\overrightarrow{AG}$.

Rappel du tronc commun : un point A et un vecteur $\vec{u}$ étant donnés, un seul point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Existence, unicité, définition

Propriété : Existence et unicité du barycentre de deux points

Soit A et B deux points du plan, et a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$. Il existe un **unique** point G du plan tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point est caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

Démonstration

Étape 1. Soit G un point du plan. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, donc

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB}.$$

Étape 2. Ainsi $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à $(a+b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB}$. Comme $a + b \neq 0$ et $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG}$, cela équivaut à $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

Étape 3. Un point A et un vecteur étant donnés, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG}$ soit égal à ce vecteur. Il existe donc un unique point G vérifiant l'égalité de départ.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour trouver un point défini par une égalité vectorielle, **ramène tout à un point connu** grâce à la relation de Chasles. Ici, tout est ramené à A, et l'on obtient :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Cette égalité donne l'existence et l'unicité de G. Elle sert aussi à le construire.

Elle n'a de sens que si $a + b \neq 0$. Avec les poids 3 pour A et -3 pour B, la somme est nulle : $3\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}$ vaut $3\overrightarrow{BA}$, qui n'est pas nul lorsque $A \neq B$. Aucun point ne convient.

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans la preuve de l'existence et de l'unicité, quelle égalité ramène tout au point A ?

A. $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$

Juste.

Juste : c'est la relation de Chasles, de G à B en passant par A.

B. $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB}$

Faux.

Erreur de signe : de G à A, puis de A à B, on ajoute $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GA}$

Faux.

Le second membre vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}$, qui n'est pas $\overrightarrow{GB}$ en général.

D. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AB}$

Faux.

Pour aller de G à A en passant par B, il faudrait $\overrightarrow{BA}$, pas $\overrightarrow{AB}$.

Correction

C'est la relation de Chasles : $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$. Alors :

$$\begin{aligned} & a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} \\ &= (a+b)\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'un vecteur inconnu, $\overrightarrow{GA}$. On peut diviser par $a+b$, qui n'est pas nul.

Définition : Barycentre de deux points pondérés

Un **point pondéré** est un couple (A, a) formé d'un point A du plan et d'un réel a, appelé **poids** (ou coefficient) de A.

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$. L'unique point G tel que $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ s'appelle le **barycentre** des points pondérés (A, a) et (B, b). On note $G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$.

Lorsque $a = b$ (et $a \neq 0$), le barycentre s'appelle l'**isobarycentre** de A et B : c'est le milieu du segment $[AB]$, car alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{a}{2a}\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Exemple : construire un barycentre

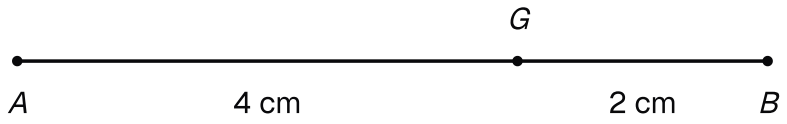
Premier cas. Soit A et B deux points tels que $AB = 6$ cm, et $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$. La somme des poids vaut $1 + 2 = 3$, non nulle.

D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}.$$

Tu places G sur $[AB]$, à 4 cm de A. Contrôle : G est plus près de B, le point le plus lourd.

Poids égaux. Pour $\mathrm{Bar}\{(A,5);(B,5)\}$, on trouve $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{10}\overrightarrow{AB}$: c'est l'isobarycentre, le milieu de $[AB]$.



G, barycentre de (A, 1) et (B, 2), partage [AB] en 4 cm côté A et 2 cm côté B.

Sur le segment ou en dehors ?

En clair. Avec deux poids positifs, G est entre A et B, comme l'appui de la tige.

Avec des poids de signes contraires, par exemple $(A,2)$ et $(B,-1)$, on trouve $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$: G est hors de $[AB]$.

Pourquoi est-ce vrai ? La réponse dépend d'un seul nombre :

$$t = \frac{b}{a+b}.$$

Le point G est sur $[AB]$ exactement quand t est entre 0 et 1.

Propriété : Position du barycentre de deux points

Soit A et B deux points distincts, a et b deux réels tels que $a+b \neq 0$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$.

- G appartient à la droite (AB).
- Si $ab \geq 0$ (poids de même signe), alors G appartient au segment $[AB]$.
- Si $ab < 0$ (poids de signes contraires), alors G n'appartient pas au segment $[AB]$.

Démonstration

Étape 1. On pose $t = \frac{b}{a+b}$. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, $\overrightarrow{AG} = t\,\overrightarrow{AB}$: les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc G appartient à la droite (AB).

Étape 2. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = s\,\overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq s \leq 1$. Comme $A \neq B$, un tel réel s est unique : G appartient à $[AB]$ si et seulement si $0 \leq t \leq 1$. Or $1 - t = \frac{a}{a+b}$.

Étape 3. Si $ab \geq 0$, les réels a et b sont de même signe que $a+b$ ou nuls, donc $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$: G appartient à $[AB]$.

Étape 4. Si $ab < 0$, alors $t(1-t) = \dfrac{ab}{(a+b)^2} < 0$: l'un des réels t et $1-t$ est strictement négatif, donc t n'est pas compris entre 0 et 1, et G n'appartient pas à $[AB]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : écrire $\overrightarrow{AG} = t\,\overrightarrow{AB}$, puis regarder où se trouve t.

Si t est entre 0 et 1, G est sur le segment ; sinon, il est hors du segment.

Avec des poids de même signe, t est entre 0 et 1. Avec des poids de signes contraires, il ne l'est jamais.

Vérifie : Des poids de signes contraires

Soit A et B deux points distincts, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,-5)\}$. Où se trouve G ?

A. Entre A et B.

Faux.
Un poids est négatif : l'équilibre sort du segment $[AB]$.

B. Au-delà de B.

Juste.
Juste : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\dfrac{5}{3}$ dépasse 1.

C. Au-delà de A.

Faux.
La fraction $\dfrac{5}{3}$ est positive : G est du côté de B.

D. Au milieu de $[AB]$.

Faux.
Le milieu correspond à deux poids égaux ; ici, ils sont différents.

Correction

La somme des poids vaut $2 + (-5) = -3$, non nulle. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{-5}{-3}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Ici $t = \dfrac{5}{3}$ dépasse 1 : G est sur la droite (AB), au-delà de B. C'est conforme à l'énoncé : les poids sont de signes contraires.

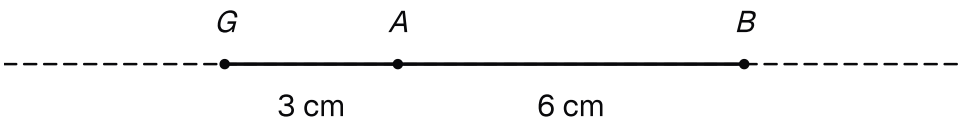
Exemple : des poids de signes contraires

Signes contraires. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-1)\}$. La somme des poids vaut $3+(-1)=2$, non nulle. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{2}\,\overrightarrow{AB}.$$

Les poids sont de signes contraires : G est sur (AB), hors de $[AB]$, du côté de A. Si $AB = 6$ cm, alors $GA = 3$ cm et $GB = 9$ cm.

Un cas particulier. Le segment correspond à $ab \geq 0$, et non à $ab > 0$. Pour $\mathrm{Bar}\{(A,0);(B,2)\}$, on a $ab = 0$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$: le barycentre est B, qui appartient bien à $[AB]$.



Avec les poids 3 et -1, le barycentre G quitte le segment : il se place sur (AB), avant A.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : construire le barycentre de deux points

1. **Vérifie** que $a+b \neq 0$; sinon, le barycentre n'existe pas.
2. **Écris** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$, avec le poids de B en haut de la fraction.
3. **Place** G à partir de A, en reportant cette fraction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. **Contrôle** la position : poids de même signe, G sur $[AB]$; signes contraires, G hors de $[AB]$, du côté du poids le plus grand en valeur absolue.

Attention : quel poids en haut de la fraction ?

✗ « $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,4)\}$, donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{5}\,\overrightarrow{AB}$. »

✓ Le poids de B va au numérateur :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{AB}.$$

Contrôle : G doit être plus près de B, qui a le plus grand poids. Avec $\dfrac{1}{5}$, il serait près de A.

À toi : Deux constructions

Soit A et B deux points tels que $AB = 8$ cm. Construis $G_1 = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$ et $G_2 = \mathrm{Bar}\{(A,-1);(B,5)\}$. Pour chacun, donne sa distance à A et dis s'il est sur $[AB]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la somme des poids, puis applique la méthode de construction.
Indice 2
Pour G_2, la fraction vaut $\dfrac{5}{4}$: elle dépasse 1.
Indice 3
Point délicat : le poids de B va au numérateur, et $-1+5$ vaut 4, pas 6.

Réponse
Point G_1. La somme des poids vaut $1+3=4$, non nulle. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points :

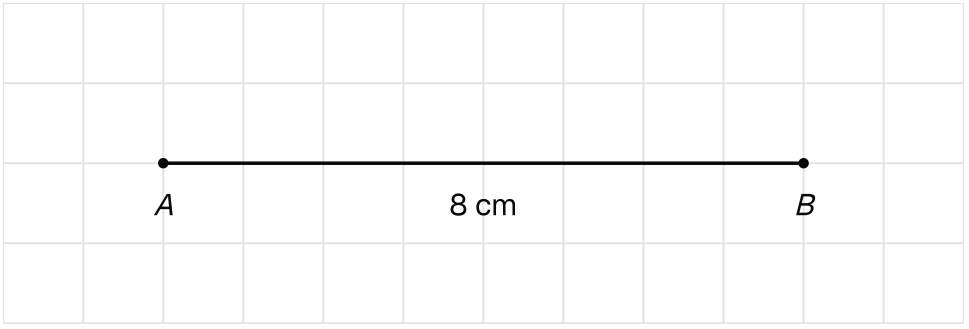
$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}.$$

Donc G_1 est sur $[AB]$, à 6 cm de A.

Point G_2. La somme des poids vaut $-1+5=4$, non nulle, et :

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{5}{4}\,\overrightarrow{AB}.$$

Donc G_2 est sur la droite (AB), au-delà de B, à 10 cm de A et à 2 cm de B. C'est conforme à la position du barycentre : les poids -1 et 5 sont de signes contraires.



Les données de l'activité sur papier quadrillé : le segment [AB] de 8 cm, sans G1 ni G2.

Barycentre de trois ou quatre points

Une plaque en équilibre

En clair. Une plaque triangulaire légère porte trois masses à ses sommets : 2 kg en A, 1 kg en B et 1 kg en C. En quel point la poser sur une pointe pour qu'elle reste horizontale ?

Ce point d'équilibre G s'écrit comme avec deux masses, avec un terme de plus :

$$2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Fais la figure sur ton cahier, avec un triangle quelconque.

Devine : Où poser la plaque ?

On note A' le milieu de $[BC]$. Où se trouve le point d'équilibre G de la plaque ?

A. Au point commun des trois médianes du triangle.

Faux.

Ce point équilibre trois masses égales ; ici, A pèse deux fois plus que B ou C.

B. Au milieu du segment $[AA']$.

Juste.

Juste : les masses de B et C agissent comme 2 kg placés en A'.

C. Au point A', milieu de $[BC]$.

Faux.

En A', seules les masses de B et C s'équilibrent ; celle de A tire G vers A.

D. Au sommet A, le plus lourd.

Faux.

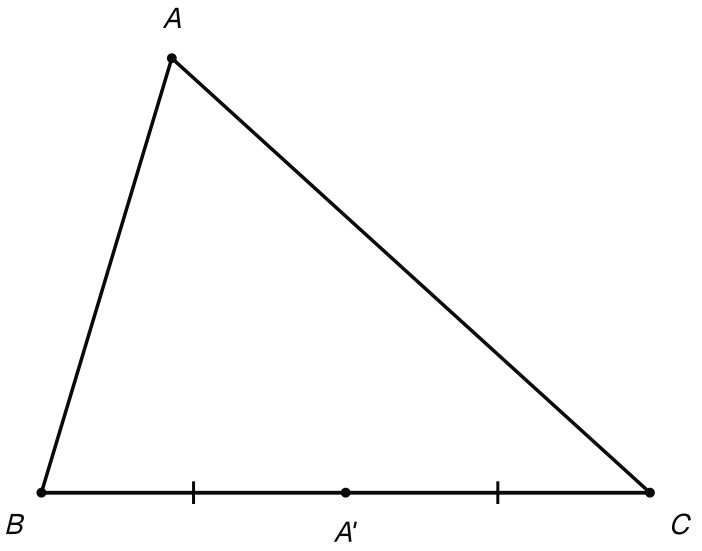
En A, rien n'équilibre les masses de B et C : G est entre A et A'.

Correction

Les masses de B et C sont égales : ensemble, elles agissent comme 2 kg placés en A', le milieu de $[BC]$.

Il reste 2 kg en A et 2 kg en A' : l'équilibre est au milieu de $[AA']$.

Ce regroupement sera justifié plus loin, par l'associativité. Le calcul qui suit l'énoncé le confirme déjà.



La plaque triangulaire ABC et le milieu A' de [BC] ; le point d'équilibre G n'est pas encore placé.

Pour deux points, la relation de Chasles ramenait tout à A.

Pourquoi est-ce vrai ? Avec trois ou quatre points, le même geste s'applique, terme par terme. On obtient encore une égalité qui donne $\overrightarrow{AG}$, à condition que la somme des poids ne soit pas nulle.

Existence, unicité, définition

Propriété : Existence et unicité du barycentre de trois ou quatre points

Soit A, B, C trois points du plan et a, b, c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$. Il existe un **unique** point G du plan tel que

$$a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}+c\,\overrightarrow{GC}=\vec{0},$$

et ce point est caractérisé par $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{a+b+c}\left(b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}\right)$.

De même, pour quatre points A, B, C, D et quatre réels a, b, c, d tels que $a+b+c+d\neq 0$, il existe un unique point G tel que $a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}+c\,\overrightarrow{GC}+d\,\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, caractérisé par $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{a+b+c+d}\left(b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}+d\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Démonstration

Étape 1. Soit G un point du plan. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$, donc

$$a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}+c\,\overrightarrow{GC}=(a+b+c)\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}.$$

Étape 2. Comme $a+b+c\neq 0$ et $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}$, la somme est nulle si et seulement si $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{a+b+c}\left(b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}\right)$.

Étape 3. Un point A et un vecteur étant donnés, un unique point G vérifie cette égalité. Pour quatre points, le même calcul, avec $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}$, ajoute le terme $d\,\overrightarrow{AD}$ et remplace $a+b+c$ par $a+b+c+d$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même idée qu'avec deux points : la relation de Chasles **ramène tout au point** A.

Il ne reste qu'un vecteur inconnu, $\overrightarrow{GA}$, multiplié par la somme des poids. Diviser par cette somme exige qu'elle ne soit pas nulle.

On obtient $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: c'est la formule qui permet de construire G.

Vérifie : Le rôle de l'hypothèse

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse $a+b+c \neq 0$?

A. À pouvoir appliquer la relation de Chasles.

Faux.
La relation de Chasles s'applique toujours, quels que soient les poids.

B. À rendre les trois poids positifs.

Faux.
L'hypothèse porte sur la somme : des poids négatifs restent permis.

C. À ce que A, B, C ne soient pas alignés.

Faux.
L'énoncé n'exige rien sur la position des trois points.

D. À diviser par la somme des poids pour isoler $\overrightarrow{AG}$.

Juste.
Juste : on ne divise jamais par zéro.

Correction
À l'étape 2 de la preuve, l'égalité de départ s'écrit :

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Pour isoler le vecteur inconnu, on divise par $a+b+c$. Il faut donc que ce réel ne soit pas nul : c'est tout le rôle de l'hypothèse.

Définition : Barycentre de trois ou quatre points pondérés

Soit (A, a), (B, b), (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$. L'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ s'appelle le **barycentre** de ces trois points pondérés. On note $G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.

On définit de même le barycentre $\mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$ de quatre points pondérés dont la somme des poids $a + b + c + d$ n'est pas nulle.

Lorsque tous les poids sont égaux (et non nuls), le barycentre s'appelle l'**isobarycentre** des points.

Exemple : la plaque, puis trois poids égaux

Soit A' le milieu de $[BC]$. Rappel du tronc commun : alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AA'}$.

La plaque. Pour $G = \mathrm{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$, la somme des poids vaut 4, non nulle. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AA'}$. Donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AA'}$: G est le milieu de $[AA']$, comme prévu.

Trois poids égaux. L'isobarycentre G_0 de A, B, C vérifie :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_0} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}.\end{aligned}$$

C'est le centre de gravité du triangle.

Le parallélogramme, une somme nulle, puis à toi

Exemple : l'isobarycentre d'un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, et K l'isobarycentre de ses quatre sommets. La somme des poids vaut 4.

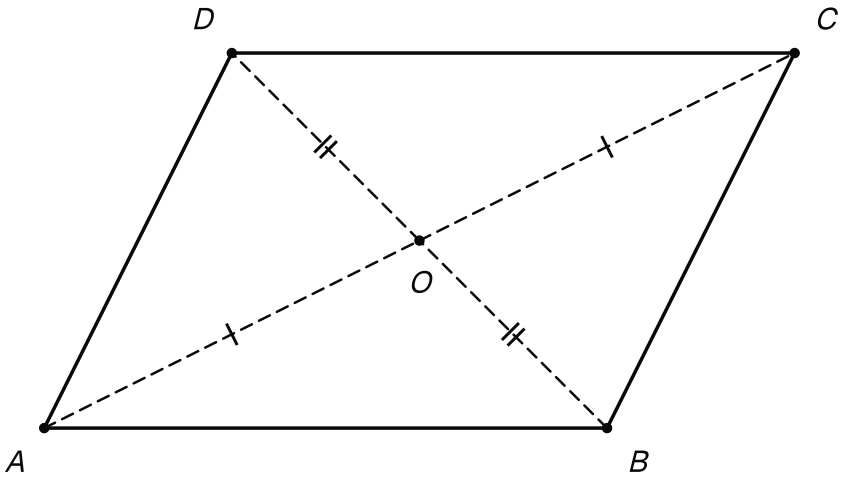
D'après l'existence et l'unicité du barycentre de quatre points :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Dans un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \frac{1}{4} \times 2\,\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ainsi K est le milieu de $[AC]$: c'est le centre O.



Dans le parallélogramme ABCD, l'isobarycentre K des sommets se confond avec le centre O.

Attention : une somme de poids nulle

✗ « Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,-3)\}$. »

✓ Ici, $2+1+(-3)=0$: ce barycentre n'existe pas. Pour tout point M, la relation de Chasles donne :

$$2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} = 2\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Ce vecteur ne dépend pas de M. Dans un triangle ABC, il n'est pas nul, car $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas colinéaires : aucun point ne convient.

Calcule toujours la somme des poids avant d'écrire « Bar ».

Vérifie : Lequel existe ?

Soit ABC un triangle. Lequel de ces barycentres existe ?

A. $\mathrm{Bar}\{(A,1);(B,-4);(C,3)\}$
Faux.
La somme vaut $1-4+3=0$: aucun barycentre.

B. $\mathrm{Bar}\{(A,-2);(B,-1);(C,3)\}$
Faux.
La somme vaut $-2-1+3=0$: aucun barycentre.

C. $\mathrm{Bar}\{(A,2);(B,-5);(C,3)\}$
Faux.

La somme vaut $2-5+3=0$: aucun barycentre.

D. $\mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-2);(C,-2)\}$

Juste.

Juste : la somme vaut $3-2-2=-1$, non nulle.

Correction

On calcule chaque somme de poids : 0, 0, 0, puis $3-2-2=-1$. Seule la dernière n'est pas nulle.

D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, ce barycentre existe. Une somme négative ne gêne pas : seule une somme nulle est interdite.

À toi : Un point du triangle

Soit ABC un triangle et $G=\mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2);(C,1)\}$. Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Puis, avec B' le milieu de $[AC]$, montre que G est le milieu de $[BB']$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la formule de l'existence et de l'unicité, avec les poids 1, 2 et 1.

Indice 2

Exprime ensuite $\overrightarrow{AB'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Indice 3

Point délicat : le milieu J de $[BB']$ vérifie $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}\right)$; compare les deux écritures.

Réponse

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$. La somme des poids vaut $1+2+1=4$, non nulle. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{1}{4}\left(2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Le milieu de $[BB']$. Soit J le milieu de $[BB']$. Comme $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}\right)\\&=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AJ}$, donc $G=J$: G est le milieu de $[BB']$.

Homogénéité et propriété caractéristique

Changer d'unité de masse

En clair. Sur la tige du début, remplace les kilogrammes par des grammes : 2000 g en A, 1000 g en B.

Le point d'appui ne bouge pas : $2000 \times 30 = 1000 \times 60$, comme $2 \times 30 = 1 \times 60$.

Changer d'unité multiplie toutes les masses par un même nombre, ici 1000. On devine que le barycentre ne change pas.

Devine : Les mêmes poids, autrement

Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$. Lequel de ces barycentres est aussi égal à G ?

A. $\mathrm{Bar}\{(A,3);(B,0);(C,4)\}$

Faux.
On a ajouté 1 à chaque poids : cela déplace le barycentre en général.

B. $\mathrm{Bar}\{(A,4);(B,-1);(C,6)\}$

Faux.
Le poids de B n'a pas été multiplié : un seul poids oublié suffit à déplacer le point.

C. $\mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,3)\}$

Faux.
Changer le signe d'un seul poids modifie le barycentre.

D. $\mathrm{Bar}\{(A,-4);(B,2);(C,-6)\}$

Juste.
Juste : les trois poids sont multipliés par -2.

Correction
Les poids -4, 2 et -6 sont ceux de G, multipliés par -2. Le facteur est le même pour les trois points, et il n'est pas nul.

L'énoncé qui suit affirme que le barycentre ne change pas. Les autres choix modifient les poids de façon inégale.

Pourquoi est-ce vrai ? Multiplier par un réel k non nul une égalité de second membre $\vec{0}$ la conserve. Il reste à vérifier que la nouvelle somme des poids, $k(a+b+c)$, n'est pas nulle.

Homogénéité

Propriété : Homogénéité du barycentre

Le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie tous les poids par un **même** réel non nul : si $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ et si k est un réel non nul, alors

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,ka);(B,kb);(C,kc)\}.$$

Il en est de même pour deux ou quatre points pondérés.

Démonstration

Étape 1. Par définition du barycentre, $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En multipliant par k, on obtient $ka\,\overrightarrow{GA} + kb\,\overrightarrow{GB} + kc\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Étape 2. La somme des nouveaux poids est $ka + kb + kc = k(a+b+c)$, qui n'est pas nulle car $k \neq 0$ et $a+b+c \neq 0$.

Étape 3. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, un seul point vérifie l'égalité de l'étape 1 : c'est G. Donc $G = \mathrm{Bar}\{(A, ka); (B, kb); (C, kc)\}$. Le calcul est le même pour deux ou quatre points.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur l'**unicité** du barycentre : un seul point vérifie l'égalité avec les nouveaux poids, et G la vérifie.

Retiens ce réflexe : pour montrer qu'un point est un barycentre, vérifie que la somme des poids n'est pas nulle, puis qu'il satisfait l'égalité qui définit le barycentre.

Vérifie : Un facteur non nul

Dans la preuve, pourquoi faut-il $k \neq 0$?

A. Pour que la somme des nouveaux poids, $k(a+b+c)$, ne soit pas nulle.
Juste.
Juste : sinon, le barycentre des nouveaux poids n'existerait pas.

B. Pour que tous les nouveaux poids restent positifs.
Faux.
Avec $k = -2$, les poids changent de signe, et l'énoncé s'applique encore.

C. Pour avoir le droit de multiplier l'égalité par k.
Faux.
On peut multiplier une égalité par n'importe quel réel, même par zéro.

D. Pour que G reste sur la droite (AB).
Faux.
La preuve ne parle d'aucune droite.

Correction
Avec $k = 0$, tous les nouveaux poids sont nuls, et leur somme aussi : le barycentre ne serait pas défini.

Avec $k \neq 0$ et $a+b+c \neq 0$, la somme $k(a+b+c)$ n'est pas nulle, et l'unicité s'applique.

Exemple : simplifier les poids

Diviser les poids. Pour $G = \mathrm{Bar}\{(A,6);(B,-9)\}$, on divise les poids par 3. D'après l'homogénéité, $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,-3)\}$. La somme vaut -1, et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{-3}{-1}\overrightarrow{AB}\\ &= 3\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Poids fractionnaires. Ils se simplifient aussi. En multipliant par 6 :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\left\{\left(A,\frac{1}{2}\right);\left(B,\frac{1}{3}\right)\right\}\\ &= \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,2)\}.\end{aligned}$$

Attention : multiplier, jamais ajouter

✗ « $\mathrm{Bar}\{(A,1);(B,2)\} = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,3)\}$, car on a ajouté 1 à chaque poids. »

✓ Ajouter ne conserve pas le barycentre. Le premier point vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, le second $\overrightarrow{AG'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$: ce sont deux points distincts.

Seule la **multiplication** de tous les poids par un même réel non nul est permise.

Réduire une somme de vecteurs

En clair. Une somme comme $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ change avec le point M. Si $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$, elle s'écrit pourtant avec un seul vecteur : $3\overrightarrow{MG}$.

Deux vecteurs deviennent un seul, plus facile à étudier.

Pourquoi est-ce vrai ? On insère G dans chaque vecteur avec la relation de Chasles. Les termes restants forment la somme nulle qui définit G.

Propriété : Propriété caractéristique du barycentre

Soit (A,a), (B,b), (C,c) trois points pondérés tels que $a+b+c \neq 0$, et G un point du plan. Alors $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ si et seulement si, **pour tout point** M du plan,

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}.$$

Il en est de même pour deux ou quatre points pondérés.

Démonstration

Étape 1. Soit M un point du plan. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, et de même pour B et C. Donc

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}.$$

Étape 2. Si G est le barycentre, la somme $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC}$ est nulle : l'égalité annoncée est vraie pour tout point M.

Étape 3. Réciproquement, si l'égalité annoncée est vraie pour tout point M, on l'écrit pour $M = G$: $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{GG} = \vec{0}$. Par définition, G est le barycentre. Le calcul est le même pour deux ou quatre points pondérés.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **insérer le barycentre** dans chaque vecteur, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$.

Les termes en $\overrightarrow{MG}$ se regroupent, avec la somme des poids en facteur. Les autres forment la somme nulle qui définit G.

Pour la réciproque, on écrit l'égalité au point $M = G$.

Vérifie : Le point de la réciproque

Dans la preuve de la réciproque, l'égalité est vraie pour tout point M. En quel point M la preuve l'écrit-elle ?

A. En l'origine O d'un repère.

Faux.
Aucun repère n'intervient dans cette preuve.

B. Au point $M = G$.

Juste.
Juste : $\overrightarrow{GG} = \vec{0}$, et l'on retrouve la définition du barycentre.

C. Au milieu de $[AB]$.

Faux.
Ce point ne fait disparaître aucun terme.

D. En un point M pris au hasard.

Faux.
Un point quelconque ne simplifie rien : il faut un choix précis.

Correction
On écrit l'égalité pour $M = G$. Son second membre devient $(a+b+c)\,\overrightarrow{GG} = \vec{0}$. Il reste :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

C'est la définition du barycentre.

Exemple : réduire une somme

Réduire. Soit ABC un triangle. Pour tout point M, réduisons :

$$\vec{u} = 3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

La somme des poids vaut $3 - 1 + 1 = 3$, non nulle. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-1);(C,1)\}$. D'après la propriété caractéristique, $\vec{u} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

Placer G. Pour $M = A$, on obtient :

$$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AG},$$

d'où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$.

L'hypothèse compte. Dans $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$, la somme des poids est nulle. Ce vecteur vaut $\overrightarrow{BA}$ pour tout M : il ne se réduit à aucun $\overrightarrow{MG}$.

La méthode, puis à toi

Méthode : réduire une somme de vecteurs

1. **Lis** les poids : ce sont les coefficients des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$…
2. **Additionne** les poids, et vérifie que leur somme s n'est pas nulle.
3. **Nomme** G le barycentre des points affectés de ces poids.
4. **Remplace** la somme par $s\,\overrightarrow{MG}$, en citant la propriété caractéristique.

Exemple : placer un point grâce à la réduction

Cherchons le point M tel que :

$$\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{AB}.$$

Réduire. La somme des poids vaut 4, non nulle. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$: $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AB}$. D'après la propriété caractéristique, l'égalité s'écrit $4\,\overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Placer M. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\\ &= \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Conclusion. Le point M est sur $[AB]$, au quart du segment à partir de A.

> **À toi : Réduire, puis exprimer**

Soit ABC un triangle. Pour tout point M, réduis $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + 3\,\overrightarrow{MC}$. Écris ensuite cette égalité pour $M = A$, et déduis-en $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la somme des poids : $1 - 2 + 3$.
Indice 2
Nomme G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, -2)$ et $(C, 3)$, puis applique la méthode de réduction.
Indice 3
Point délicat : pour $M = A$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul ; il ne reste que deux termes dans $\vec{w}$.

Réponse
Réduire. La somme des poids vaut $1 - 2 + 3 = 2$, non nulle. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$. D'après la propriété caractéristique, pour tout point M :

$$\vec{w} = 2\,\overrightarrow{MG}.$$

Au point A. Pour $M = A$, le terme $\overrightarrow{AA}$ est nul, donc :

$$-2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AG}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AC}$.

Associativité : le barycentre partiel

Regrouper des masses

En clair. Reprends la plaque : 2 kg en A, 1 kg en B, 1 kg en C. Les masses de B et C s'équilibrent au milieu A' de $[BC]$.

Pour l'équilibre de la plaque entière, on peut les remplacer par une seule masse de 2 kg posée en A'. C'est ainsi qu'on a trouvé le milieu de $[AA']$.

Regrouper des masses : c'est l'idée de l'associativité.

Devine : Regrouper deux points

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$. En regroupant A et B, où trouves-tu G ?

A. Au milieu du segment $[IC]$.

Juste.
Juste : I reçoit le poids $1 + 1 = 2$, autant que C.

B. Au point I lui-même.

Faux.
Le point C a aussi un poids : il attire G hors de I.

C. Sur $[IC]$, aux deux tiers à partir de I.

Faux.

C'est ce qu'on obtient en donnant à I le poids 1 ; or I reçoit $1+1=2$.

D. Sur $[IC]$, au tiers à partir de I.

Faux.

Ce serait le cas avec le poids 2 pour I et 1 pour C : les poids sont échangés.

Correction

Les points A et B ont des poids égaux : leur barycentre partiel est I, avec le poids $1+1=2$.

Il reste $(I,2)$ et $(C,2)$, deux poids égaux : G est le milieu de $[IC]$. L'énoncé qui suit justifie ce regroupement.

On remplace un groupe de points par son barycentre, affecté de la somme de leurs poids : le barycentre ne change pas.

Pourquoi est-ce vrai ? La propriété caractéristique, écrite au point G, transforme la somme du groupe en un seul vecteur. Il ne reste qu'un barycentre de deux points.

Associativité

Propriété : Associativité du barycentre

- Soit (A,a), (B,b), (C,c) trois points pondérés tels que $a+b+c\neq 0$ et $a+b\neq 0$. Si $H=\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$, alors
$$\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}=\mathrm{Bar}\{(H,a+b);(C,c)\}.$$
- Soit (A,a), (B,b), (C,c), (D,d) quatre points pondérés tels que $a+b+c+d\neq 0$, $a+b\neq 0$ et $c+d\neq 0$. Si $H=\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$ et $K=\mathrm{Bar}\{(C,c);(D,d)\}$, alors
$$\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c);(D,d)\}=\mathrm{Bar}\{(H,a+b);(K,c+d)\}.$$
- Soit (A,a), (B,b), (C,c), (D,d) quatre points pondérés tels que $a+b+c+d\neq 0$ et $a+b+c\neq 0$. Si $L=\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$, alors
$$\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c);(D,d)\}=\mathrm{Bar}\{(L,a+b+c);(D,d)\}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $G=\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$. D'après la propriété caractéristique appliquée au barycentre H de (A,a) et (B,b), avec $M=G$: $a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}=(a+b)\,\overrightarrow{GH}$.

Étape 2. Par définition de G, $a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}+c\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, donc $(a+b)\,\overrightarrow{GH}+c\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Étape 3. Comme $(a+b)+c\neq 0$, la définition du barycentre de deux points donne $G=\mathrm{Bar}\{(H,a+b);(C,c)\}$.

Étape 4. Pour quatre points, soit G leur barycentre. La propriété caractéristique, avec $M = G$, donne $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = (a+b)\,\overrightarrow{GH}$ et $c\,\overrightarrow{GC} + d\,\overrightarrow{GD} = (c+d)\,\overrightarrow{GK}$, d'où $(a+b)\,\overrightarrow{GH} + (c+d)\,\overrightarrow{GK} = \vec{0}$; de même, $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = (a+b+c)\,\overrightarrow{GL}$, d'où $(a+b+c)\,\overrightarrow{GL} + d\,\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. On conclut comme à l'étape 3.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve applique la **propriété caractéristique au barycentre partiel** H, au point $M = G$:

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = (a+b)\,\overrightarrow{GH}.$$

Le groupe formé de A et B se résume alors à un seul vecteur. Retiens d'où vient le poids de H : c'est le facteur $a+b$ de cette égalité.

Vérifie : D'où vient le regroupement ?

Dans la preuve, d'où vient l'égalité $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} = (a+b)\,\overrightarrow{GH}$?

A. De la définition de G, le barycentre des trois points.

Faux.
La définition de G fait intervenir les trois points ; ici, seuls A et B apparaissent.

B. De l'homogénéité, appliquée aux poids de A et B.

Faux.
Aucun poids n'est multiplié par un réel dans cette étape.

C. De la propriété caractéristique, appliquée à H.

Juste.
Juste : elle est écrite pour le barycentre H, au point $M = G$.

D. Des coordonnées du barycentre dans un repère.

Faux.
La preuve n'utilise aucun repère.

Correction
H est le barycentre de (A, a) et (B, b). D'après sa propriété caractéristique, pour tout point M :

$$a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MH}.$$

La preuve choisit $M = G$.

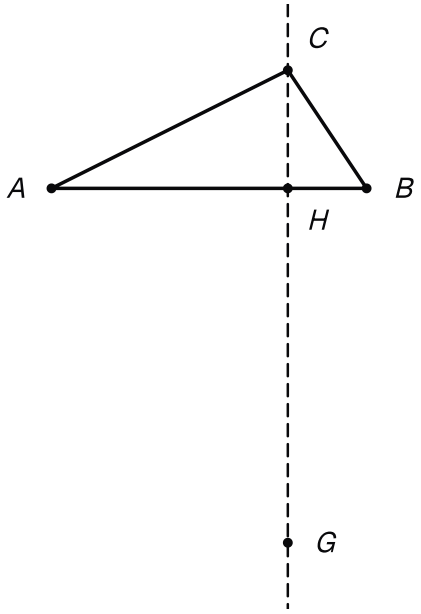
Exemple : construire un barycentre de trois points

Soit ABC un triangle et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3);(C,-3)\}$. La somme des poids vaut 1, non nulle.

Regrouper A et B. Ce groupe a pour somme 4 : soit $H = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$, tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(H,4);(C,-3)\}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HG} &= \frac{-3}{1}\overrightarrow{HC} \\ &= -3\overrightarrow{HC}.\end{aligned}$$

L'hypothèse compte. Le groupe de B et C a pour somme $3 + (-3) = 0$: il n'a pas de barycentre, et on ne peut pas le regrouper.



Construction en deux temps : H aux trois quarts de [AB], puis G sur (HC), au-delà de H, avec HG = 3 HC.

Méthode et piège

Méthode : construire par associativité

1. **Choisis** un groupe de points dont la somme des poids n'est pas nulle.
2. **Construis** son barycentre partiel H.
3. **Donne** à H la somme des poids du groupe.
4. **Termine** avec H et les points restants, jusqu'à n'avoir plus qu'un barycentre de deux points.

Attention : le poids du barycentre partiel

✗ « I est le milieu de $[AB]$, donc $\mathrm{Bar}\{(A,3);(B,3);(C,2)\} = \mathrm{Bar}\{(I,1);(C,2)\}$. »

✓ Le barycentre partiel reçoit la **somme** des poids du groupe : I a le poids $3 + 3 = 6$. Le barycentre est donc :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(I,6);(C,2)\}\\&=\mathrm{Bar}\{(I,3);(C,1)\},\end{aligned}$$

au quart de $[IC]$ à partir de I. Avec le poids 1 pour I, on trouverait un autre point, aux deux tiers.

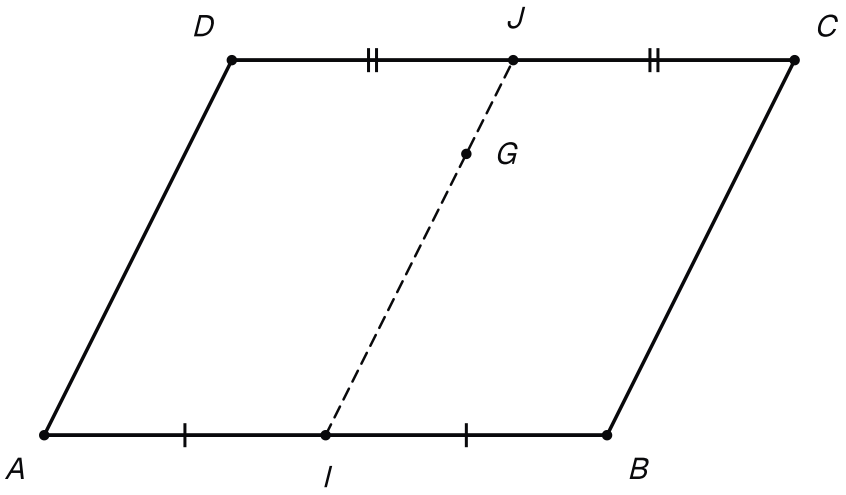
Exemple : quatre points, deux groupes

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$. On cherche le point :

$$\begin{aligned}G=\mathrm{Bar}\{&(A,1);(B,1);\\&(C,3);(D,3)\}.\end{aligned}$$

La somme des poids vaut 8. Les deux groupes, A et B d'une part, C et D d'autre part, ont pour sommes 2 et 6, non nulles.

Par associativité, $G=\mathrm{Bar}\{(I,2);(J,6)\}$, puis $G=\mathrm{Bar}\{(I,1);(J,3)\}$ par homogénéité. Donc $\overrightarrow{IG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$: G est sur $[IJ]$, plus près de J.



Les deux barycentres partiels I et J, puis G sur [IJ], aux trois quarts en partant de I.

Physique, à toi, le coin devoir

Exemple : Exemple de physique : un centre d'inertie

Une autre plaque triangulaire légère porte 1 kg en A, 1 kg en B et 4 kg en C. En physique, son centre d'inertie G est le barycentre des sommets affectés de leurs masses : $G=\mathrm{Bar}\{(A,1);(B,1);(C,4)\}$.

On regroupe A et B : leur barycentre est le milieu I de $[AB]$, avec la masse 2 kg. Par associativité, $G=\mathrm{Bar}\{(I,2);(C,4)\}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \frac{4}{6}\overrightarrow{IC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{IC}.\end{aligned}$$

Le centre d'inertie est sur la médiane issue de C.

À toi : Choisir le bon groupe

Soit ABC un triangle et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$. Construis G par associativité, en regroupant d'abord A et B. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule la somme des poids du groupe formé de A et B.
Indice 2
Le groupe formé de A et B a une somme de poids non nulle : calcule $\overrightarrow{AH}$ avec la formule des deux points.
Indice 3
Point délicat : le groupe formé de B et C a une somme de poids nulle ; il ne se regroupe pas.

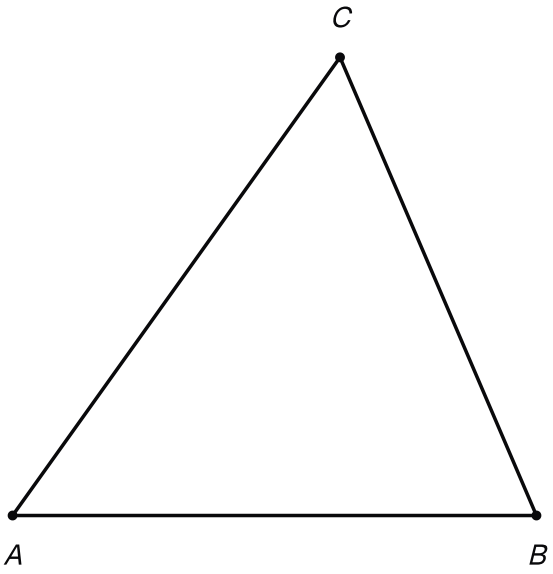
Réponse
Somme des poids. Elle vaut $2-1+1=2$, non nulle.

Barycentre partiel. Le groupe de A et B a pour somme $2-1=1$, non nulle. Son barycentre H vérifie :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \frac{-1}{1}\overrightarrow{AB}\\ &= -\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Donc H est le symétrique de B par rapport à A.

Conclusion. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(H,1);(C,1)\}$: G est le milieu de $[HC]$.



Le triangle ABC de l'activité, seul : à toi d'y construire H, puis G.

Remarque **: Coin devoir : rédiger un regroupement**

En devoir, chaque regroupement se justifie par une somme de poids. Pour la plaque de l'exemple de physique, écris :

« La somme des poids de A et B vaut $1+1=2$, non nulle. Soit I leur barycentre, le milieu de $[AB]$. Par associativité, $G=\mathrm{Bar}\{(I,2);(C,4)\}$. »

Vérifie d'abord la somme de tous les poids, puis celle du groupe. Nomme toujours la propriété employée.

Coordonnées du barycentre

Une moyenne avec coefficients

En clair. Ta moyenne trimestrielle est une moyenne **pondérée** : chaque note compte selon son coefficient. Avec 12 au coefficient 1 et 15 au coefficient 2, la moyenne vaut :

$$\frac{1\times 12+2\times 15}{1+2}=14.$$

Place ces notes sur un axe gradué. La moyenne est le barycentre des points d'abscisses 12 et 15, de poids 1 et 2.

Devine : Sur un axe

Sur un axe, le point A a pour abscisse 2 et le point B pour abscisse 10. Quelle est l'abscisse de $G=\mathrm{Bar}\{(A,3);(B,1)\}$?

A. 6

Faux.

C'est la moyenne simple de 2 et 10 : elle oublie les poids.

B. 8

Faux.

Tu as échangé les poids : G doit être plus près de A, qui pèse plus.

C. 4

Juste.

Juste : $\dfrac{3\times 2+1\times 10}{4}=4$.

D. 16

Faux.

Tu as oublié de diviser par la somme des poids, qui vaut 4.

Correction

On calcule une moyenne avec coefficients :

$$\frac{3\times 2+1\times 10}{3+1}=\frac{16}{4}=4.$$

Contrôle : 4 est entre 2 et 10, plus près de 2, l'abscisse du point qui a le plus grand poids.

Dans un repère, les coordonnées du barycentre se calculent de la même façon, abscisse et ordonnée séparément.

Pourquoi est-ce vrai ? La propriété caractéristique, écrite au point O, donne le vecteur $\overrightarrow{OG}$.

Rappel du tronc commun : si O est l'origine, $\overrightarrow{OA}$ a les coordonnées de A ; et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x_B-x_A, y_B-y_A).

Les coordonnées du barycentre

Propriété : Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ trois points, a, b, c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$, et $G=\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$. Alors

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}\quad\text{et}\quad y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}.$$

Pour deux ou quatre points pondérés, la règle est la même : chaque coordonnée de G est la moyenne des coordonnées des points, pondérée par leurs poids.

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété caractéristique, appliquée avec $M=O$:

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{OG}=a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}+c\,\overrightarrow{OC}.$$

Étape 2. Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont celles de A, soit (x_A, y_A) ; de même pour B, C et G. En comparant les abscisses, puis les ordonnées, des deux membres : $(a+b+c)\,x_G = ax_A + bx_B + cx_C$ et $(a+b+c)\,y_G = ay_A + by_B + cy_C$.

Étape 3. On divise par $a+b+c$, qui n'est pas nul. Le calcul est le même pour deux ou quatre points.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve écrit la propriété caractéristique au point $M = O$, l'origine du repère. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a les mêmes coordonnées que le point A.

Une égalité de vecteurs devient alors deux égalités de nombres : une pour les abscisses, une pour les ordonnées.

Vérifie : Le choix de l'origine

Dans la preuve, pourquoi écrit-on la propriété caractéristique au point $M = O$?

A. Parce que O est toujours le barycentre.

Faux.

O n'a aucun lien avec les poids : il est fixé par le repère.

B. Parce que $\overrightarrow{OA}$ a les coordonnées du point A.

Juste.

Juste : les vecteurs issus de O donnent directement les coordonnées des points.

C. Parce que le vecteur $\overrightarrow{OO}$ est nul.

Faux.

O n'est pas un des points pondérés : aucun vecteur $\overrightarrow{OO}$ n'apparaît.

D. Parce que la somme des poids vaut alors 1.

Faux.

Le choix du point ne change ni les poids, ni leur somme.

Correction

Au point O, l'égalité devient :

$$(a+b+c)\,\overrightarrow{OG} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}.$$

Or $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (x_A, y_A), et de même pour les autres points. On compare les abscisses, puis les ordonnées.

Exemple : un calcul de coordonnées

Dans un repère, soit $A(1,4)$, $B(5,-2)$, $C(-1,1)$ et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$. La somme des poids vaut $2+1-1=2$, non nulle. On applique les coordonnées du barycentre.

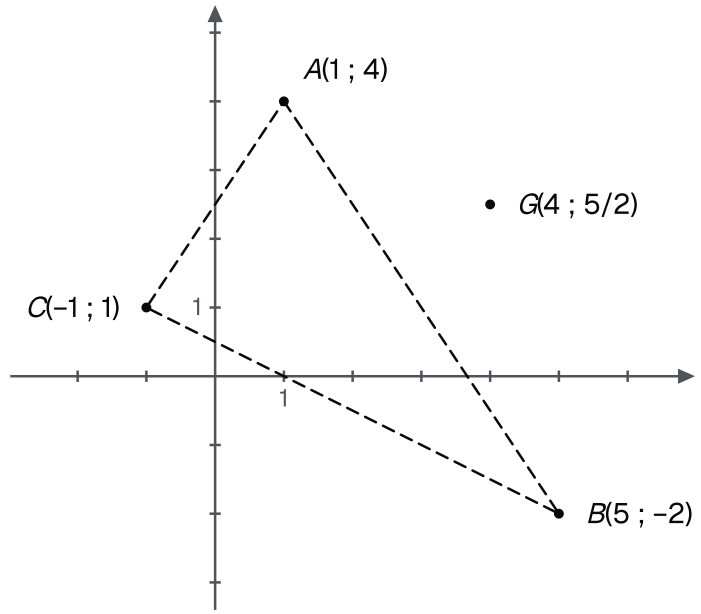
Abscisse. D'après la formule, on divise $2\times 1+1\times 5+(-1)\times(-1)=8$ par la somme des poids :

$$x_G = \frac{8}{2} = 4.$$

Ordonnée. De même, $2\times 4+1\times(-2)+(-1)\times 1=5$, donc :

$$y_G = \frac{5}{2}.$$

Contrôle par les vecteurs. $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $\left(3,-\frac{3}{2}\right)$, tout comme $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.



Les points A, B, C du calcul et le barycentre G, dont les coordonnées sont celles trouvées.

Méthode, piège, physique, à toi

Méthode : calculer les coordonnées d'un barycentre

1. **Note**, pour chaque point, ses coordonnées et son poids.
2. **Additionne** les poids, et vérifie que leur somme s n'est pas nulle.
3. **Calcule** x_G : chaque abscisse multipliée par son poids, le tout divisé par s. Fais de même pour y_G.

4. **Contrôle** : avec des poids positifs, chaque coordonnée de G est comprise entre la plus petite et la plus grande coordonnée des points.

Attention : diviser par la somme des poids

✗ « Pour le barycentre de l'exemple, $x_G = \dfrac{2\times 1 + 1\times 5 + (-1)\times(-1)}{3}$, car il y a trois points. »

✓ On divise par la somme des poids, $2 + 1 - 1 = 2$, et non par le nombre de points. En divisant par 3, on trouverait $\dfrac{8}{3}$ au lieu de 4.

Exemple : Exemple de physique : trois masses dans un repère

Dans un repère dont l'unité vaut 1 m, trois masses sont placées : 1 kg en $P(0,0)$, 3 kg en $Q(8,0)$ et 4 kg en $R(2,4)$. Le centre d'inertie du système est $G = \mathrm{Bar}\{(P,1);(Q,3);(R,4)\}$.

La masse totale, somme des poids, vaut 8 kg. D'après les coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{1\times 0 + 3\times 8 + 4\times 2}{8} = 4,$$
$$y_G = \frac{1\times 0 + 3\times 0 + 4\times 4}{8} = 2.$$

Donc $G(4,2)$. Contrôle : 4 est entre 0 et 8, et 2 entre 0 et 4.

À toi : Des poids de tous les signes

Dans un repère, soit $A(3,0)$, $B(-1,2)$ et $C(1,-4)$. Calcule les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3);(C,-2)\}$. Contrôle ensuite ton résultat avec le vecteur $\overrightarrow{AG}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord la somme des poids : $1 + 3 - 2$.
Indice 2
Multiplie chaque abscisse par son poids, garde les parenthèses pour les nombres négatifs, puis divise par la somme des poids.
Indice 3
Point délicat : le poids -2 multiplie des coordonnées qui peuvent être négatives ; garde les parenthèses.

Réponse
La somme des poids vaut $1 + 3 - 2 = 2$, non nulle. D'après les coordonnées du barycentre, on divise chaque somme de produits par 2.

Abscisse. $1\times 3 + 3\times(-1) + (-2)\times 1 = -2$, donc $x_G = \dfrac{-2}{2} = -1$.

Ordonnée. $1 \times 0 + 3 \times 2 + (-2) \times (-4) = 14$, donc $y_G = \dfrac{14}{2} = 7$.

Donc $G(-1, 7)$.

Contrôle. $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(-4, 7)$. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG}\\&= \frac{1}{2}\left(3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}\right).\end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{AB}(-4, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, -4)$, on retrouve bien $(-4, 7)$.

Alignement et concours de droites

Chaque point de la droite équilibre A et B

En clair. Sur la tige du début, l'appui G était un barycentre de A et B, et il était sur la droite (AB).

Inversement, prends un point M quelconque de la droite (AB). Peut-on trouver deux poids qui « équilibrent » A et B en M ? Avec des poids de signes contraires, on atteint même les points hors du segment.

Devine : Trouver les poids

Soit A et B deux points distincts, et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Quelle écriture fait de M un barycentre de A et B ?

A. $M = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$

Faux.

Avec ces poids, on aurait $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$: les poids sont échangés.

B. $M = \mathrm{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$

Faux.

Le poids de B divisé par la somme donne $\dfrac{3}{4}$, et non $\dfrac{1}{3}$.

C. Aucune : M n'est pas le milieu de $[AB]$.

Faux.

Des poids inégaux donnent d'autres points que le milieu.

D. $M = \mathrm{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

Correction

Pour $\mathrm{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$, la somme des poids vaut 3, et ce point vérifie :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

> On choisit les poids pour que la fraction « poids de B sur somme des poids » vaille $\frac{1}{3}$.

Rappel du tronc commun : M est sur (AB) exactement quand $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ pour un réel t.

Pourquoi est-ce vrai ? Les poids $1-t$ et t ont pour somme 1, qui n'est jamais nulle. Leur barycentre vérifie la même égalité que M : c'est donc M.

Points d'une droite

Propriété : Points d'une droite et barycentre

Soit A et B deux points distincts et M un point du plan. Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $a+b \neq 0$ et $M = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$.

En particulier, trois points A, B, M (avec $A \neq B$) sont **alignés** si et seulement si M est un barycentre de A et B.

Démonstration

Étape 1. Si $M = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$ avec $a+b \neq 0$, alors M appartient à la droite (AB), d'après la position du barycentre de deux points.

Étape 2. Réciproquement, supposons que M appartient à la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont alors colinéaires ; comme $A \neq B$, $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$: il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Étape 3. On pose $a = 1-t$ et $b = t$; alors $a+b = 1 \neq 0$. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de deux points, le point $G = \mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$ vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{t}{1}\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$, donc $G = M$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour la réciproque, la preuve choisit des **poids de somme** 1 : $1-t$ pour A, t pour B. Leur somme n'est jamais nulle, et la fraction $\frac{t}{1}$ redonne t.

Par homogénéité, tout multiple non nul de ces poids convient aussi. Un point de (AB) s'écrit donc comme barycentre d'une infinité de façons.

Vérifie : Les poids de la réciproque

Dans la preuve, si $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, quels poids donne-t-on à A et à B ?

A. t pour A, et $1-t$ pour B.
Faux.
Les poids sont échangés : celui de B doit valoir t pour retrouver $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

B. 1 pour A, et t pour B.

Faux.

La somme $1+t$ est nulle pour $t=-1$, et la fraction vaudrait $\dfrac{t}{1+t}$.

C. $1-t$ pour A, et t pour B.

Juste.

Juste : la somme vaut 1, et la fraction vaut t.

D. 1 pour A, et 1 pour B.

Faux.

Ces poids donnent toujours le milieu de $[AB]$.

Correction

La preuve pose $a=1-t$ et $b=t$. Alors $a+b=1\neq 0$, et $\dfrac{b}{a+b}=t$.

Le barycentre de $(A,1-t)$ et (B,t) vérifie donc $\overrightarrow{AG}=t\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$: c'est le point M.

Exemple : un point hors du segment

Un point hors du segment. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM}=-2\,\overrightarrow{AB}$. Avec $t=-2$, les poids sont $1-(-2)=3$ pour A et -2 pour B :

$$M=\mathrm{Bar}\{(A,3);(B,-2)\}.$$

Contrôle : la somme vaut 1, et $\dfrac{-2}{1}=-2$. Par homogénéité, on peut aussi écrire $M=\mathrm{Bar}\{(A,-6);(B,4)\}$.

L'hypothèse compte. L'énoncé exige $A\neq B$: si $A=B$, la droite (AB) n'existe pas.

Exprimer un point comme barycentre

Méthode : exprimer un point comme barycentre

1. **Écris** une égalité qui part d'un des points : $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$, ou $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$.
2. **Lis** les poids : t pour B ; ou bien x pour B et y pour C.
3. **Complète** le poids de A pour que la somme vaille 1 : $1-t$, ou $1-x-y$.
4. **Simplifie** par homogénéité, pour obtenir des poids entiers.

Exemple : Exemple guidé : un point du triangle

Dans un triangle ABC, soit N le point tel que :

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}.$$

Les poids. Ceux de B et C sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. Celui de A vaut $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. En multipliant les trois poids par 6, d'après l'homogénéité : $N=\mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3);(C,2)\}$.

Contrôle. La somme vaut 6. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points, ce barycentre vérifie :

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\left(3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}\right),$$

qui est bien l'égalité de départ.

Alignement et concours

Méthode : démontrer un alignement ou un concours

1. **Pour un alignement**, montre que l'un des trois points est un barycentre des deux autres ; l'associativité fournit en général cette écriture.
2. **Pour un concours**, introduis le barycentre G de tous les points pondérés.
3. **Regroupe** les points de plusieurs façons : chaque regroupement place G sur l'une des droites.
4. **Conclus** : G est sur chacune des droites, qui sont donc concourantes.

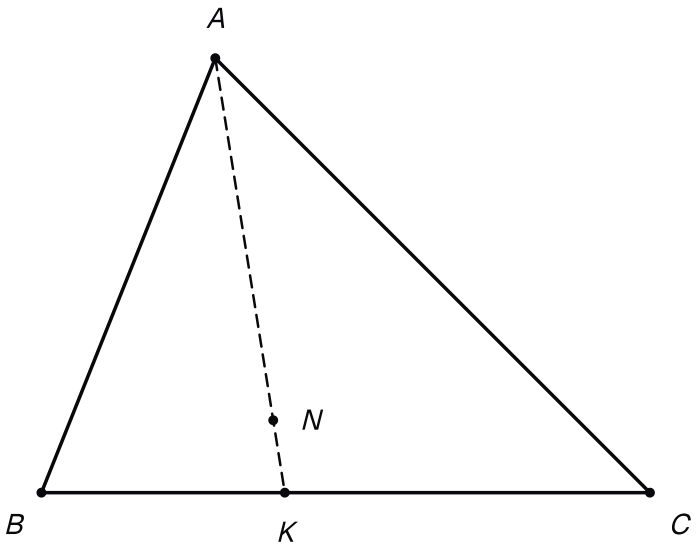
Exemple : un alignement par associativité

Reprends $N=\mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3);(C,2)\}$. Soit K le point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. Montrons que A, N et K sont alignés.

Écrire K comme barycentre. Comme $\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}$, on a $K=\mathrm{Bar}\{(B,3);(C,2)\}$, de somme 5.

Regrouper. Par associativité, $N=\mathrm{Bar}\{(A,1);(K,5)\}$.

Conclusion. D'après la propriété des points d'une droite, N appartient à (AK) : A, N et K sont alignés. Plus précisément, $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AK}$.



N, barycentre de (A, 1), (B, 3), (C, 2), se trouve sur la droite qui joint A au point K de [BC].

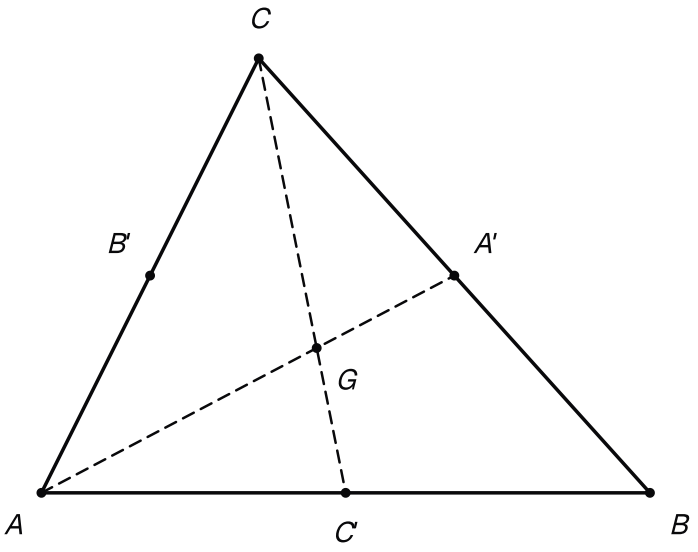
Exemple : les médianes d'un triangle

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, et G l'isobarycentre de A, B, C.

Médiane issue de A. En regroupant B et C, de barycentre A', l'associativité donne $G = \mathrm{Bar}\{(A,1);(A',2)\}$. Donc G est sur la médiane (AA'), avec $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Médiane issue de C. De même, $G = \mathrm{Bar}\{(C,1);(C',2)\}$: G est sur (CC').

Les médianes (AA') et (CC') passent toutes deux par G.



Les médianes (AA') et (CC') du triangle se coupent en G, l'isobarycentre des sommets.

À toi, puis le coin devoir

Vérifie : La troisième médiane

Dans l'exemple des médianes, quel regroupement place G sur la troisième médiane, (BB') ?

A. Regrouper A et C, de barycentre B'.

Juste.

Juste : B' est le milieu de $[CA]$, et il reçoit le poids 2.

B. Regrouper A et B, de barycentre C'.

Faux.

Ce regroupement place G sur (CC'), déjà obtenue.

C. Regrouper B et C, de barycentre A'.

Faux.

Ce regroupement place G sur (AA'), déjà obtenue.

D. Regrouper B et B', de poids 1 et 2.

Faux.

B' n'est pas un des points pondérés de départ : on regroupe seulement A, B ou C.

Correction

Le point B' est le milieu de $[CA]$, c'est-à-dire le barycentre de $(A,1)$ et $(C,1)$. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(B,1);(B',2)\}$.

D'après la propriété des points d'une droite, G est sur (BB'). Les trois médianes sont donc concourantes en G.

À toi : Trois droites concourantes

Reprends le triangle ABC, le point $N = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3);(C,2)\}$ et le point K de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. Soit L le point tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Montre que les droites (AK), (BJ) et (CL) sont concourantes en N. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris L comme barycentre de A et B, et J comme barycentre de A et C.

Indice 2

Quels poids pour A et B donnent $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$? Regroupe ensuite ces deux points dans N.

Indice 3

Point délicat : L reçoit le poids 4 et J le poids 3 ; la droite (AK) a déjà été traitée dans l'exemple.

Réponse

La droite (CL). Comme $\frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$, on a $L = \mathrm{Bar}\{(A,1);(B,3)\}$, de somme 4. Par associativité, $N = \mathrm{Bar}\{(L,4);(C,2)\}$. Les points L et C sont distincts, car L est sur (AB) et C ne l'est pas. D'après la propriété des points d'une droite, N appartient à (CL).

La droite (BJ). Comme $\frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$, on a $J = \mathrm{Bar}\{(A,1);(C,2)\}$, de somme 3. Par associativité, $N = \mathrm{Bar}\{(J,3);(B,3)\}$: N est le milieu de $[BJ]$, donc il appartient à (BJ).

La droite (AK). D'après l'exemple d'alignement, N appartient aussi à (AK).

Conclusion. Les trois droites passent par N : elles sont concourantes.

Remarque : Coin devoir : rédiger un alignement

En devoir, un alignement se rédige en trois temps : écriture comme barycentre, associativité, conclusion. Écris :

« $K = \mathrm{Bar}\{(B,3);(C,2)\}$, de somme 5, non nulle. Par associativité, $N = \mathrm{Bar}\{(A,1);(K,5)\}$. D'après la propriété des points d'une droite, N appartient à (AK) : les points A, N et K sont alignés. »

Nomme chaque propriété, et vérifie chaque somme de poids.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle propriété pour quelle question

- **Construire** $\mathrm{Bar}\{(A,a);(B,b)\}$: vérifier $a+b \neq 0$, puis écrire $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.
- **Situer** ce barycentre : poids de même signe, sur $[AB]$; signes contraires, hors de $[AB]$.
- **Simplifier** des poids : homogénéité, en multipliant tous les poids par un même réel non nul.
- **Réduire** une somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$: propriété caractéristique.
- **Regrouper** des points : associativité, le barycentre partiel reçoit la somme des poids du groupe.
- **Calculer** des coordonnées : moyennes pondérées, divisées par la somme des poids.
- **Aligner** : écrire un point comme barycentre des deux autres. **Concourir** : placer un même barycentre sur chaque droite.

Le mot du prof. Un barycentre, c'est un équilibre écrit avec des vecteurs. Avant chaque calcul, vérifie la somme des poids, puis nomme la propriété que tu emploies. Ces réflexes te serviront en physique, pour les centres d'inertie, et dans les chapitres de géométrie qui suivent.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le barycentre dans le plan » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)