BURHAN

Résumé : Analytique du produit scalaire et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/resume

Chapitre	Semestre
Analytique du produit scalaire et applications	Semestre 1

Produit scalaire, norme et distance

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, leur **produit scalaire** est le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, où θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Ces propriétés de calcul, vues au tronc commun, sont rappelées sans démonstration.

Propriété : Expression analytique du produit scalaire, norme et distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs, et $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Méthode : produit scalaire, norme, distance

1. **Contrôle** que le repère est orthonormé.
2. **Écris** les coordonnées de chaque vecteur : extrémité moins origine.
3. **Applique** la bonne formule : $xx' + yy'$ pour un produit scalaire, $\sqrt{x^2 + y^2}$ pour une norme.
4. **Interprète** : un produit scalaire égal à 0 traduit l'orthogonalité.

Exemple

Orthogonalité. Soit $\vec{u}(5, -1)$ et $\vec{v}(2, 10)$. D'après l'expression analytique :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 5 \times 2 + (-1) \times 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les deux vecteurs sont orthogonaux.

Distance. Avec $C(-2,3)$ et $D(4,-5)$: $\overrightarrow{CD}(6,-8)$, donc :

$$CD = \sqrt{36+64} = 10$$

Attention : Un repère orthonormé d'abord

Si $\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 3$ et $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, le repère n'est pas orthonormé.

Le vecteur $\vec{j}$ a pour coordonnées $(0,1)$, mais $\vec{j}\cdot\vec{j} = 9$. La formule $xx' + yy'$ donnerait 1 : elle ne vaut pas ici.

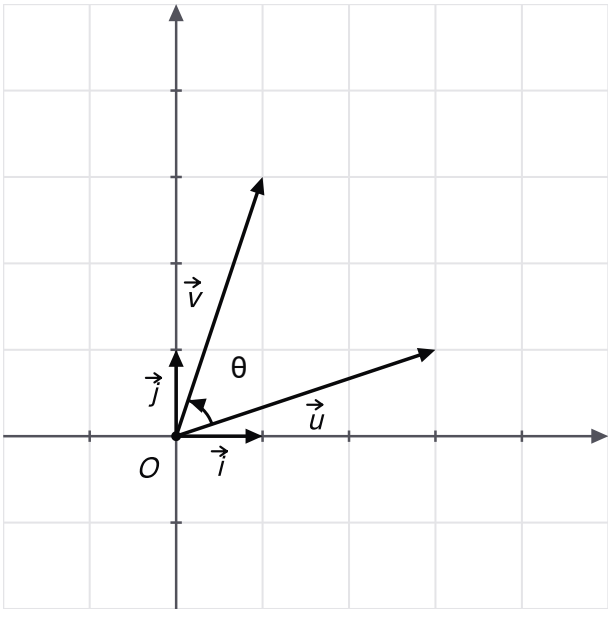
Mesure d'un angle orienté

Propriété : Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs non nuls, et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$. Alors :

$$\cos\theta = \frac{xx'+yy'}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$$
$$\sin\theta = \frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$$

Le réel $xy' - x'y$ est le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$.



Deux vecteurs non nuls u et v issus de l'origine d'un repère orthonormé direct, et θ, mesure de l'angle orienté qui va de u vers v.

Méthode : une mesure d'angle orienté

1. **Calcule** le produit scalaire, le déterminant et les deux normes.
2. **Divise** les deux premiers par le produit des normes : tu obtiens $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
3. **Cherche** dans $]-\pi,\pi]$ la valeur remarquable qui a ce cosinus et ce sinus.
4. **Vérifie** le signe : un sinus négatif place la mesure principale entre $-\pi$ et 0.

Exemple

Énoncé. Mesure l'angle $(\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u}(\sqrt{3},1)$ et $\vec{v}(0,-2)$.

Calculs. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$ et les deux normes valent 2. Le déterminant vaut :

$$\begin{aligned}&\det(\vec{u},\vec{v})\\&=\sqrt{3}\times(-2)-0\times 1\\&=-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Cosinus et sinus. On divise par $2\times 2=4$: $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion. Le sinus est négatif : la mesure principale est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Vecteur normal et équation d'une droite

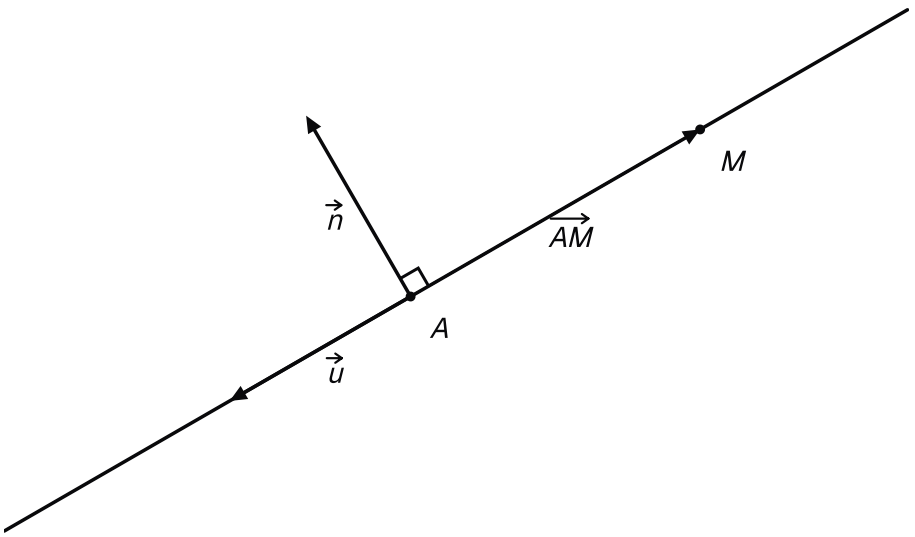
Définition : Vecteur normal à une droite

Soit (D) une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D). On appelle **vecteur normal** à (D) tout vecteur **non nul** $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$.

Propriété : Équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a, b et c trois réels, avec $(a,b)\neq(0,0)$.

- La droite passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. Elle a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.
- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a,b)$; le vecteur $\vec{u}(-b,a)$ en est un vecteur directeur.



Pour tout point M de la droite, la flèche AM est perpendiculaire au vecteur normal n, et le vecteur u dirige la droite.

Propriété : Droites perpendiculaires, droites parallèles

Dans un repère orthonormé, soit (D) et (D') deux droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, de vecteurs normaux $\vec{n}(a, b)$ et $\vec{n}'(a', b')$.

- (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.
- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Méthode : une droite de vecteur normal donné

1. **Repère** un point de la droite et un vecteur normal $\vec{n}(a, b)$.
2. **Pose** l'équation $ax + by + c = 0$.
3. **Trouve** c : les coordonnées du point connu vérifient l'équation.
4. **Contrôle** avec un second point de la droite quand tu en as un.

Exemple

Énoncé. Écris une équation de la droite passant par $K(-1, 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, 5)$.

Forme. Elle s'écrit $3x + 5y + c = 0$.

Calcul de c. K est sur la droite : $-3 + 20 + c = 0$, donc $c = -17$. Équation : $3x + 5y - 17 = 0$.

Contrôle. Le point $(-6, 7)$, obtenu en ajoutant le vecteur directeur $(-5, 3)$ à K, vérifie bien $-18 + 35 - 17 = 0$.

Exemple

Les droites d'équations $2x + 3y - 1 = 0$ et $6x - 4y + 5 = 0$ ont pour vecteurs normaux $(2, 3)$ et $(6, -4)$.

Comme $2 \times 6 + 3 \times (-4) = 0$, elles sont perpendiculaires.

Comme $2 \times (-4) - 6 \times 3 = -26 \neq 0$, elles ne sont pas parallèles.

Attention : Normal n'est pas directeur

Pour la droite d'équation $4x + y - 3 = 0$, le vecteur $(4, 1)$ est normal. Un vecteur directeur est $(-1, 4)$, obtenu par la règle $(-b, a)$.

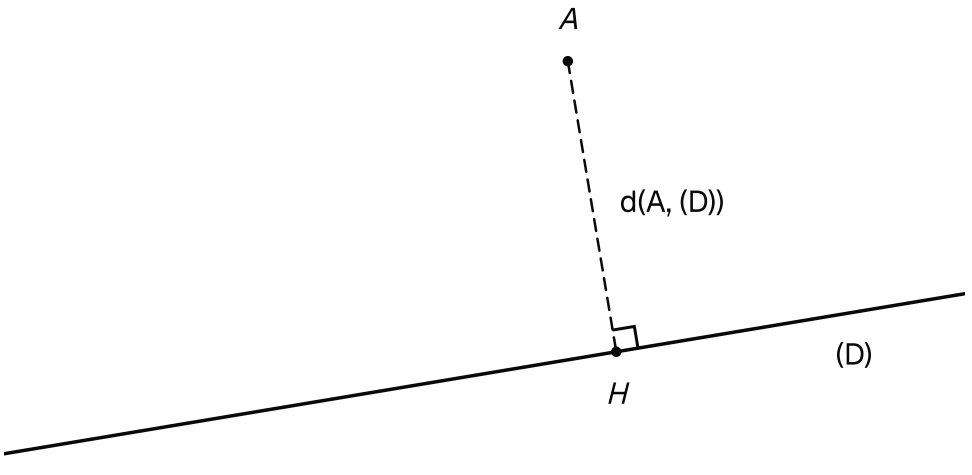
Prendre $(4, 1)$ comme vecteur directeur ferait tracer une droite perpendiculaire à la bonne.

Distance d'un point à une droite

Propriété : Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé, soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et $A(x_A, y_A)$ un point. On note H le projeté orthogonal de A sur (D). La **distance** du point A à la droite (D) est la distance AH, et :

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Le pied H de la perpendiculaire menée de A à (D) donne la plus courte distance, d(A, (D)) = AH.

Méthode : distance d'un point à une droite

1. **Ramène** l'équation à la forme $ax + by + c = 0$.

2. **Calcule** $ax + by + c$ au point donné.
3. **Prends** la valeur absolue de ce nombre.
4. **Divise** par $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

Énoncé. Calcule la distance du point $E(4, 3)$ à la droite d'équation $5x - 12y + 3 = 0$.

Calcul. $5 \times 4 - 12 \times 3 + 3 = -13$, et $\sqrt{25 + 144} = 13$.

Conclusion. D'après la distance d'un point à une droite :

$$d = \frac{|-13|}{13} = 1$$

Attention : Forme générale et racine

La droite d'équation $y = 2x + 1$ s'écrit d'abord $2x - y + 1 = 0$. Pour le point $(3, 2)$: $6 - 2 + 1 = 5$, donc :

$$d = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Diviser par 5 au lieu de $\sqrt{5}$ donnerait 1 : la racine est indispensable.

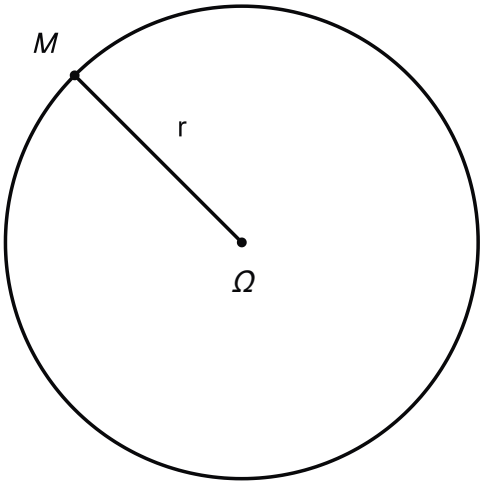
Équation cartésienne d'un cercle

Propriété : Équation cartésienne d'un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Cette équation s'écrit aussi $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.



Un point M est sur le cercle exactement quand sa distance au centre Ω vaut le rayon r.

Propriété : Reconnaître un cercle par son équation

Dans un repère orthonormé, soit a, b et c trois réels, et (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. On pose $k = a^2 + b^2 - c$.

- Si $k > 0$, (E) est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, (E) est réduit au point $\Omega(a, b)$.
- Si $k < 0$, (E) est l'ensemble vide.

Méthode : reconnaître un cercle

1. **Ramène** les coefficients de x^2 et de y^2 à 1, en divisant si besoin.
2. **Complète les carrés** en x, puis en y.
3. **Isole** le nombre k dans le second membre.
4. **Décide** par son signe : cercle de rayon $\sqrt{k}$, point seul ou ensemble vide.

Exemple

Énoncé. Reconnais l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

Carrés. $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ et $y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$.

Forme. L'équation devient :

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Conclusion. Le second membre 9 est strictement positif : c'est le cercle de centre $\Omega(3,-1)$ et de rayon 3.

Attention : Contrôler le second membre

L'équation $x^2+y^2+4x-2y+5=0$ devient $(x+2)^2+(y-1)^2=0$.

Le second membre est nul : l'ensemble se réduit au point $(-2,1)$. Ce n'est pas un cercle de rayon 0 à tracer.

Attention : Signe du centre, racine du rayon

Pour $(x-4)^2+(y+5)^2=7$, le centre est $\Omega(4,-5)$, car $y+5=y-(-5)$. Le rayon est $\sqrt{7}$, et non 7.

Méthode : le cercle passant par trois points

1. **Assure-toi** que les trois points ne sont pas alignés, par un déterminant non nul.
2. **Cherche** une équation $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
3. **Écris** une condition par point : trois équations en α, β, γ.
4. **Élimine** γ par soustraction, résous, puis complète les carrés.

Exemple

Énoncé. Cherche le cercle passant par $(2,1)$, $(-2,1)$ et $(0,3)$.

Système. Les trois points donnent :

$$\begin{aligned} 5+2\alpha+\beta+\gamma&=0\\ 5-2\alpha+\beta+\gamma&=0\\ 9+3\beta+\gamma&=0 \end{aligned}$$

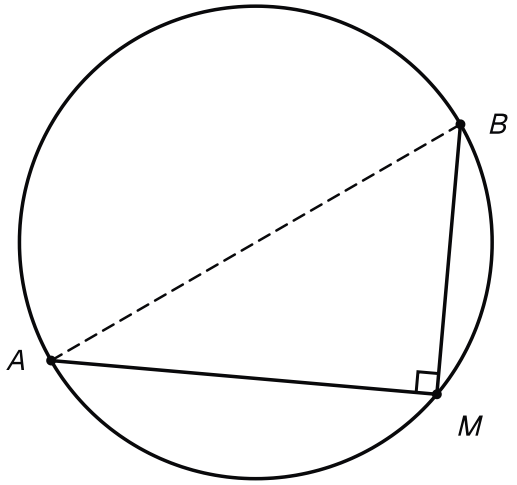
Résolution. La différence des deux premières donne $4\alpha=0$, donc $\alpha=0$. Ensuite $\beta=-2$ et $\gamma=-3$.

Conclusion. On obtient $x^2+y^2-2y-3=0$, soit $x^2+(y-1)^2=4$: centre $(0,1)$, rayon 2.

Diamètre et représentation paramétrique

Propriété : Cercle de diamètre donné

Soit A et B deux points distincts. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.



M sur le cercle de diamètre [AB], distinct de A et de B : l'angle en M est droit.

Exemple

Énoncé. Écris une équation du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(1,-2)$ et $B(5,4)$.

Produit scalaire. Pour $M(x,y)$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\\&=(1-x)(5-x)\\&\quad+(-2-y)(4-y)\end{aligned}$$

Équation. Après développement : $x^2+y^2-6x-2y-3=0$, soit $(x-3)^2+(y-1)^2=13$.

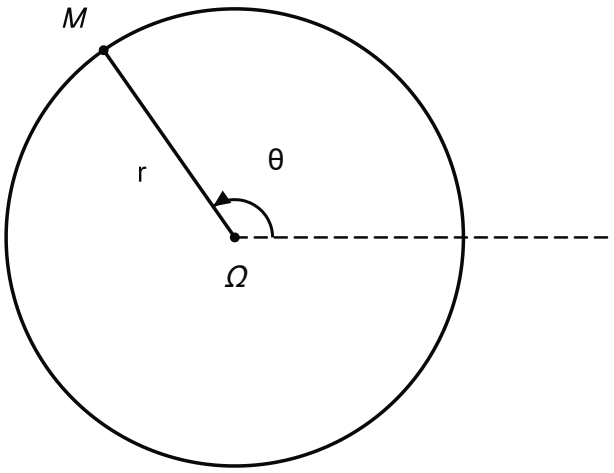
Contrôle. Le centre $(3,1)$ est le milieu de $[AB]$, et le rayon $\sqrt{13}$ est la moitié de $AB=\sqrt{52}$.

Propriété : Représentation paramétrique d'un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $r>0$. Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que :

$$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$$

Ce système, où θ décrit $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** du cercle $\mathcal{C}$.



Le paramètre θ repère M sur le cercle de centre Ω et de rayon r : on tourne de θ à partir de l'horizontale issue du centre.

Méthode : paramétrage et équation

1. **Isole** $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dans chaque ligne du système.
2. **Élimine** θ grâce à $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
3. **Lis** le centre et le rayon dans l'équation obtenue.
4. **Dans l'autre sens**, le centre et le rayon donnent directement le système.

Exemple

Vers l'équation. Soit le cercle paramétré par le système suivant, avec $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = -2 + 3\cos\theta \\ y = 4 + 3\sin\theta \end{cases}$$

Alors $\cos\theta = \dfrac{x+2}{3}$ et $\sin\theta = \dfrac{y-4}{3}$. D'où $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$: centre $(-2, 4)$, rayon 3.

Vers le système. Le cercle d'équation $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$ a pour centre $(5, -1)$ et pour rayon 2. Il est paramétré par le système suivant, avec $\theta \in \mathbb{R}$:

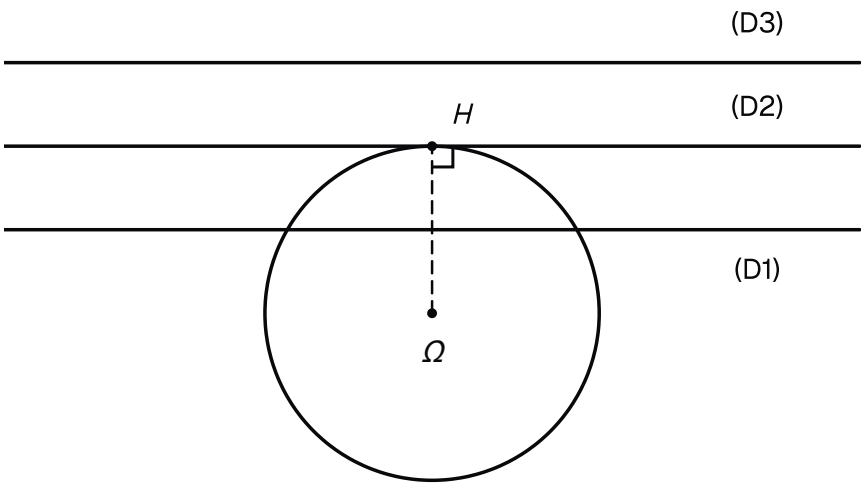
$$\begin{cases} x = 5 + 2\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\theta \end{cases}$$

Droite et cercle, tangente

Propriété : Position relative d'une droite et d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, (D) une droite, H le projeté orthogonal de Ω sur (D) et $d = d(\Omega, (D))$.

- Si $d > r$, la droite (D) et le cercle $\mathcal{C}$ n'ont aucun point commun.
- Si $d = r$, ils ont un seul point commun, le point H : on dit que (D) est **tangente** à $\mathcal{C}$ en H.
- Si $d < r$, ils ont exactement deux points communs.



Un cercle de rayon r et trois droites parallèles, de plus en plus loin du centre : deux points communs, un seul, puis aucun.

Méthode : droite et cercle

1. **Trouve** le centre Ω et le rayon r.
2. **Calcule** $d(\Omega, (D))$ par la formule de la distance.
3. **Compare** d et r : aucun, un ou deux points communs.
4. **Pour les points communs**, remplace une inconnue tirée de la droite dans l'équation du cercle, puis résous par le discriminant.

Exemple

Énoncé. Étudie le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 10$ et la droite d'équation $x - y - 2 = 0$.

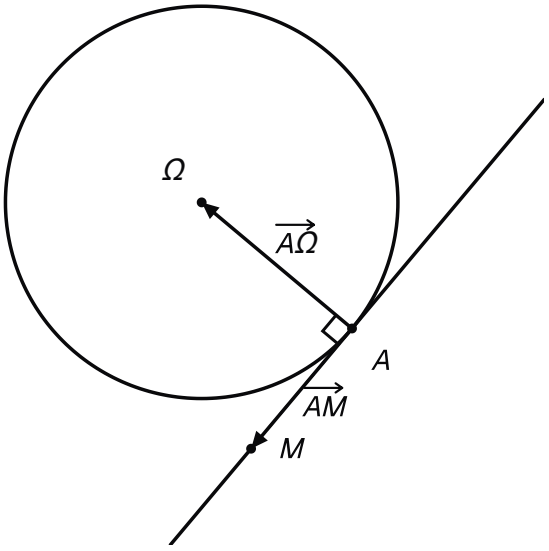
Comparaison. Le centre est O et le rayon $\sqrt{10}$. Puis $d(O, (D)) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, et $\sqrt{2} < \sqrt{10}$: deux points communs.

Calcul. Avec $y = x - 2$, l'équation du cercle devient $x^2 - 2x - 3 = 0$, de discriminant 16. D'où $x = 3$ ou $x = -1$.

Points. $(3, 1)$ et $(-1, -3)$.

Propriété : Tangente à un cercle en un point

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, et A un point de $\mathcal{C}$. La **tangente** à $\mathcal{C}$ en A est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$: c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$.



La tangente en A est la droite passant par A qui admet le vecteur AΩ pour vecteur normal ; tout point M de cette droite vérifie l'angle droit en A.

Méthode : la tangente en un point

1. **Contrôle** que le point A vérifie l'équation du cercle.
2. **Calcule** $\overrightarrow{A\Omega}$: il est normal à la tangente.
3. **Écris** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ pour $M(x, y)$, puis développe.

Exemple

Énoncé. Écris la tangente au cercle d'équation $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$ au point $A(1, 6)$.

Point du cercle. $2^2 + 3^2 = 13$: A est bien sur le cercle.

Vecteur normal. $\Omega(-1, 3)$, donc $\overrightarrow{A\Omega}(-2, -3)$.

Équation. On écrit $-2(x-1)-3(y-6)=0$, soit $2x+3y-20=0$.

Régionnement du plan

Propriété : Régionnement du plan par une droite ou un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- Soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$, avec $(a,b)\neq(0,0)$. Elle partage le plan en deux demi-plans ouverts : l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by+c>0$, et l'ensemble des points tels que $ax+by+c<0$. Deux points hors de (D) sont du même côté de (D) si et seulement si $ax+by+c$ prend en ces points des valeurs de même signe.
- Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $r>0$. L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ est l'**intérieur** de $\mathcal{C}$; celui des points tels que $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ est son **extérieur**.

Méthode : un système d'inéquations

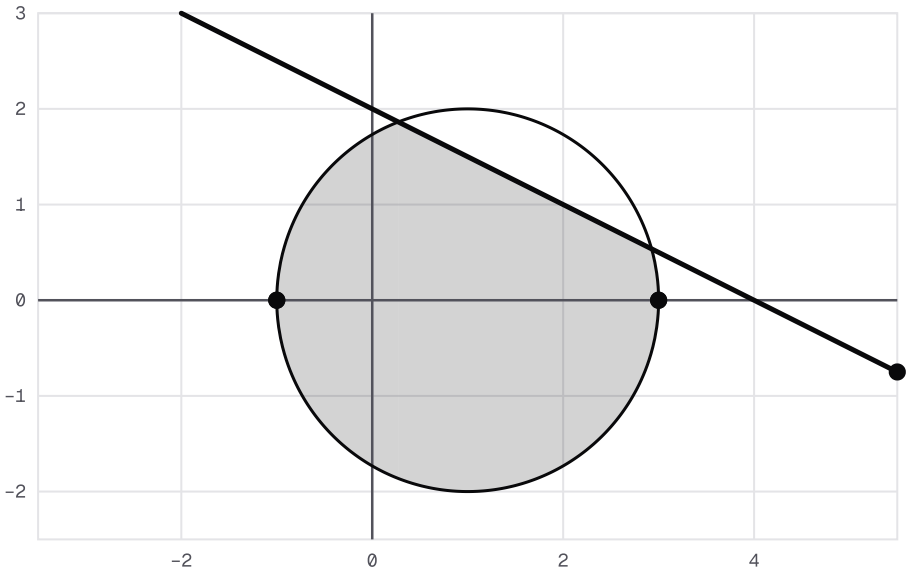
1. **Trace** chaque frontière : droite ou cercle.
2. **Prends** un point test placé sur aucune frontière.
3. **Évalue** chaque expression en ce point : le signe obtenu désigne le côté des solutions.
4. **Garde** la région où tout est vrai : frontière comprise pour une inégalité large, exclue pour une inégalité stricte.

Exemple

Énoncé. Représente les points tels que $x+2y-4\leq 0$ et $(x-1)^2+y^2\leq 4$.

Point test. En $O(0,0)$: $-4\leq 0$ et $1\leq 4$. Les deux inégalités sont vraies.

Région. C'est la partie du disque de centre $(1,0)$ et de rayon 2 située du côté de O par rapport à la droite. Les frontières sont comprises.



$y = sqrt4 - (x-1)^2$ $y = -sqrt4 - (x-1)^2$ $x + 2y - 4 = 0$ Point du graphe
Domaine teinté Domaine teinté Domaine teinté

La partie teintée réunit les points du disque de centre (1, 0) et de rayon 2 situés sous la droite x + 2y - 4 = 0, du côté de O ; les deux frontières en font partie.

Attention : Un point test hors des frontières

Pour $3x + y - 6 < 0$, le point $(2, 0)$ ne sert pas de point test : il est sur la droite.

Prends O : $-6 < 0$, les solutions sont du côté de O. L'inégalité est stricte, la droite est exclue.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Deux vecteurs orthogonaux ?** Le produit scalaire $xx' + yy'$, comparé à 0.
- **Une longueur ?** La formule de la distance.
- **Un angle orienté ?** Le cosinus par le produit scalaire, le sinus par le déterminant.
- **Une perpendiculaire, une médiatrice ?** Une droite de vecteur normal donné.
- **Une hauteur, une aire ?** La distance d'un point à une droite.
- **Un centre et un rayon ?** Les carrés complétés, puis le signe du second membre.
- **Un angle droit inscrit ?** Le cercle de diamètre donné.
- **Un point qui tourne ?** La représentation paramétrique.
- **Droite et cercle ?** La comparaison de d et r, puis le discriminant.
- **Une tangente ?** Le vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

- **Une région ?** Les frontières et un point test.

Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Norme

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Distance

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Cosinus d'un angle orienté

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Sinus d'un angle orienté

$$\sin\theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Droite

$$ax + by + c = 0$$
$$\vec{n}(a, b), \quad \vec{u}(-b, a)$$

Distance à une droite

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cercle

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Forme développée

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$
$$k = a^2 + b^2 - c$$

Cercle de diamètre [AB]

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Tangente en A

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme chaque formule : « d'après la distance d'un point à une droite ».

Compare toujours d et r par écrit avant de conclure. Vérifie le signe du second membre avant de lire un rayon.

Contrôle un résultat en remplaçant les coordonnées d'un point.