BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un triangle et son cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, 6)$, $B(-1, 0)$ et $C(7, 4)$.

1. 0,75 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC. Préciser la nature du triangle ABC.

INDICE

Début : écris les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. **Ensuite :** un produit scalaire nul donne un angle droit.

2. 0,75 pts

Vérifier que $\vec{n}(1, -2)$ est normal à (BC), puis écrire une équation cartésienne de (BC).

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}$. **Ensuite :** trouve la constante avec le point B.

3. 1,25 pts

Calculer la distance du point A à la droite (BC). En déduire l'aire du triangle ABC.

INDICE

Début : calcule $d(A, (BC))$ par sa formule. **Ensuite :** prends BC pour base. **Contrôle :** l'aire vaut aussi $\dfrac{AB \times AC}{2}$.

4. 1,25 pts

On note (Γ) le cercle de diamètre $[BC]$. Donner son centre I, son rayon et une équation cartésienne. Vérifier que A appartient à (Γ).

INDICE

Début : le centre est le milieu de $[BC]$, le rayon la moitié de BC. **Ensuite :** remplace les coordonnées de A.

5. 1 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à (Γ) en A. Quelle est sa position par rapport à (BC) ?

INDICE

Début : $\overrightarrow{AI}$ est normal à (T). **Ensuite :** compare les vecteurs normaux de (T) et de (BC).

Exercice 2 5 pts

Une antenne et une route

Dans un repère orthonormé, d'unité le kilomètre, la zone couverte par une antenne est le disque limité par le cercle (Γ) d'équation $x^2+y^2+2x-6y-15=0$. Une route rectiligne (D) a pour équation $x-2y-3=0$.

1. 1 pts

Déterminer le centre Ω et le rayon r de (Γ).

INDICE

Début : complète les carrés en x et en y. **Ensuite :** vérifie que le second membre est strictement positif.

2. 1 pts

Calculer $d(\Omega,(D))$. En déduire la position de la route par rapport à (Γ).

INDICE

Début : applique la formule de la distance. **Ensuite :** compare d^2 et r^2.

3. 1,25 pts

Calculer les coordonnées des deux points communs E et F, avec $x_E>x_F$.

INDICE

Début : tire $x=2y+3$ de l'équation de (D). **Ensuite :** reporte dans l'équation de (Γ) et factorise.

4. 0,5 pts

Quelle longueur de route est couverte par l'antenne ?

INDICE

Début : la partie couverte est le segment $[EF]$. **Ensuite :** calcule EF.

5. 1,25 pts

Deux villages sont en $V(2,6)$ et $W(4,1)$. Lesquels sont couverts par l'antenne ? Sont-ils du même côté de la route (D) que l'antenne ?

INDICE

Début : calcule $(x+1)^2+(y-3)^2$ en chaque village et compare à 25. **Ensuite :** compare les signes de $x-2y-3$ en Ω, en V et en W.

Exercice 3 — 5 pts

Un point qui tourne

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point mobile M a pour coordonnées, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = -2 + 5\cos\theta \\ y = 2 + 5\sin\theta \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa trajectoire.

1. — 0,75 pts

Écrire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Préciser son centre Ω et son rayon.

INDICE

Début : isole $\cos\theta$ et $\sin\theta$. **Ensuite :** utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

2. — 0,75 pts

Calculer les coordonnées du point A de paramètre $\theta = 0$ et du point B de paramètre $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

INDICE

Début : $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. **Ensuite :** $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. — 1,25 pts

Calculer $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}$ et $\det(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{\Omega A}(5, 0)$; calcule $\overrightarrow{\Omega B}$. **Ensuite :** les deux normes valent le rayon 5.

4. — 1,25 pts

Vérifier que $E(-5, -2)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en E.

INDICE

Début : remplace les coordonnées de E dans l'équation. **Ensuite :** $\overrightarrow{E\Omega}$ est normal à (T).

5. — 1 pts

Le point $P(0, -3)$ est-il intérieur à $\mathcal{C}$? Est-il du même côté de (T) que Ω ?

INDICE

Début : compare $(x+2)^2 + (y-2)^2$ à 25 en P. **Ensuite :** compare les signes de $3x + 4y + 23$ en P et en Ω.

Exercice 4 5 pts

Un réservoir pour trois villages

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le kilomètre, trois villages sont placés en $A(6, 4)$, $B(-3, 1)$ et $C(2, -4)$. On veut construire un réservoir d'eau en un point Ω situé à la même distance des trois villages.

1. 1 pts

Écrire une équation cartésienne de la médiatrice (Δ_1) du segment $[BC]$.

INDICE

Début : la médiatrice de $[BC]$ passe par le milieu de $[BC]$. **Ensuite :** elle est perpendiculaire à (BC), donc $\overrightarrow{BC}$ lui est normal.

2. 1,25 pts

Écrire une équation cartésienne de la médiatrice (Δ_2) du segment $[AB]$. En déduire les coordonnées du point Ω.

INDICE

Début : procède comme à la question 1, avec le milieu de $[AB]$ et $\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega B = \Omega C$, donc Ω est sur les deux médiatrices : résous le système de leurs équations.

3. 0,75 pts

Calculer ΩA, ΩB et ΩC. En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par les trois villages.

INDICE

Début : calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$. **Ensuite :** le centre est Ω et le rayon est la distance commune.

4. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega C}$. Quelles mesures principales sont alors possibles pour l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$? Calculer $\det(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$ et en déduire sa mesure principale.

INDICE

Début : un produit scalaire nul donne un cosinus nul : deux mesures sont possibles dans $]-\pi, \pi]$. **Ensuite :** le signe du sinus, donc celui du déterminant, choisit entre les deux.

5. 1 pts

Le réservoir est relié à la route rectiligne (BC) par la conduite la plus courte possible. Écrire une équation cartésienne de (BC), puis calculer la longueur de cette conduite. En déduire le point de la route où elle arrive.

INDICE

Début : $\vec{n}(1, 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}(5, -5)$. **Ensuite :** la longueur cherchée est $d(\Omega, (BC))$; la conduite suit la perpendiculaire à (BC) passant par Ω : cherche-la parmi les droites de la question 1.

Exercice 5 5 pts

Une fontaine dans un coin

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le mètre, deux murs d'un jardin suivent les droites (D_1) : $x + 2y + 1 = 0$ et (D_2) : $2x - y + 7 = 0$. On veut installer une fontaine circulaire de centre $\Omega(0, 2)$.

1. 0,75 pts

Vérifier que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires, puis calculer les coordonnées de leur point commun K, le coin du jardin.

INDICE

Début : calcule le produit scalaire des vecteurs normaux $\vec{n}_1(1, 2)$ et $\vec{n}_2(2, -1)$. **Ensuite :** tire x de l'équation de (D_1) et reporte dans celle de (D_2).

2. 1 pts

Calculer $d(\Omega, (D_1))$ et $d(\Omega, (D_2))$. En déduire le plus grand rayon r pour lequel le bord $\mathcal{C}$ de la fontaine a au plus un point commun avec chaque mur, puis une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

INDICE

Début : pour chaque mur, divise la valeur absolue du premier membre en Ω par la norme du vecteur normal. **Ensuite :** un cercle et une droite n'ont aucun point commun si $d > r$, un seul si $d = r$, deux si $d < r$.

3. 1,25 pts

Écrire une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à (D_1). En déduire le point de contact H de $\mathcal{C}$ avec (D_1).

INDICE

Début : un vecteur directeur de (D_1) est normal à (Δ). **Ensuite :** la tangente en H est perpendiculaire au rayon $[\Omega H]$, donc H est le point commun de (D_1) et de (Δ).

4. 1 pts

Vérifier que $L(-2, 3)$ est le point de contact de $\mathcal{C}$ avec (D_2). En déduire la nature du quadrilatère $\Omega H K L$.

INDICE

Début : vérifie que L est sur (D_2) et sur $\mathcal{C}$. **Ensuite :** compare $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{LK}$, puis calcule $\overrightarrow{\Omega H} \cdot \overrightarrow{\Omega L}$, ΩH et ΩL.

5. 1 pts

La pelouse est formée des points $M(x, y)$ situés du même côté de chaque mur que Ω (murs compris) et strictement à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Écrire le système d'inéquations qui la décrit. Les points $S\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$ et $T(0, 1)$ sont-ils sur la pelouse ?

INDICE

Début : calcule $x + 2y + 1$ et $2x - y + 7$ en Ω pour choisir le sens de chaque inéquation. **Ensuite :** écris l'extérieur de $\mathcal{C}$ avec son équation, puis teste chaque point dans les trois inéquations.