BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Un triangle et son cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, 6)$, $B(-1, 0)$ et $C(7, 4)$.

1. — 0,75 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC. Préciser la nature du triangle ABC.

INDICE

Début : écris les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$. **Ensuite :** un produit scalaire nul donne un angle droit.

CORRIGÉ

Produit scalaire. $\overrightarrow{AB}(-2, -6)$ et $\overrightarrow{AC}(6, -2)$, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -12 + 12 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Longueurs. $AB = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires ; comme $AB = AC$, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

2. — 0,75 pts

Vérifier que $\vec{n}(1, -2)$ est normal à (BC), puis écrire une équation cartésienne de (BC).

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}$. **Ensuite :** trouve la constante avec le point B.

CORRIGÉ

Vecteur normal. $\overrightarrow{BC}(8, 4)$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 8 - 8 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (BC).

Équation. $(BC) : x - 2y + c = 0$. Avec $B(-1, 0)$: $-1 + c = 0$, donc $c = 1$. Contrôle avec C : $7 - 8 + 1 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne de la droite est $(BC) : x - 2y + 1 = 0$.

3. 1,25 pts

Calculer la distance du point A à la droite (BC). En déduire l'aire du triangle ABC.

INDICE

Début : calcule $d(A,(BC))$ par sa formule. **Ensuite :** prends BC pour base. **Contrôle :** l'aire vaut aussi $\dfrac{AB\times AC}{2}$.

CORRIGÉ

Distance. On applique la formule de distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(A,(BC)) &= \frac{|1-12+1|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Aire. $BC=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$ et $d(A,(BC))$ est la hauteur issue de A :

$$\mathcal{A}=\frac{4\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}=20$$

Contrôle : $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{40}{2}=20$.

Conclusion. $d(A,(BC))=2\sqrt{5}$ et l'aire du triangle ABC vaut 20.

4. 1,25 pts

On note (Γ) le cercle de diamètre $[BC]$. Donner son centre I, son rayon et une équation cartésienne. Vérifier que A appartient à (Γ).

INDICE

Début : le centre est le milieu de $[BC]$, le rayon la moitié de BC. **Ensuite :** remplace les coordonnées de A.

CORRIGÉ

Centre et rayon. I est le milieu de $[BC]$: $I(3,2)$, et le rayon vaut $\dfrac{BC}{2}=2\sqrt{5}$.

Équation. $(\Gamma):(x-3)^2+(y-2)^2=20$, ce qui se développe en :

$$x^2+y^2-6x-4y-7=0$$

Conclusion. En A : $(1-3)^2+(6-2)^2=4+16=20$, donc $A\in(\Gamma)$, ce qui confirme l'angle droit en A .

5. 1 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à (Γ) en A. Quelle est sa position par rapport à (BC) ?

INDICE

Début : $\overrightarrow{AI}$ est normal à (T). **Ensuite :** compare les vecteurs normaux de (T) et de (BC).

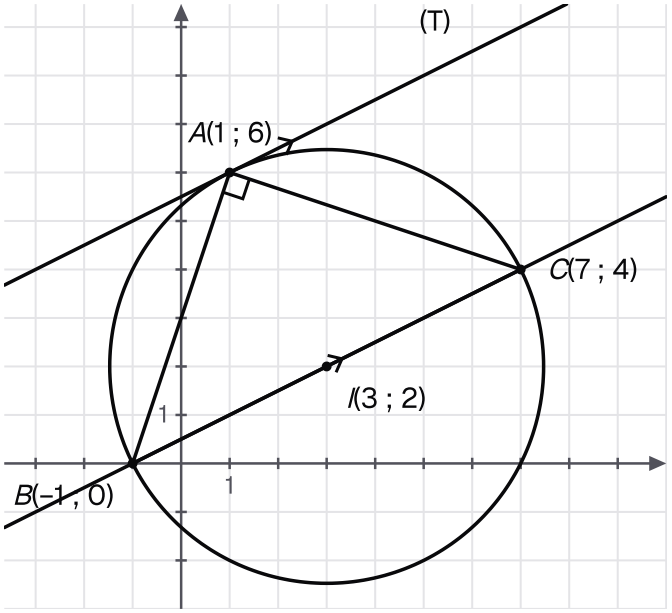
CORRIGÉ

Tangente. $\overrightarrow{AI}(2,-4)$ est normal à (T) ; $M(x,y)\in(T)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI}=0$:

$$2(x-1)-4(y-6)=0$$

soit $2x-4y+22=0$, puis $(T)\,:\,x-2y+11=0$.

Conclusion. (T) et (BC) ont le même vecteur normal $(1,-2)$ et des constantes différentes : la tangente (T) est parallèle à (BC), sans lui être confondue.



Le cercle (Γ) de diamètre [BC] passe par A ; sa tangente (T) en A est parallèle à (BC).

Exercice 2 5 pts

Une antenne et une route

Dans un repère orthonormé, d'unité le kilomètre, la zone couverte par une antenne est le disque limité par le cercle (Γ) d'équation $x^2+y^2+2x-6y-15=0$. Une route rectiligne (D) a pour équation $x-2y-3=0$.

1. 1 pts

Déterminer le centre Ω et le rayon r de (Γ).

INDICE

Début : complète les carrés en x et en y. **Ensuite :** vérifie que le second membre est strictement positif.

CORRIGÉ

Carrés. $x^2+2x=(x+1)^2-1$ et $y^2-6y=(y-3)^2-9$, d'où :

$$(x+1)^2+(y-3)^2=25$$

Conclusion. $25>0$: (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-1,3)$ et de rayon $r=5$.

2. 1 pts

Calculer $d(\Omega,(D))$. En déduire la position de la route par rapport à (Γ).

INDICE

Début : applique la formule de la distance. **Ensuite :** compare d^2 et r^2.

CORRIGÉ

Distance.

$$\begin{aligned} d(\Omega,(D)) &= \frac{|-1-6-3|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $d^2=20<25=r^2$, donc $d<r$: la route coupe (Γ) en deux points.

3. 1,25 pts

Calculer les coordonnées des deux points communs E et F, avec $x_E > x_F$.

INDICE

Début : tire $x = 2y + 3$ de l'équation de (D). **Ensuite :** reporte dans l'équation de (Γ) et factorise.

CORRIGÉ

Substitution. Sur (D), $x = 2y + 3$, donc $x + 1 = 2y + 4$. En reportant dans la forme réduite :

$$(2y + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$
$$5y^2 + 10y + 25 = 25$$

soit $5y^2 + 10y = 0$.

Racines. $5y(y + 2) = 0$, donc $y = 0$ ou $y = -2$, puis $x = 3$ ou $x = -1$.

Conclusion. Avec $x_E > x_F$: $E(3, 0)$ et $F(-1, -2)$. Contrôle : $16 + 9 = 25$ et $0 + 25 = 25$.

4. 0,5 pts

Quelle longueur de route est couverte par l'antenne ?

INDICE

Début : la partie couverte est le segment $[EF]$. **Ensuite :** calcule EF.

CORRIGÉ

Vecteur. La partie couverte est la corde $[EF]$, et $\overrightarrow{EF}(-4, -2)$.

Conclusion. $EF = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: l'antenne couvre $2\sqrt{5}$ km de route.

5. 1,25 pts

Deux villages sont en $V(2,6)$ et $W(4,1)$. Lesquels sont couverts par l'antenne ? Sont-ils du même côté de la route (D) que l'antenne ?

INDICE

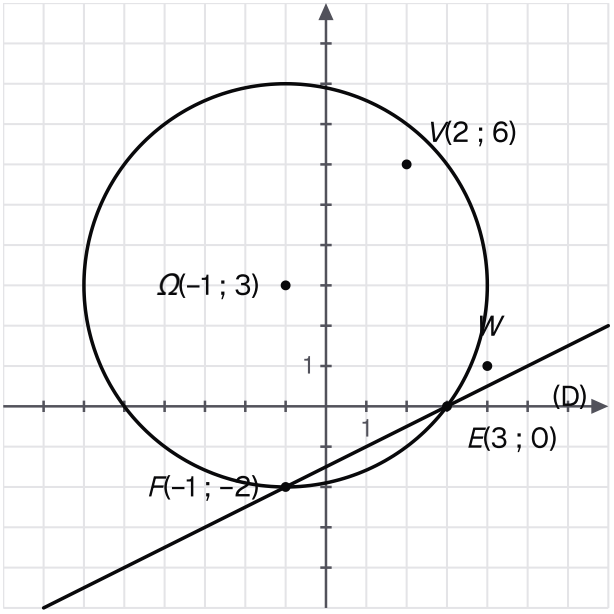
Début : calcule $(x+1)^2+(y-3)^2$ en chaque village et compare à 25. **Ensuite :** compare les signes de $x-2y-3$ en Ω, en V et en W.

CORRIGÉ

Couverture. En V : $3^2+3^2=18<25$, donc V est intérieur à (Γ). En W : $5^2+(-2)^2=29>25$, donc W est extérieur.

Côté de la route. L'expression $x-2y-3$ vaut -10 en Ω, -13 en V et -1 en W : trois valeurs de même signe.

Conclusion. Seul le village V est couvert. Les deux villages sont du même côté de la route (D) que l'antenne.



La route (D) traverse la zone de l'antenne entre E et F ; V est couvert, W ne l'est pas, et les deux villages sont du même côté de la route que Ω.

Exercice 3 — 5 pts

Un point qui tourne

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point mobile M a pour coordonnées, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = -2 + 5\cos\theta \\ y = 2 + 5\sin\theta \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa trajectoire.

1. — 0,75 pts

Écrire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$. Préciser son centre Ω et son rayon.

INDICE

Début : isole $\cos\theta$ et $\sin\theta$. **Ensuite :** utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

CORRIGÉ

Isoler. Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{x+2}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{y-2}{5}$.

Équation. Avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, puis en multipliant par 25 :

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Conclusion. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, 2)$ et de rayon 5.

2. — 0,75 pts

Calculer les coordonnées du point A de paramètre $\theta = 0$ et du point B de paramètre $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

INDICE

Début : $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. **Ensuite :** $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRIGÉ

Point A. Pour $\theta = 0$: $x = -2 + 5 = 3$ et $y = 2 + 0 = 2$.

Point B. Pour $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$: $x = -2 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{9}{2}$ et $y = 2 + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion. $A(3, 2)$ et $B\left(-\dfrac{9}{2}, 2 + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 1,25 pts

Calculer $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega B}$ et $\det(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$. En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{\Omega A}(5,0)$; calcule $\overrightarrow{\Omega B}$. **Ensuite :** les deux normes valent le rayon 5.

CORRIGÉ

Calculs. $\overrightarrow{\Omega A}(5,0)$ et $\overrightarrow{\Omega B}\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega B}=-\dfrac{25}{2}$ et :

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})\\&=5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}-0\\&=\frac{25\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Cosinus et sinus. On note φ une mesure de $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$. Les deux normes valent 5 ; en divisant par 25 : $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$ est $\dfrac{2\pi}{3}$, l'écart entre les paramètres 0 et $\dfrac{2\pi}{3}$ de A et de B.

4. 1,25 pts

Vérifier que $E(-5,-2)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en E.

INDICE

Début : remplace les coordonnées de E dans l'équation. **Ensuite :** $\overrightarrow{E\Omega}$ est normal à (T).

CORRIGÉ

Point du cercle. $(-5+2)^2+(-2-2)^2=9+16=25$: $E\in\mathcal{C}$.

Tangente. $\overrightarrow{E\Omega}(3,4)$ est normal à (T), donc $M(x,y)\in(T)$ équivaut à :

$$3(x+5)+4(y+2)=0$$

soit $3x+4y+23=0$. Contrôle : $d(\Omega,(T))=\dfrac{|-6+8+23|}{5}=5$, le rayon.

Conclusion. E est sur $\mathcal{C}$ et la tangente en E a pour équation (T) : $3x+4y+23=0$.

5. 1 pts

Le point $P(0,-3)$ est-il intérieur à $\mathcal{C}$? Est-il du même côté de (T) que Ω ?

INDICE

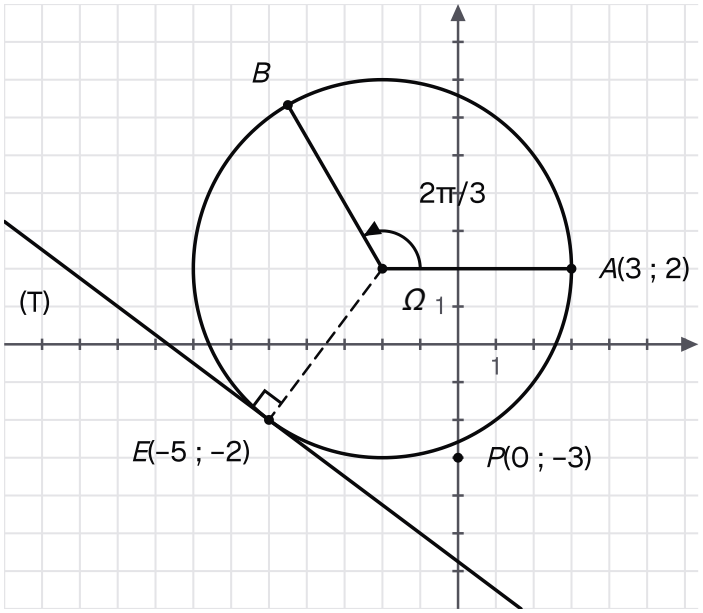
Début : compare $(x+2)^2+(y-2)^2$ à 25 en P. **Ensuite :** compare les signes de $3x+4y+23$ en P et en Ω.

CORRIGÉ

Cercle. En P : $(0+2)^2+(-3-2)^2=4+25=29>25$, donc P est extérieur à $\mathcal{C}$.

Tangente. $3x+4y+23$ vaut $0-12+23=11>0$ en P et $-6+8+23=25>0$ en Ω.

Conclusion. P est extérieur à $\mathcal{C}$, donc il n'est pas intérieur ; il est du même côté de (T) que Ω, car l'expression a le même signe en ces deux points.



La trajectoire de centre Ω(-2, 2) et de rayon 5, les points A et B séparés de 2π/3, la tangente (T) en E et le point P, extérieur au cercle mais du côté de Ω.

Exercice 4 5 pts

Un réservoir pour trois villages

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le kilomètre, trois villages sont placés en $A(6, 4)$, $B(-3, 1)$ et $C(2, -4)$. On veut construire un réservoir d'eau en un point Ω situé à la même distance des trois villages.

1. 1 pts

Écrire une équation cartésienne de la médiatrice (Δ_1) du segment $[BC]$.

INDICE

Début : la médiatrice de $[BC]$ passe par le milieu de $[BC]$. **Ensuite :** elle est perpendiculaire à (BC), donc $\overrightarrow{BC}$ lui est normal.

CORRIGÉ

Milieu et vecteur normal. Le milieu de $[BC]$ est $J\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. La médiatrice est perpendiculaire à (BC) : $\overrightarrow{BC}(5, -5)$ lui est normal, donc aussi $\vec{n}_1(1, -1)$, et $(\Delta_1) : x - y + c = 0$.

Constante. J est sur $(\Delta_1) : -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + c = 0$, donc $c = -1$.

Conclusion. La médiatrice de $[BC]$ a pour équation $(\Delta_1) : x - y - 1 = 0$.

2. 1,25 pts

Écrire une équation cartésienne de la médiatrice (Δ_2) du segment $[AB]$. En déduire les coordonnées du point Ω.

INDICE

Début : procède comme à la question 1, avec le milieu de $[AB]$ et $\overrightarrow{AB}$. **Ensuite :** $\Omega A = \Omega B$ et $\Omega B = \Omega C$, donc Ω est sur les deux médiatrices : résous le système de leurs équations.

CORRIGÉ

Médiatrice de $[AB]$. Le milieu de $[AB]$ est $K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-9, -3)$, donc $\vec{n}_2(3, 1)$ est normal : $3x + y + c = 0$. Avec K : $\frac{9}{2} + \frac{5}{2} + c = 0$, donc $c = -7$ et $(\Delta_2) : 3x + y - 7 = 0$.

Système. Ω est équidistant de A, B et C, donc il est sur (Δ_1) et sur (Δ_2). En ajoutant $x - y - 1 = 0$ et $3x + y - 7 = 0$: $4x - 8 = 0$, donc $x = 2$, puis $y = x - 1 = 1$.

Conclusion. $(\Delta_2) : 3x + y - 7 = 0$ et le réservoir est en $\Omega(2, 1)$.

3. 0,75 pts

Calculer ΩA, ΩB et ΩC. En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par les trois villages.

INDICE

Début : calcule les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$. **Ensuite :** le centre est Ω et le rayon est la distance commune.

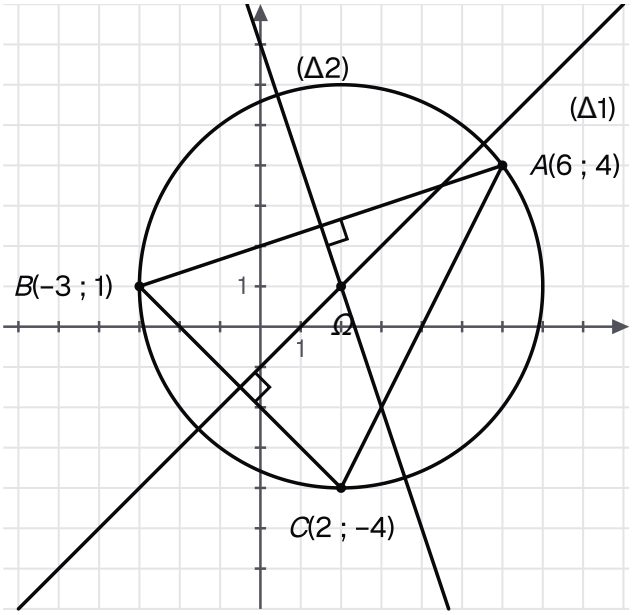
CORRIGÉ

Distances. $\overrightarrow{\Omega A}(4,3)$, $\overrightarrow{\Omega B}(-5,0)$ et $\overrightarrow{\Omega C}(0,-5)$, donc $\Omega A=\sqrt{16+9}=5$, $\Omega B=5$ et $\Omega C=5$.

Cercle. $\mathcal{C}$ a pour centre $\Omega(2,1)$ et pour rayon 5 : $(x-2)^2+(y-1)^2=25$, qui se développe en :

$$x^2+y^2-4x-2y-20=0$$

Conclusion. $\Omega A=\Omega B=\Omega C=5$ et $\mathcal{C}:\ x^2+y^2-4x-2y-20=0$.



Les médiatrices (Δ1) de [BC] et (Δ2) de [AB] se croisent en Ω(2, 1), centre du cercle de rayon 5 qui passe par les trois villages.

4. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega C}$. Quelles mesures principales sont alors possibles pour l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$? Calculer $\det(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$ et en déduire sa mesure principale.

INDICE

Début : un produit scalaire nul donne un cosinus nul : deux mesures sont possibles dans $]-\pi, \pi]$. **Ensuite :** le signe du sinus, donc celui du déterminant, choisit entre les deux.

CORRIGÉ

Produit scalaire. $\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega C} = (-5) \times 0 + 0 \times (-5) = 0$. Pour une mesure φ de $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$, $\cos\varphi = 0$: la mesure principale vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Déterminant.

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \\ &= (-5) \times (-5) - 0 \times 0 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Donc $\sin\varphi = \dfrac{25}{5 \times 5} = 1 > 0$.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$ est $\frac{\pi}{2}$: le triangle ΩBC est rectangle en Ω.

5. 1 pts

Le réservoir est relié à la route rectiligne (BC) par la conduite la plus courte possible. Écrire une équation cartésienne de (BC), puis calculer la longueur de cette conduite. En déduire le point de la route où elle arrive.

INDICE

Début : $\vec{n}(1, 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}(5, -5)$. **Ensuite :** la longueur cherchée est $d(\Omega, (BC))$; la conduite suit la perpendiculaire à (BC) passant par Ω : cherche-la parmi les droites de la question 1.

CORRIGÉ

Droite (BC). $\vec{n}(1, 1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}(5, -5)$, donc $(BC) : x + y + c = 0$. Avec B : $-3 + 1 + c = 0$, donc $c = 2$; contrôle avec C : $2 - 4 + 2 = 0$. Ainsi $(BC) : x + y + 2 = 0$.

Longueur. La conduite la plus courte mesure la distance de Ω à (BC) :

$$\begin{aligned} d(\Omega, (BC)) &= \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. La médiatrice (Δ_1) passe par Ω et elle est perpendiculaire à (BC) : la conduite, longue de $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ km, arrive au milieu $J\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ de $[BC]$. Contrôle : $\overrightarrow{\Omega J}\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, donc $\Omega J = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 5 pts

Une fontaine dans un coin

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le mètre, deux murs d'un jardin suivent les droites (D_1) : $x + 2y + 1 = 0$ et (D_2) : $2x - y + 7 = 0$. On veut installer une fontaine circulaire de centre $\Omega(0, 2)$.

1. 0,75 pts

Vérifier que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires, puis calculer les coordonnées de leur point commun K, le coin du jardin.

INDICE

Début : calcule le produit scalaire des vecteurs normaux $\vec{n}_1(1, 2)$ et $\vec{n}_2(2, -1)$. **Ensuite :** tire x de l'équation de (D_1) et reporte dans celle de (D_2).

CORRIGÉ

Perpendiculaires. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux, donc (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

Point commun. (D_1) donne $x = -2y - 1$. En reportant dans (D_2) : $-4y - 2 - y + 7 = 0$, soit $y = 1$, puis $x = -3$.

Conclusion. Les deux murs sont perpendiculaires et le coin du jardin est $K(-3, 1)$.

2. 1 pts

Calculer $d(\Omega, (D_1))$ et $d(\Omega, (D_2))$. En déduire le plus grand rayon r pour lequel le bord $\mathcal{C}$ de la fontaine a au plus un point commun avec chaque mur, puis une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

INDICE

Début : pour chaque mur, divise la valeur absolue du premier membre en Ω par la norme du vecteur normal. **Ensuite :** un cercle et une droite n'ont aucun point commun si $d > r$, un seul si $d = r$, deux si $d < r$.

CORRIGÉ

Distances. $d(\Omega, (D_1)) = \dfrac{|0 + 4 + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ et $d(\Omega, (D_2)) = \dfrac{|0 - 2 + 7|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Rayon. Au plus un point commun avec un mur exige $r \leq d$; il faut donc $r \leq \sqrt{5}$. Pour $r = \sqrt{5}$, on a $d = r$ pour chaque mur : les deux murs sont tangents à $\mathcal{C}$.

Conclusion. Le plus grand rayon est $r = \sqrt{5}$, et $\mathcal{C}$: $x^2 + (y - 2)^2 = 5$, soit :

$$x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$$

3. 1,25 pts

Écrire une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à (D_1). En déduire le point de contact H de $\mathcal{C}$ avec (D_1).

INDICE

Début : un vecteur directeur de (D_1) est normal à (Δ). **Ensuite :** la tangente en H est perpendiculaire au rayon $[\Omega H]$, donc H est le point commun de (D_1) et de (Δ).

CORRIGÉ

Perpendiculaire. $\vec{u}(-2,1)$ dirige (D_1) ; il est normal à (Δ), donc $(\Delta) : -2x+y+c=0$. Avec $\Omega(0,2)$: $2+c=0$, donc $c=-2$ et $(\Delta) : -2x+y-2=0$.

Point de contact. La tangente en H est perpendiculaire au rayon $[\Omega H]$, donc H est sur (Δ) et sur (D_1). Avec $y=2x+2$ dans (D_1) : $x+4x+4+1=0$, donc $x=-1$, puis $y=0$.

Conclusion. Le point de contact est $H(-1,0)$; contrôle : $(-1)^2+(0-2)^2=5$, donc $H\in\mathcal{C}$.

4. 1 pts

Vérifier que $L(-2,3)$ est le point de contact de $\mathcal{C}$ avec (D_2). En déduire la nature du quadrilatère ΩHKL.

INDICE

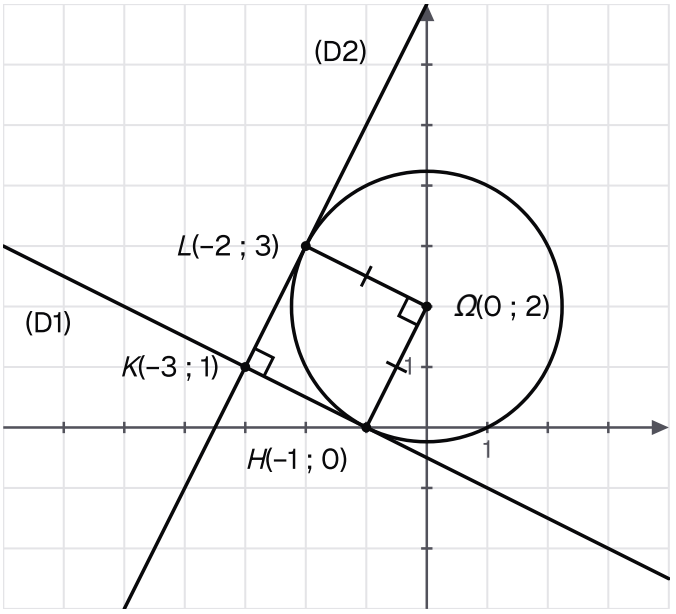
Début : vérifie que L est sur (D_2) et sur $\mathcal{C}$. **Ensuite :** compare $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{LK}$, puis calcule $\overrightarrow{\Omega H}\cdot\overrightarrow{\Omega L}$, ΩH et ΩL.

CORRIGÉ

Point L. $2\times(-2)-3+7=0$ et $(-2)^2+(3-2)^2=5$: L est sur (D_2) et sur $\mathcal{C}$. Comme (D_2) est tangente à $\mathcal{C}$, L est leur unique point commun.

Parallélogramme. $\overrightarrow{\Omega H}(-1,-2)$ et $\overrightarrow{LK}(-1,-2)$: $\overrightarrow{\Omega H}=\overrightarrow{LK}$, donc ΩHKL est un parallélogramme.

Conclusion. $\overrightarrow{\Omega L}(-2,1)$, donc $\overrightarrow{\Omega H}\cdot\overrightarrow{\Omega L}=2-2=0$, et $\Omega H=\Omega L=\sqrt{5}$. Ce parallélogramme a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux : ΩHKL est un carré de côté $\sqrt{5}$.



La fontaine de centre Ω(0, 2) touche les deux murs en H et en L ; avec le coin K, ces points forment le carré ΩHKL de côté √5.

5. 1 pts

La pelouse est formée des points $M(x, y)$ situés du même côté de chaque mur que Ω (murs compris) et strictement à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Écrire le système d'inéquations qui la décrit. Les points $S\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$ et $T(0, 1)$ sont-ils sur la pelouse ?

INDICE

Début : calcule $x + 2y + 1$ et $2x - y + 7$ en Ω pour choisir le sens de chaque inéquation. **Ensuite :** écris l'extérieur de $\mathcal{C}$ avec son équation, puis teste chaque point dans les trois inéquations.

CORRIGÉ

Système. En Ω : $x + 2y + 1 = 5 > 0$ et $2x - y + 7 = 5 > 0$. La pelouse est l'ensemble des solutions de :

$$\begin{cases} x + 2y + 1 \geq 0 \\ 2x - y + 7 \geq 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 > 5 \end{cases}$$

Point S. $-\frac{5}{2} + 2 + 1 = \frac{1}{2} \geq 0$, $-5 - 1 + 7 = 1 \geq 0$ et $\frac{25}{4} + 1 = \frac{29}{4} > 5$.

Point T. $0 + 2 + 1 = 3 \geq 0$ et $0 - 1 + 7 = 6 \geq 0$, mais $0^2 + (1 - 2)^2 = 1 < 5$.

Conclusion. S vérifie les trois inéquations : il est sur la pelouse. T est dans la fontaine, il n'est pas sur la pelouse.