BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Entraînement	7

Exercice 1

La nature d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$ et $C(1, 8)$.

1.

Calculer les longueurs AB, BC et AC.

INDICE

Outil : écris d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Outil : un produit scalaire nul donne un angle droit ; compare aussi les longueurs de la question 1.

3.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

INDICE

Outil : le cosinus vient du produit scalaire, le sinus du déterminant ; $3\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 45\sqrt{2}$.

4.

Calculer l'aire du triangle ABC.

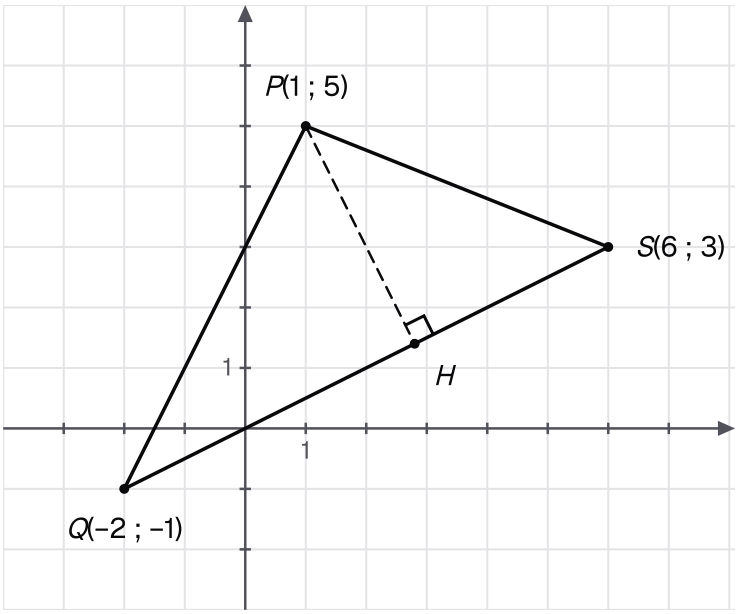
INDICE

Outil : dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit jouent le rôle de base et de hauteur.

Exercice 2

Hauteur et pied de la hauteur

Dans un repère orthonormé, on considère le triangle PQS avec $P(1,5)$, $Q(-2,-1)$ et $S(6,3)$.



Le triangle PQS de l'énoncé, avec la hauteur issue de P et son pied H sur le côté [QS].

1.

Vérifier que $\vec{n}(1,-2)$ est normal à la droite (QS), puis écrire une équation cartésienne de (QS).

INDICE

Outil : calcule $\overrightarrow{QS}$ et son produit scalaire avec $\vec{n}$.

2.

Écrire une équation cartésienne de la hauteur (h) issue de P dans le triangle PQS.

INDICE

Outil : la hauteur est perpendiculaire à (QS) ; le vecteur $(2,1)$, colinéaire à $\overrightarrow{QS}$, lui est normal.

3.

Calculer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de P.

INDICE

Outil : H est sur les deux droites ; tire x de l'équation de (QS).

4.

Calculer $d(P,(QS))$, puis l'aire du triangle PQS.

INDICE

Outil : la distance de P à (QS) est la hauteur PH ; la base est QS.

Exercice 3

Le cercle de trois arbres

Dans un repère orthonormé, trois arbres sont plantés en $A(3,2)$, $B(-1,4)$ et $C(1,-2)$. Un jardinier veut tracer une allée circulaire qui passe par les trois arbres.

1.

Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Outil : calcule $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

2.

On cherche une équation de l'allée de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$. Écrire le système vérifié par α, β et γ, puis le résoudre.

INDICE

Outil : remplace par les coordonnées de chaque arbre, puis soustrais l'équation de C aux deux autres.

3.

En déduire le centre et le rayon de l'allée.

INDICE

Outil : complète le carré en y.

4.

Un quatrième arbre est en $D(-3,0)$. Est-il sur l'allée ?

INDICE

Outil : remplace les coordonnées de D dans l'équation trouvée.

Exercice 4

Un angle droit inscrit

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3,1)$ et $B(5,7)$. On note (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.

1.

Écrire une équation cartésienne de (Γ).

INDICE

Outil : $M(x,y)$ est sur (Γ) si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

2.

Donner le centre et le rayon de (Γ). Contrôler que le centre est le milieu de $[AB]$ et que le rayon est la moitié de AB.

INDICE

Outil : complète les carrés ; le centre doit être le milieu de $[AB]$.

3.

Le point $C(4,0)$ est-il sur (Γ) ? Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

INDICE

Outil : remplace les coordonnées de C, puis pense à la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 5

Où la route coupe le cercle

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ et la droite (D) d'équation $x + y - 4 = 0$.

1.

Déterminer le centre Ω et le rayon r de $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : complète les carrés en x et en y.

2.

Calculer $d(\Omega, (D))$. En déduire le nombre de points communs à (D) et $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : compare d^2 et r^2.

3.

Calculer les coordonnées des points communs.

INDICE

Outil : remplace y par $4 - x$ dans l'équation de $\mathcal{C}$.

4.

Calculer la longueur de la corde découpée par (D) sur $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : c'est la distance entre les deux points trouvés.

Exercice 6

Deux tangentes parallèles

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $(x-3)^2+(y+1)^2=20$, de centre Ω, et le point $A(5,3)$.

1.

Vérifier que A appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en A.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{A\Omega}$ est normal à la tangente en A.

2.

Le point A' est diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$. Calculer ses coordonnées.

INDICE

Outil : Ω est le milieu de $[AA']$.

3.

Écrire une équation de la tangente (T') à $\mathcal{C}$ en A'. Que remarque-t-on ?

INDICE

Outil : $\overrightarrow{A'\Omega}(2,4)$ est colinéaire à $\overrightarrow{A\Omega}$.

4.

Contrôler les deux résultats en calculant la distance de Ω à chaque tangente.

INDICE

Outil : une tangente est à la distance $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ du centre.

Exercice 7

Un demi-disque

Dans un repère orthonormé, on cherche les points $M(x, y)$ qui vérifient à la fois $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 \leq 0$ et $x + y - 3 > 0$.

1.

Décrire l'ensemble des points qui vérifient la première inéquation.

INDICE

Outil : complète les carrés, puis lis l'inégalité large.

2.

Vérifier que la droite d'équation $x + y - 3 = 0$ passe par le centre de ce disque.

INDICE

Outil : remplace les coordonnées du centre dans l'équation.

3.

Tester les points $O(0, 0)$, $N(2, 3)$ et $Z(5, 2)$ dans les deux inéquations.

INDICE

Outil : calcule les deux expressions en chaque point.

4.

En déduire l'ensemble des solutions du système.

INDICE

Outil : garde la moitié du disque qui contient N ; précise les frontières.