BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Entraînement	7

Exercice 1

La nature d'un triangle

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2,-1)$, $B(4,2)$ et $C(1,8)$.

1.

Calculer les longueurs AB, BC et AC.

INDICE

Outil : écris d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(6,3)$, $\overrightarrow{BC}(-3,6)$ et $\overrightarrow{AC}(3,9)$.

Longueurs. Par la formule de la distance dans un repère orthonormé :

$$AB = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$$
$$AC = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$$

Conclusion. $AB = BC = 3\sqrt{5}$ et $AC = 3\sqrt{10}$.

2.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Outil : un produit scalaire nul donne un angle droit ; compare aussi les longueurs de la question 1.

CORRIGÉ

Produit scalaire. $\overrightarrow{BA}(-6,-3)$ et $\overrightarrow{BC}(-3,6)$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= 18 - 18 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nature. Le produit scalaire est nul : (BA) et (BC) sont perpendiculaires. De plus $BA = BC$ d'après la question 1.

Conclusion. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

INDICE

Outil : le cosinus vient du produit scalaire, le sinus du déterminant ; $3\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 45\sqrt{2}$.

CORRIGÉ

On note θ une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; le repère est orthonormé direct.

Calculs. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 + 27 = 45$ et :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= 6 \times 9 - 3 \times 3 \\ &= 45. \end{aligned}$$

Le produit des normes vaut $3\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 45\sqrt{2}$.

Cosinus et sinus. $\cos\theta = \dfrac{45}{45\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et, de même, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui s'accorde avec un triangle rectangle isocèle en B.

4.

Calculer l'aire du triangle ABC.

INDICE

Outil : dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit jouent le rôle de base et de hauteur.

CORRIGÉ

Aire. Le triangle est rectangle en B : $[BA]$ et $[BC]$ servent de base et de hauteur.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{BA \times BC}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{45}{2}. \end{aligned}$$

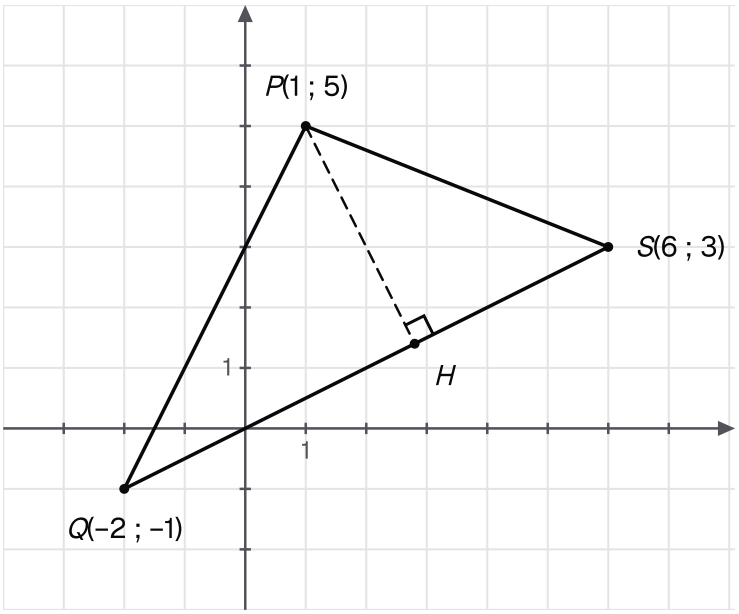
Contrôle. $AB^2 + BC^2 = 45 + 45 = 90 = AC^2$, ce qui confirme l'angle droit en B par le théorème de Pythagore.

Conclusion. L'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{45}{2}$.

Exercice 2

Hauteur et pied de la hauteur

Dans un repère orthonormé, on considère le triangle PQS avec $P(1,5)$, $Q(-2,-1)$ et $S(6,3)$.



Le triangle PQS de l'énoncé, avec la hauteur issue de P et son pied H sur le côté [QS].

1.

Vérifier que $\vec{n}(1,-2)$ est normal à la droite (QS), puis écrire une équation cartésienne de (QS).

INDICE

Outil : calcule $\overrightarrow{QS}$ et son produit scalaire avec $\vec{n}$.

CORRIGÉ

Vecteur normal. $\overrightarrow{QS}(8,4)$ et $\overrightarrow{QS}\cdot\vec{n} = 8\times 1 + 4\times(-2) = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de (QS), donc normal à (QS).

Équation. (QS) : $x - 2y + c = 0$. Avec $Q(-2,-1)$: $-2 + 2 + c = 0$, donc $c = 0$. Contrôle avec S : $6 - 6 = 0$.

Conclusion. $\vec{n}$ est normal à (QS) et (QS) : $x - 2y = 0$.

2.

Écrire une équation cartésienne de la hauteur (h) issue de P dans le triangle PQS.

INDICE

Outil : la hauteur est perpendiculaire à (QS) ; le vecteur $(2,1)$, colinéaire à $\overrightarrow{QS}$, lui est normal.

CORRIGÉ

Vecteur normal. La hauteur (h) est perpendiculaire à (QS) ; le vecteur $(2,1) = \frac{1}{4}\overrightarrow{QS}$ lui est donc normal : $(h) : 2x + y + c = 0$.

Calcul de c. $P(1,5)$ est sur (h) : $2 + 5 + c = 0$, donc $c = -7$.

Conclusion. Une équation cartésienne de la hauteur issue de P est $2x + y - 7 = 0$.

3.

Calculer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de P.

INDICE

Outil : H est sur les deux droites ; tire x de l'équation de (QS).

CORRIGÉ

Système. H est sur (QS) et sur (h), donc ses coordonnées vérifient $x = 2y$ et $2x + y - 7 = 0$.

Substitution. $4y + y - 7 = 0$, soit $y = \frac{7}{5}$, puis $x = 2y = \frac{14}{5}$.

Conclusion. Le pied de la hauteur est $H\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

4.

Calculer $d(P,(QS))$, puis l'aire du triangle PQS.

INDICE

Outil : la distance de P à (QS) est la hauteur PH ; la base est QS.

CORRIGÉ

Distance. On applique la formule de distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(P,(QS)) &= \frac{|1 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Aire. La base est $QS = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ et la hauteur est $d(P,(QS))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times \frac{9}{\sqrt{5}} \\ &= 18. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(P,(QS)) = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ et l'aire du triangle PQS vaut 18.

Exercice 3

Le cercle de trois arbres

Dans un repère orthonormé, trois arbres sont plantés en $A(3,2)$, $B(-1,4)$ et $C(1,-2)$. Un jardinier veut tracer une allée circulaire qui passe par les trois arbres.

1.

Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Outil : calcule $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

CORRIGÉ

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(-4,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,-4)$.

Déterminant.

$$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\&=(-4)\times(-4)-(-2)\times 2\\&=20.\end{aligned}$$

Conclusion. Le déterminant est non nul : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

2.

On cherche une équation de l'allée de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$. Écrire le système vérifié par α, β et γ, puis le résoudre.

INDICE

Outil : remplace par les coordonnées de chaque arbre, puis soustrais l'équation de C aux deux autres.

CORRIGÉ

Système. Chaque arbre vérifie l'équation :

- A : $13+3\alpha+2\beta+\gamma=0$;
- B : $17-\alpha+4\beta+\gamma=0$;
- C : $5+\alpha-2\beta+\gamma=0$.

Élimination de γ. La première moins la troisième donne $8+2\alpha+4\beta=0$; la deuxième moins la troisième donne $12-2\alpha+6\beta=0$. En les ajoutant, $20+10\beta=0$, donc $\beta=-2$, puis $2\alpha=-8-4\beta=0$, donc $\alpha=0$.

Conclusion. La troisième équation donne $\gamma=-5-\alpha+2\beta=-9$. Ainsi $\alpha=0$, $\beta=-2$ et $\gamma=-9$.

3.

En déduire le centre et le rayon de l'allée.

INDICE

Outil : complète le carré en y.

CORRIGÉ

Équation. L'allée a pour équation $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$. Comme $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$, elle équivaut à :

$$x^2 + (y-1)^2 = 10$$

Conclusion. $10 > 0$: l'allée est le cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

4.

Un quatrième arbre est en $D(-3, 0)$. Est-il sur l'allée ?

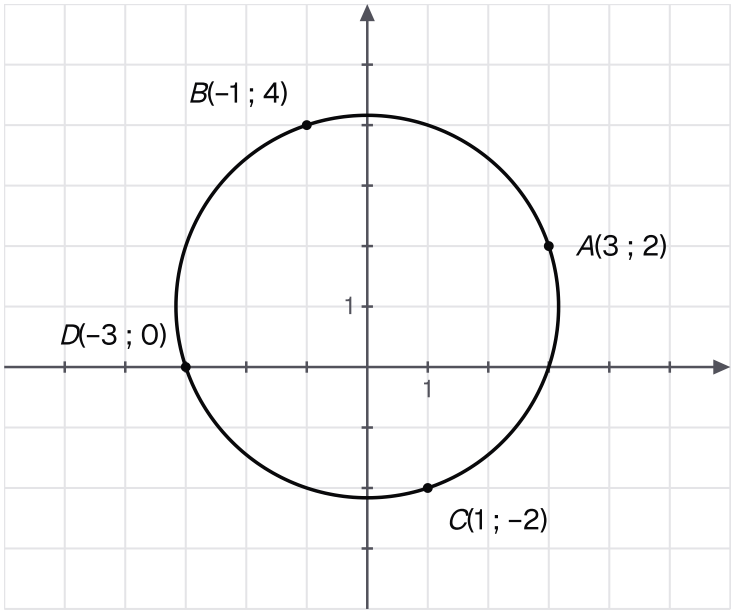
INDICE

Outil : remplace les coordonnées de D dans l'équation trouvée.

CORRIGÉ

Calcul. En $D(-3, 0)$: $(-3)^2 + (0-1)^2 = 9 + 1 = 10$.

Conclusion. Les coordonnées de D vérifient l'équation de l'allée : le quatrième arbre est sur l'allée.



L'allée circulaire de centre (0, 1) et de rayon √10 passe par les trois arbres A, B, C et aussi par le quatrième arbre D.

Exercice 4

Un angle droit inscrit

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3,1)$ et $B(5,7)$. On note (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.

1.

Écrire une équation cartésienne de (Γ).

INDICE

Outil : $M(x,y)$ est sur (Γ) si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

CORRIGÉ

Soit $M(x,y)$ un point du plan. M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Produit scalaire. $\overrightarrow{MA}(-3-x,1-y)$ et $\overrightarrow{MB}(5-x,7-y)$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (-3-x)(5-x)\\ &\quad+(1-y)(7-y)\end{aligned}$$

Développement. $(-3-x)(5-x)=x^2-2x-15$ et $(1-y)(7-y)=y^2-8y+7$.

Conclusion. Une équation cartésienne de (Γ) est :

$$x^2+y^2-2x-8y-8=0$$

2.

Donner le centre et le rayon de (Γ). Contrôler que le centre est le milieu de $[AB]$ et que le rayon est la moitié de AB.

INDICE

Outil : complète les carrés ; le centre doit être le milieu de $[AB]$.

CORRIGÉ

Carrés. $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2-8y=(y-4)^2-16$, d'où :

$$(x-1)^2+(y-4)^2=25$$

Contrôle. Le milieu de $[AB]$ est $\left(\dfrac{-3+5}{2},\dfrac{1+7}{2}\right)=(1,4)$, et $AB=\sqrt{64+36}=10$, double de 5.

Conclusion. (Γ) a pour centre $(1,4)$, le milieu de $[AB]$, et pour rayon $5=\dfrac{AB}{2}$.

3.

Le point $C(4,0)$ est-il sur (Γ) ? Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

INDICE

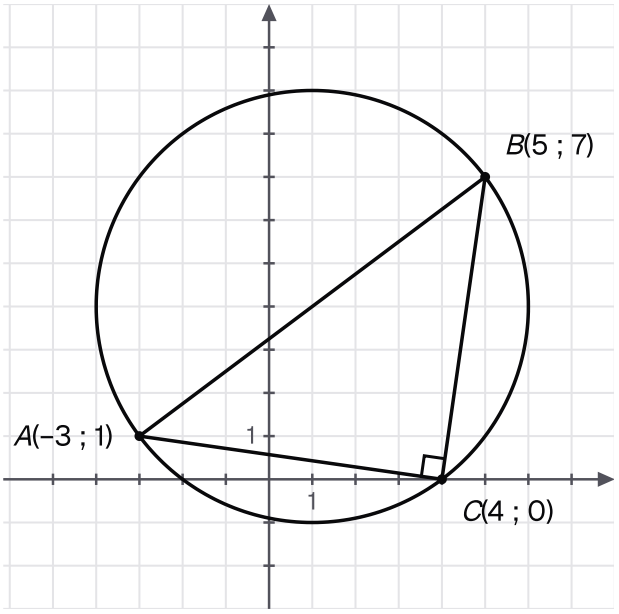
Outil : remplace les coordonnées de C, puis pense à la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$.

CORRIGÉ

Appartenance. En $C(4,0)$: $16+0-8-0-8=0$, donc $C \in (\Gamma)$.

Angle droit. Par la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$, on a alors $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. Vérification : $\overrightarrow{CA}(-7,1)$, $\overrightarrow{CB}(1,7)$ et $-7+7=0$.

Conclusion. C est sur (Γ) et le triangle ABC est rectangle en C.



C(4, 0) est sur le cercle de diamètre [AB] : le triangle ABC est rectangle en C.

Exercice 5

Où la route coupe le cercle

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ et la droite (D) d'équation $x+y-4=0$.

1.

Déterminer le centre Ω et le rayon r de $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : complète les carrés en x et en y.

CORRIGÉ

Carrés. $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2+4y=(y+2)^2-4$, d'où :

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25$$

Conclusion. $25=5^2>0$: $\mathcal{C}$ a pour centre $\Omega(1,-2)$ et pour rayon $r=5$.

2.

Calculer $d(\Omega,(D))$. En déduire le nombre de points communs à (D) et $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : compare d^2 et r^2.

CORRIGÉ

Distance. On applique la formule de distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(\Omega,(D)) &= \frac{|1-2-4|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Comparaison. $d^2=\dfrac{25}{2}<25=r^2$, donc $d<r$.

Conclusion. $d(\Omega,(D))=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$: la droite (D) et le cercle $\mathcal{C}$ ont deux points communs.

3.

Calculer les coordonnées des points communs.

INDICE

Outil : remplace y par $4-x$ dans l'équation de $\mathcal{C}$.

CORRIGÉ

Substitution. Un point commun vérifie $y=4-x$. En reportant dans l'équation de $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &x^2+(4-x)^2-2x \\ &\quad +4(4-x)-20=0 \end{aligned}$$

En développant : $2x^2-14x+12=0$, soit $x^2-7x+6=0$.

Racines. $\Delta=49-24=25$, donc $x=\dfrac{7+5}{2}=6$ ou $x=\dfrac{7-5}{2}=1$; puis $y=-2$ ou $y=3$.

Conclusion. Les points communs sont $(6,-2)$ et $(1,3)$. Contrôle dans la forme réduite : $25+0=25$ et $0+25=25$.

4.

Calculer la longueur de la corde découpée par (D) sur $\mathcal{C}$.

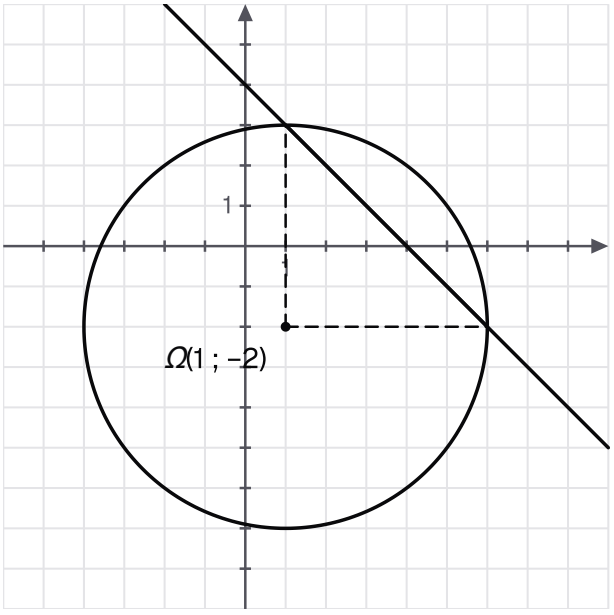
INDICE

Outil : c'est la distance entre les deux points trouvés.

CORRIGÉ

Vecteur. De $(1,3)$ à $(6,-2)$, le vecteur a pour coordonnées $(5,-5)$.

Conclusion. La corde mesure $\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$.



La route x + y - 4 = 0 coupe le cercle de centre Ω(1, -2) et de rayon 5 en (1, 3) et (6, -2) : la corde entre ces deux points mesure 5√2.

Exercice 6

Deux tangentes parallèles

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $(x-3)^2+(y+1)^2=20$, de centre Ω, et le point $A(5,3)$.

1.

Vérifier que A appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en A.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{A\Omega}$ est normal à la tangente en A.

CORRIGÉ

Point du cercle. $(5-3)^2+(3+1)^2=4+16=20$: $A\in\mathcal{C}$.

Tangente. $\Omega(3,-1)$ et $\overrightarrow{A\Omega}(-2,-4)$, normal à (T). Un point $M(x,y)$ est sur (T) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$:

$$-2(x-5)-4(y-3)=0$$

soit $-2x-4y+22=0$.

Conclusion. A est sur $\mathcal{C}$, et en divisant par -2 : (T) : $x+2y-11=0$.

2.

Le point A' est diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$. Calculer ses coordonnées.

INDICE

Outil : Ω est le milieu de $[AA']$.

CORRIGÉ

Milieu. Ω est le milieu de $[AA']$, donc $x_{A'}=2x_\Omega-x_A$ et $y_{A'}=2y_\Omega-y_A$:

$$x_{A'}=2\times3-5=1$$

$$y_{A'}=2\times(-1)-3=-5$$

Conclusion. $A'(1,-5)$. Contrôle : $(1-3)^2+(-5+1)^2=20$.

3.

Écrire une équation de la tangente (T') à $\mathcal{C}$ en A'. Que remarque-t-on ?

INDICE

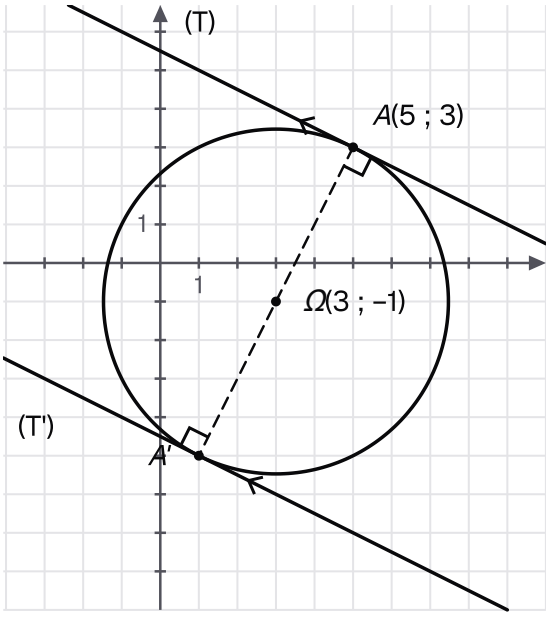
Outil : $\overrightarrow{A'\Omega}(2,4)$ est colinéaire à $\overrightarrow{A\Omega}$.

CORRIGÉ

Équation. $\overrightarrow{A'\Omega}(2,4)$ est normal à (T'), de même que $(1,2)$: (T') : $x+2y+c=0$. Avec A' : $1-10+c=0$, donc $c=9$.

Remarque. (T) et (T') ont le même vecteur normal $(1,2)$.

Conclusion. (T') : $x+2y+9=0$; les tangentes en deux points diamétralement opposés sont parallèles.



Aux extrémités du diamètre [AA'], les tangentes (T) et (T') sont perpendiculaires à ce diamètre, donc parallèles entre elles.

4.

Contrôler les deux résultats en calculant la distance de Ω à chaque tangente.

INDICE

Outil : une tangente est à la distance $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ du centre.

CORRIGÉ

Le rayon vaut $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Tangente en A.

$$\begin{aligned} d(\Omega, (T)) &= \frac{|3 - 2 - 11|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Tangente en A'.

$$\begin{aligned} d(\Omega, (T')) &= \frac{|3 - 2 + 9|}{\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. Chaque distance est égale au rayon, ce qui confirme que (T) et (T') sont tangentes à $\mathcal{C}$.

Exercice 7

Un demi-disque

Dans un repère orthonormé, on cherche les points $M(x, y)$ qui vérifient à la fois $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 \leq 0$ et $x + y - 3 > 0$.

1.

Décrire l'ensemble des points qui vérifient la première inéquation.

INDICE

Outil : complète les carrés, puis lis l'inégalité large.

CORRIGÉ

Carrés. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$, donc l'inéquation équivaut à :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9$$

Conclusion. C'est le disque de centre $(1, 2)$ et de rayon 3, cercle compris.

2.

Vérifier que la droite d'équation $x + y - 3 = 0$ passe par le centre de ce disque.

INDICE

Outil : remplace les coordonnées du centre dans l'équation.

CORRIGÉ

Calcul. Au centre $(1, 2)$: $1 + 2 - 3 = 0$.

Conclusion. La droite passe par le centre du disque : elle le partage en deux demi-disques.

3.

Tester les points $O(0, 0)$, $N(2, 3)$ et $Z(5, 2)$ dans les deux inéquations.

INDICE

Outil : calcule les deux expressions en chaque point.

CORRIGÉ

En chaque point, on calcule $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4$ pour la première inéquation et $x + y - 3$ pour la seconde.

Point O. $-4 \leq 0$, mais $0 + 0 - 3 = -3 < 0$: O n'est pas solution.

Point N. $4 + 9 - 4 - 12 - 4 = -7 \leq 0$ et $2 + 3 - 3 = 2 > 0$: N est solution.

Point Z. $25 + 4 - 10 - 8 - 4 = 7 > 0$: Z est hors du disque, il n'est pas solution.

4.

En déduire l'ensemble des solutions du système.

INDICE

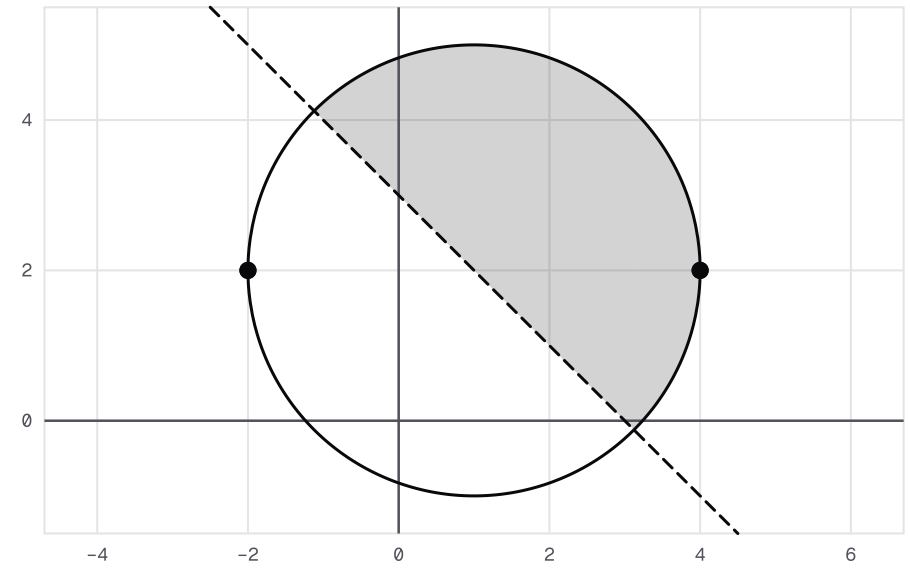
Outil : garde la moitié du disque qui contient N ; précise les frontières.

CORRIGÉ

Région. La droite partage le disque en deux moitiés ; $x + y - 3$ est strictement positif en N et strictement négatif en O. Les solutions forment la moitié du disque située du côté de N.

Frontières. L'arc de cercle est compris, car la première inégalité est large ; le diamètre porté par la droite est exclu, car la seconde est stricte.

Conclusion. L'ensemble des solutions est le demi-disque fermé du côté de N, privé de son diamètre.



La partie teintée est le demi-disque du côté de N : l'arc de cercle en fait partie, le diamètre porté par la droite x + y - 3 = 0 en est exclu.