BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Application	9

Exercice 1

Le travail d'une force

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le mètre. Un chariot se déplace en ligne droite du point $A(1, 2)$ au point $B(6, 5)$. Il est tiré par une force constante $\vec{F}(4, -1)$, exprimée en newtons. Le travail de $\vec{F}$ sur ce trajet est le produit scalaire $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, en joules.

1.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis le travail de $\vec{F}$.

INDICE

Outil : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par $(x_B - x_A, y_B - y_A)$; le repère est orthonormé.

2.

Une seconde force $\vec{G}(3, -5)$ agit sur le chariot pendant le même trajet. Calculer son travail. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{G}$ et $\overrightarrow{AB}$?

INDICE

Outil : un produit scalaire nul caractérise deux vecteurs orthogonaux.

3.

Calculer l'intensité $\|\vec{F}\|$ de la force et la longueur AB du trajet.

INDICE

Outil : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

4.

Pour quel réel m la force $\vec{H}(m, 2)$ a-t-elle un travail nul sur ce trajet ?

INDICE

Outil : écris $\vec{H} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et résous en m.

Exercice 2

Un arroseur au milieu du jardin

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le mètre, un jardin est traversé par une allée $[EF]$, avec $E(-3, 2)$ et $F(5, -4)$. On installe un arroseur au milieu I de $[EF]$.

1.

Calculer la longueur EF de l'allée.

INDICE

Outil : $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$.

2.

Donner les coordonnées de I, puis calculer IE.

INDICE

Outil : le milieu a pour coordonnées les moyennes des coordonnées des extrémités.

3.

L'arroseur mouille tous les points situés à 5 mètres au plus de I. Le rosier $S(-1, 3)$ est-il arrosé ? Et le banc $U(6, 1)$?

INDICE

Outil : compare chaque distance IS et IU au nombre 5, ou leurs carrés à 25.

Exercice 3

Deux mesures d'angles orientés

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $\vec{u}(-1, 1)$, $\vec{v}(0, -2)$, $\vec{w}(3, -\sqrt{3})$ et $\vec{t}(-\sqrt{3}, 3)$.

1.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

INDICE

Outil : calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et les normes, puis divise par le produit des normes.

2.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{w}, \vec{t})$.

INDICE

Outil : même méthode ; simplifie $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3.

En déduire la mesure principale de $(\vec{v}, \vec{u})$.

INDICE

Outil : échanger les deux vecteurs change la mesure en son opposée.

Exercice 4

Deux droites par leur vecteur normal

Dans un repère orthonormé, on considère le point $K(-2, 5)$, le point $L(3, -1)$ et la droite (Δ) d'équation $2x - 7y + 4 = 0$.

1.

Écrire une équation cartésienne de la droite (D_1) passant par K et de vecteur normal $\vec{n}(1, 3)$.

INDICE

Outil : pars de $x + 3y + c = 0$ et trouve c avec les coordonnées de K.

2.

Donner un vecteur directeur de (D_1) et un second point de (D_1).

INDICE

Outil : pour $ax + by + c = 0$, le vecteur $(-b, a)$ dirige la droite.

3.

Écrire une équation cartésienne de la droite (D_2) passant par L et perpendiculaire à (Δ).

INDICE

Outil : un vecteur directeur de (Δ) est normal à (D_2).

Exercice 5

Un puits et deux chemins

Dans un repère orthonormé, d'unité le kilomètre, un puits est placé en $P(5, -2)$. Deux chemins rectilignes passent près de lui : (R_1) d'équation $4x - 3y + 6 = 0$, et (R_2) d'équation $y = -x + 7$.

1.

Calculer la distance du puits au chemin (R_1).

INDICE

Outil : $d(P, (R_1)) = \dfrac{|4x_P - 3y_P + 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$.

2.

Calculer la distance du puits au chemin (R_2).

INDICE

Outil : écris d'abord l'équation de (R_2) avec tous les termes dans le même membre.

3.

Quel chemin est le plus proche du puits ?

INDICE

Outil : compare les carrés des deux distances.

Exercice 6

Centre et rayon

Dans un repère orthonormé, on étudie trois ensembles de points $M(x, y)$.

1.

Reconnaître l'ensemble (E_1) d'équation $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$.

INDICE

Outil : $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$; fais de même en y.

2.

Reconnaître l'ensemble (E_2) d'équation $x^2 + y^2 - 10y + 30 = 0$.

INDICE

Outil : complète le carré en y, puis regarde le signe du second membre.

3.

Reconnaître l'ensemble (E_3) d'équation $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 12 = 0$.

INDICE

Outil : divise d'abord par 2, le coefficient commun de x^2 et de y^2.

Exercice 7

La nacelle d'une grande roue

Dans un repère orthonormé, d'unité le mètre, la nacelle d'une grande roue occupe à chaque instant le point $M(x, y)$ défini, pour $\theta \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = 6 + 5\sin\theta \end{cases}$$

1.

Écrire une équation cartésienne de la trajectoire de la nacelle. Préciser son centre et son rayon.

INDICE

Outil : isole $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

2.

Donner la position de la nacelle pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, puis pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

Outil : remplace θ par sa valeur et utilise les valeurs remarquables.

3.

Écrire une représentation paramétrique du cercle d'équation $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 3$.

INDICE

Outil : lis le centre et le rayon, en prenant garde au signe et à la racine.

Exercice 8

La zone d'une antenne

Dans un repère orthonormé, d'unité le kilomètre, une antenne placée en $\Omega(2,3)$ couvre le disque de rayon $2\sqrt{2}$. Le bord de sa zone est le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $(x-2)^2+(y-3)^2=8$. Trois routes sont rectilignes : $(D_1) : x+y-1=0$, $(D_2) : x-7=0$ et $(D_3) : 2x+y-3=0$.

1.

Étudier la position de (D_1) par rapport à $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : calcule $d(\Omega,(D_1))$ et compare-la au rayon $2\sqrt{2}$.

2.

Étudier la position de (D_2) par rapport à $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : ici $a=1, b=0$ et $c=-7$.

3.

Étudier la position de (D_3) par rapport à $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : compare les carrés d^2 et $r^2=8$.

Exercice 9

Demi-plan et disque

Dans un repère orthonormé, on note (P) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $2x-3y+6>0$, et (Q) l'ensemble des points tels que $x^2+y^2-4x<0$.

1.

Les points $O(0,0)$, $G(-3,1)$ et $J(0,2)$ appartiennent-ils à (P) ?

INDICE

Outil : calcule $2x-3y+6$ en chaque point et regarde son signe.

2.

Décrire l'ensemble (Q).

INDICE

Outil : complète le carré en x.

3.

Le point $V(1,1)$ appartient-il à la fois à (P) et à (Q) ?

INDICE

Outil : teste les deux inégalités en V.