BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Application	9

Exercice 1

Le travail d'une force

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le mètre. Un chariot se déplace en ligne droite du point $A(1, 2)$ au point $B(6, 5)$. Il est tiré par une force constante $\vec{F}(4, -1)$, exprimée en newtons. Le travail de $\vec{F}$ sur ce trajet est le produit scalaire $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, en joules.

1.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis le travail de $\vec{F}$.

INDICE

Outil : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par $(x_B - x_A, y_B - y_A)$; le repère est orthonormé.

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$, soit $\overrightarrow{AB}(6 - 1, 5 - 2)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(5, 3)$.

Travail. Le repère est orthonormé ; par l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} &= 4 \times 5 + (-1) \times 3 \\ &= 17. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}(5, 3)$ et le travail de $\vec{F}$ sur ce trajet vaut 17 joules.

2.

Une seconde force $\vec{G}(3, -5)$ agit sur le chariot pendant le même trajet. Calculer son travail. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{G}$ et $\overrightarrow{AB}$?

INDICE

Outil : un produit scalaire nul caractérise deux vecteurs orthogonaux.

CORRIGÉ

Travail de $\vec{G}$. Par l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{G} \cdot \overrightarrow{AB} &= 3 \times 5 + (-5) \times 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Orthogonalité. Deux vecteurs dont le produit scalaire est nul sont orthogonaux.

Conclusion. Le travail de $\vec{G}$ est nul, et $\vec{G}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$: une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.

3.

Calculer l'intensité $\|\vec{F}\|$ de la force et la longueur AB du trajet.

INDICE

Outil : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

CORRIGÉ

Intensité. Par la formule de la norme dans un repère orthonormé :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$$

Longueur. De même, avec $\overrightarrow{AB}(5, 3)$:

$$AB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Conclusion. La force a une intensité de $\sqrt{17}$ newtons et le trajet mesure $\sqrt{34}$ mètres.

4.

Pour quel réel m la force $\vec{H}(m, 2)$ a-t-elle un travail nul sur ce trajet ?

INDICE

Outil : écris $\vec{H} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et résous en m.

CORRIGÉ

Mise en équation. Le travail de $\vec{H}$ est nul exactement quand $\vec{H} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \overrightarrow{AB} &= m \times 5 + 2 \times 3 \\ &= 5m + 6. \end{aligned}$$

Résolution. $5m + 6 = 0$ équivaut à $m = -\dfrac{6}{5}$.

Conclusion. Le travail de $\vec{H}$ est nul pour la seule valeur $m = -\dfrac{6}{5}$.

Exercice 2

Un arroseur au milieu du jardin

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité le mètre, un jardin est traversé par une allée $[EF]$, avec $E(-3, 2)$ et $F(5, -4)$. On installe un arroseur au milieu I de $[EF]$.

1.

Calculer la longueur EF de l'allée.

INDICE

Outil : $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{EF}(5 - (-3), -4 - 2)$, soit $\overrightarrow{EF}(8, -6)$.

Distance. Par la formule de la distance de deux points dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{8^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{100} = 10. \end{aligned}$$

Conclusion. L'allée mesure 10 mètres.

2.

Donner les coordonnées de I, puis calculer IE.

INDICE

Outil : le milieu a pour coordonnées les moyennes des coordonnées des extrémités.

CORRIGÉ

Milieu. Les coordonnées de I sont les moyennes de celles de E et de F :

$$I\left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{2 - 4}{2}\right)$$

soit $I(1, -1)$.

Distance. $\overrightarrow{IE}(-4, 3)$, donc $IE = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Conclusion. $I(1, -1)$ et $IE = 5$ mètres, la moitié de EF, comme attendu pour un milieu.

3.

L'arroseur mouille tous les points situés à 5 mètres au plus de I. Le rosier $S(-1,3)$ est-il arrosé ? Et le banc $U(6,1)$?

INDICE

Outil : compare chaque distance IS et IU au nombre 5, ou leurs carrés à 25.

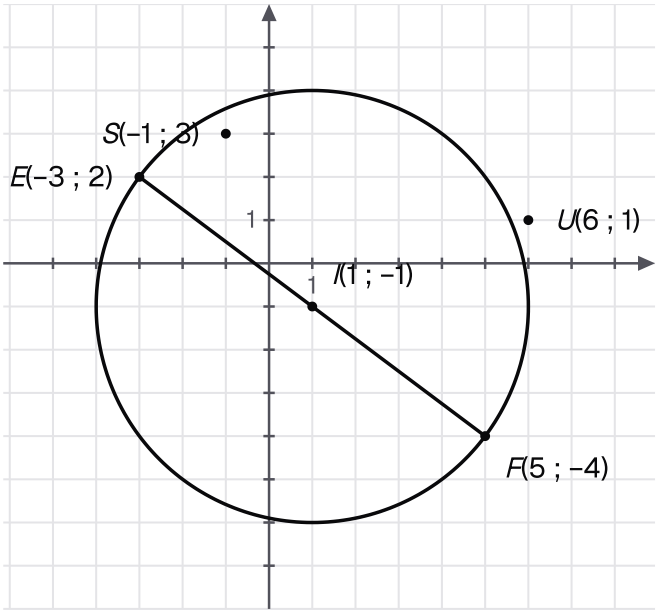
CORRIGÉ

Une distance est positive : comparer IS à 5 revient à comparer IS^2 à 25.

Rosier. $\overrightarrow{IS}(-2,4)$, donc $IS^2 = 4+16 = 20$. Comme $20 < 25$, on a $IS < 5$.

Banc. $\overrightarrow{IU}(5,2)$, donc $IU^2 = 25+4 = 29$. Comme $29 > 25$, on a $IU > 5$.

Conclusion. Le rosier S est arrosé ; le banc U reste sec.



La zone arrosée est le disque de centre I(1, -1) et de rayon 5 : le rosier S est dedans, le banc U reste dehors.

Exercice 3

Deux mesures d'angles orientés

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $\vec{u}(-1, 1)$, $\vec{v}(0, -2)$, $\vec{w}(3, -\sqrt{3})$ et $\vec{t}(-\sqrt{3}, 3)$.

1.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

INDICE

Outil : calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et les normes, puis divise par le produit des normes.

CORRIGÉ

On note θ une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$. Le repère est orthonormé direct, donc $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

Calculs. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \times 0 + 1 \times (-2) = -2$ et :

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= (-1) \times (-2) - 0 \times 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Puis $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = 2$, de produit $2\sqrt{2}$.

Cosinus et sinus.

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conclusion. Le seul réel de $]-\pi, \pi]$ qui a ce cosinus et ce sinus est $\dfrac{3\pi}{4}$: c'est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$.

2.

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{w}, \vec{t})$.

INDICE

Outil : même méthode ; simplifie $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

CORRIGÉ

On note θ une mesure de $(\vec{w}, \vec{t})$ et l'on procède comme à la question 1.

Calculs. $\vec{w} \cdot \vec{t} = -3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$ et :

$$\begin{aligned} \det(\vec{w}, \vec{t}) &= 3 \times 3 - (-\sqrt{3})^2 \\ &= 9 - 3 = 6. \end{aligned}$$

Les deux normes valent $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; leur produit vaut 12.

Cosinus et sinus. $\cos\theta = \dfrac{-6\sqrt{3}}{12} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La mesure principale de $(\vec{w}, \vec{t})$ est $\dfrac{5\pi}{6}$.

3.

En déduire la mesure principale de $(\vec{v}, \vec{u})$.

INDICE

Outil : échanger les deux vecteurs change la mesure en son opposée.

CORRIGÉ

Angle opposé. Échanger les deux vecteurs change une mesure en son opposée :

$$(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -\frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$$

Conclusion. Le réel $-\dfrac{3\pi}{4}$ appartient à $]-\pi, \pi]$: c'est la mesure principale de $(\vec{v}, \vec{u})$.

Exercice 4

Deux droites par leur vecteur normal

Dans un repère orthonormé, on considère le point $K(-2,5)$, le point $L(3,-1)$ et la droite (Δ) d'équation $2x-7y+4=0$.

1.

Écrire une équation cartésienne de la droite (D_1) passant par K et de vecteur normal $\vec{n}(1,3)$.

INDICE

Outil : pars de $x+3y+c=0$ et trouve c avec les coordonnées de K.

CORRIGÉ

Forme de l'équation. Une droite de vecteur normal $\vec{n}(1,3)$ admet une équation $x+3y+c=0$, où c est un réel.

Calcul de c. $K(-2,5)$ est sur (D_1), donc $-2+15+c=0$, d'où $c=-13$.

Conclusion. Une équation cartésienne de (D_1) est $x+3y-13=0$.

2.

Donner un vecteur directeur de (D_1) et un second point de (D_1).

INDICE

Outil : pour $ax+by+c=0$, le vecteur $(-b,a)$ dirige la droite.

CORRIGÉ

Vecteur directeur. Pour l'équation $ax+by+c=0$, le vecteur $(-b,a)$ dirige la droite ; ici $a=1$ et $b=3$, d'où le vecteur $\vec{u}(-3,1)$.

Second point. Le point K' tel que $\overrightarrow{KK'}=\vec{u}$ a pour coordonnées $(-2-3,5+1)$, soit $(-5,6)$. Contrôle : $-5+3\times 6-13=0$.

Conclusion. $\vec{u}(-3,1)$ dirige (D_1), et le point $(-5,6)$ appartient à (D_1).

3.

Écrire une équation cartésienne de la droite (D_2) passant par L et perpendiculaire à (Δ).

INDICE

Outil : un vecteur directeur de (Δ) est normal à (D_2).

CORRIGÉ

Vecteur normal. (Δ) : $2x-7y+4=0$ est dirigée par $(7,2)$. Comme (D_2) est perpendiculaire à (Δ), ce vecteur est normal à (D_2) : (D_2) : $7x+2y+c=0$.

Calcul de c. $L(3,-1)$ est sur (D_2), donc $21-2+c=0$, d'où $c=-19$.

Contrôle. Les vecteurs normaux $(2,-7)$ et $(7,2)$ sont orthogonaux : $2\times 7+(-7)\times 2=0$.

Conclusion. Une équation cartésienne de (D_2) est $7x+2y-19=0$.

Exercice 5

Un puits et deux chemins

Dans un repère orthonormé, d'unité le kilomètre, un puits est placé en $P(5,-2)$. Deux chemins rectilignes passent près de lui : (R_1) d'équation $4x-3y+6=0$, et (R_2) d'équation $y=-x+7$.

1.

Calculer la distance du puits au chemin (R_1).

INDICE

Outil : $d(P,(R_1))=\dfrac{|4x_P-3y_P+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$.

CORRIGÉ

Numérateur. En $P(5,-2)$: $4\times 5-3\times(-2)+6=32$.

Distance. On applique la formule de distance à une droite :

$$\begin{aligned} d(P,(R_1)) &= \frac{|32|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le puits est à $\dfrac{32}{5}$ km du chemin (R_1).

2.

Calculer la distance du puits au chemin (R_2).

INDICE

Outil : écris d'abord l'équation de (R_2) avec tous les termes dans le même membre.

CORRIGÉ

Équation cartésienne. $y=-x+7$ équivaut à $x+y-7=0$; ici $a=b=1$.

Distance. En P : $5-2-7=-4$. Donc :

$$\begin{aligned} d(P,(R_2)) &= \frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le puits est à $2\sqrt{2}$ km du chemin (R_2).

3.

Quel chemin est le plus proche du puits ?

INDICE

Outil : compare les carrés des deux distances.

CORRIGÉ

Deux distances positives se rangent comme leurs carrés.

Carrés. $\left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{1024}{25}$ et $(2\sqrt{2})^2 = 8 = \frac{200}{25}$.

Conclusion. $8 < \frac{1024}{25}$, donc $2\sqrt{2} < \frac{32}{5}$: le chemin (R_2) est le plus proche du puits.

Exercice 6

Centre et rayon

Dans un repère orthonormé, on étudie trois ensembles de points $M(x, y)$.

1.

Reconnaître l'ensemble (E_1) d'équation $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$.

INDICE

Outil : $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$; fais de même en y.

CORRIGÉ

Carrés. $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$ et $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$. Comme $-16 - 1 + 8 = -9$, l'équation équivaut à :

$$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Conclusion. Le second membre $9 = 3^2$ est strictement positif : (E_1) est le cercle de centre $(-4, 1)$ et de rayon 3.

2.

Reconnaître l'ensemble (E_2) d'équation $x^2 + y^2 - 10y + 30 = 0$.

INDICE

Outil : complète le carré en y, puis regarde le signe du second membre.

CORRIGÉ

Carré. $y^2 - 10y = (y-5)^2 - 25$, donc l'équation équivaut à :

$$x^2 + (y-5)^2 = -5$$

Signe. Pour tous réels x et y, le premier membre est positif ou nul, alors que $-5 < 0$.

Conclusion. Aucun point ne vérifie l'équation : $(E_2) = \varnothing$.

3.

Reconnaître l'ensemble (E_3) d'équation $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 12 = 0$.

INDICE

Outil : divise d'abord par 2, le coefficient commun de x^2 et de y^2.

CORRIGÉ

Division par 2. L'équation équivaut à $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$.

Carrés. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$, d'où :

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Conclusion. $16 = 4^2 > 0$: (E_3) est le cercle de centre $(1, -3)$ et de rayon 4.

Exercice 7

La nacelle d'une grande roue

Dans un repère orthonormé, d'unité le mètre, la nacelle d'une grande roue occupe à chaque instant le point $M(x, y)$ défini, pour $\theta \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = 6 + 5\sin\theta \end{cases}$$

1.

Écrire une équation cartésienne de la trajectoire de la nacelle. Préciser son centre et son rayon.

INDICE

Outil : isole $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

CORRIGÉ

Isoler. Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{x-3}{5}$ et $\sin\theta = \dfrac{y-6}{5}$.

Équation. Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{25} = 1$$

soit $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$.

Conclusion. La trajectoire est le cercle d'équation $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$, de centre $(3, 6)$ et de rayon 5.

2.

Donner la position de la nacelle pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, puis pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

INDICE

Outil : remplace θ par sa valeur et utilise les valeurs remarquables.

CORRIGÉ

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $x = 3 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{11}{2}$ et $y = 6 + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, donc $x = 3$ et $y = 6 - 5 = 1$.

Conclusion. La nacelle est en $\left(\dfrac{11}{2}, 6 + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, puis en $(3, 1)$, le point le plus bas de la roue.

3.

Écrire une représentation paramétrique du cercle d'équation $(x-2)^2+(y+7)^2=3$.

INDICE

Outil : lis le centre et le rayon, en prenant garde au signe et à la racine.

CORRIGÉ

Centre et rayon. L'équation s'écrit $(x-2)^2+(y-(-7))^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$: centre $(2,-7)$, rayon $\sqrt{3}$.

Conclusion. Une représentation paramétrique de ce cercle est, pour $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=-7+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$$

Exercice 8

La zone d'une antenne

Dans un repère orthonormé, d'unité le kilomètre, une antenne placée en $\Omega(2,3)$ couvre le disque de rayon $2\sqrt{2}$. Le bord de sa zone est le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $(x-2)^2+(y-3)^2=8$. Trois routes sont rectilignes : $(D_1) : x+y-1=0$, $(D_2) : x-7=0$ et $(D_3) : 2x+y-3=0$.

1.

Étudier la position de (D_1) par rapport à $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : calcule $d(\Omega,(D_1))$ et compare-la au rayon $2\sqrt{2}$.

CORRIGÉ

Distance. On applique la formule de distance à une droite, avec $\Omega(2,3)$:

$$\begin{aligned} d(\Omega,(D_1)) &= \frac{|2+3-1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. On a $d=r$: la route (D_1) est tangente à $\mathcal{C}$, elle touche la zone en un seul point.

2.

Étudier la position de (D_2) par rapport à $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : ici $a=1, b=0$ et $c=-7$.

CORRIGÉ

Distance. Pour (D_2), $a=1, b=0$ et $c=-7$:

$$d(\Omega,(D_2)) = \frac{|2-7|}{1} = 5$$

Comparaison. $5^2=25$ et $r^2=8$; comme $25>8$, on a $d>r$.

Conclusion. La route (D_2) ne rencontre pas $\mathcal{C}$.

3.

Étudier la position de (D_3) par rapport à $\mathcal{C}$.

INDICE

Outil : compare les carrés d^2 et $r^2 = 8$.

CORRIGÉ

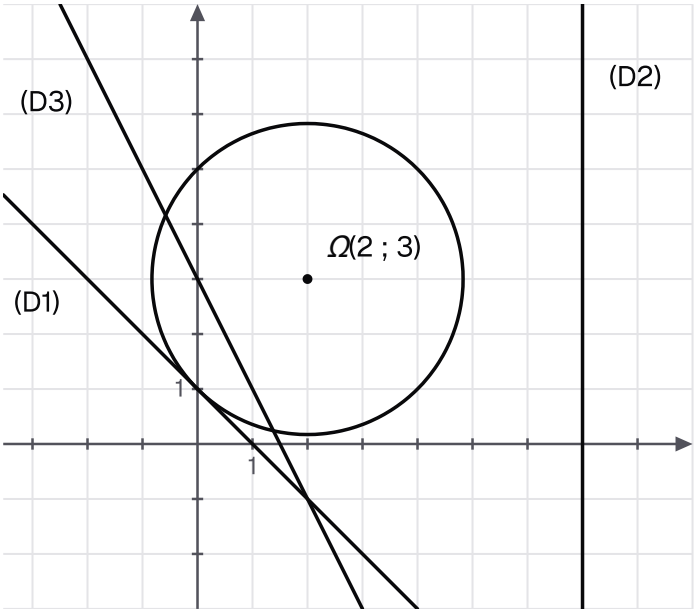
Distance.

$$d(\Omega, (D_3)) = \frac{|4 + 3 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

donc $d^2 = \dfrac{16}{5}$.

Comparaison. $\dfrac{16}{5} < 8$, donc $d < r$.

Conclusion. La route (D_3) coupe $\mathcal{C}$ en deux points.



Bilan des trois routes : (D1) touche le bord de la zone, (D2) passe à côté, (D3) la traverse.

Exercice 9

Demi-plan et disque

Dans un repère orthonormé, on note (P) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $2x - 3y + 6 > 0$, et (Q) l'ensemble des points tels que $x^2 + y^2 - 4x < 0$.

1.

Les points $O(0, 0)$, $G(-3, 1)$ et $J(0, 2)$ appartiennent-ils à (P) ?

INDICE

Outil : calcule $2x - 3y + 6$ en chaque point et regarde son signe.

CORRIGÉ

Calculs. On évalue $2x - 3y + 6$:

- en O : $6 > 0$;
- en G : $-6 - 3 + 6 = -3 < 0$;
- en J : $0 - 6 + 6 = 0$.

Conclusion. O appartient à (P) et G n'y appartient pas. J est sur la droite frontière ; l'inégalité étant stricte, J n'appartient pas à (P).

2.

Décrire l'ensemble (Q).

INDICE

Outil : complète le carré en x.

CORRIGÉ

Carré. $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$, donc l'inéquation équivaut à :

$$(x - 2)^2 + y^2 < 4$$

Conclusion. (Q) est l'ensemble des points situés à une distance strictement inférieure à 2 du point $(2, 0)$: l'intérieur du cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon 2, cercle exclu.

3.

Le point $V(1,1)$ appartient-il à la fois à (P) et à (Q) ?

INDICE

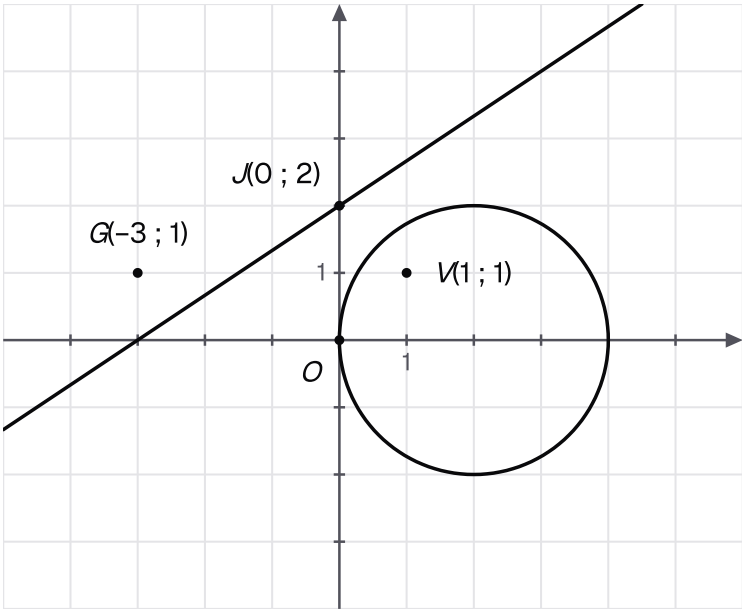
Outil : teste les deux inégalités en V.

CORRIGÉ

Demi-plan. En $V(1,1)$: $2-3+6=5>0$, donc $V \in (P)$.

Disque. En V : $1+1-4=-2<0$, donc $V \in (Q)$.

Conclusion. Oui, le point V appartient à la fois à (P) et à (Q).



Le point V(1, 1) est à la fois du côté de O par rapport à la droite 2x - 3y + 6 = 0 et à l'intérieur du cercle frontière de (Q).