BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/cours

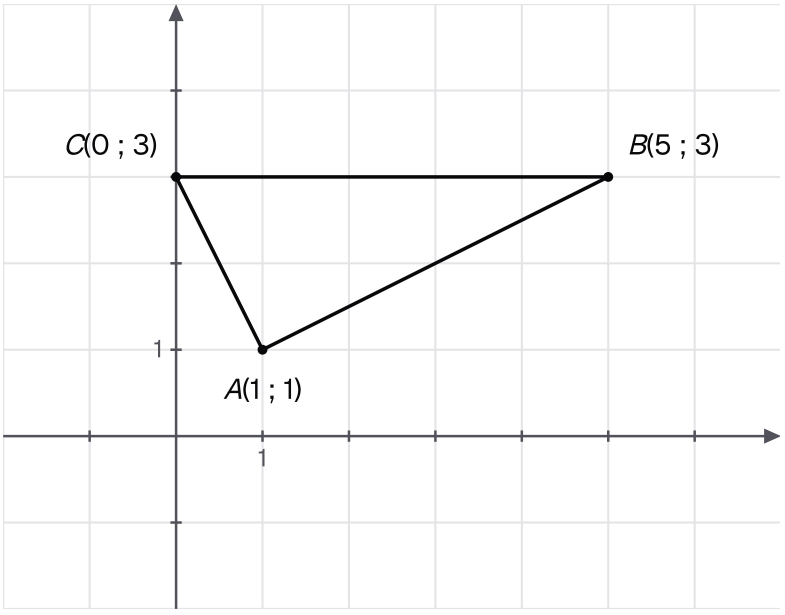
Chapitre	Semestre
Analytique du produit scalaire et applications	Semestre 1

Calculer des angles et des distances sans règle ni rapporteur

Sur une carte quadrillée en kilomètres, trois refuges de montagne sont repérés par leurs coordonnées : $A(1,1)$, $B(5,3)$ et $C(0,3)$. Le repère est orthonormé.

Un randonneur affirme que les sentiers de A vers B et de A vers C forment un angle droit.

Tu n'as ni règle, ni équerre, ni rapporteur. Peux-tu trancher par le calcul ?



Les trois refuges de la carte, A, B et C, sommets du triangle dont on se demande s'il a un angle droit.

Devine : Une prédiction

Le triangle ABC, de sommets $A(1,1)$, $B(5,3)$ et $C(0,3)$, est-il rectangle ?

A. Non, il n'a aucun angle droit.

Faux.

Le calcul des longueurs dit le contraire : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

B. Oui, il est rectangle en C.

Faux.

Le côté $[BC]$ est horizontal, mais $[CA]$ n'est pas vertical : l'angle en C n'est pas droit.

C. Oui, il est rectangle en A.

Juste.
Juste : $AB^2 = 20$, $AC^2 = 5$ et $BC^2 = 25$.

D. Oui, il est rectangle en B.

Faux.
Le plus long côté est $[BC]$: un angle droit lui serait opposé, donc placé en A.

Correction
On calcule les carrés des longueurs, avec la distance de deux points en repère orthonormé :

$$AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$AC^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$
$$BC^2 = (-5)^2 + 0^2 = 25$$

Comme $20 + 5 = 25$, la réciproque du théorème de Pythagore donne un angle droit en A.

Dans ce chapitre, tu l'obtiendras en une ligne : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Dans ce chapitre, le produit scalaire se calcule avec les **coordonnées**. Tu en déduis des longueurs, des angles et des angles droits.

Tu écris des équations de droites et de cercles, et tu calcules la distance d'un point à une droite.

Tu étudies la position d'une droite et d'un cercle, et tu écris des tangentes. Enfin, tu représentes des régions du plan définies par des inéquations.

Le produit scalaire du tronc commun

Un nombre attaché à deux vecteurs

Rappel du tronc commun. Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre réel**, pas un vecteur. On l'a défini avec les normes des deux vecteurs et le cosinus de leur angle.

Il est nul quand les vecteurs sont orthogonaux. Pour deux vecteurs non nuls, il est positif si leur angle est aigu, négatif s'il est obtus.

Devine : Le signe d'un produit scalaire

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour normes $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$. Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\dfrac{2\pi}{3}$. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

A. 3

Faux.
Le cosinus de $\dfrac{2\pi}{3}$ est négatif : le produit scalaire l'est aussi.

B. -3

Juste.
Juste : $3 \times 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$.

C. 6

Faux.

Tu as oublié le cosinus de l'angle.

D. $-3\sqrt{3}$

Faux.

Ce serait le cas pour un angle de cosinus $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, comme $\dfrac{5\pi}{6}$.

Correction

Par définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 3\times 2\times\cos\frac{2\pi}{3}\\ &= 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -3\end{aligned}$$

L'angle est obtus : le produit scalaire est négatif.

La définition et ses propriétés

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, leur **produit scalaire** est le réel $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$, où θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

- Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et tout réel k : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$, $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Ces propriétés de calcul, vues au tronc commun, sont rappelées sans démonstration.

Exemple : un produit scalaire par les normes et l'angle

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$ et $(\vec{u},\vec{v})\equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Par définition :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 4\times\sqrt{2}\times\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 4\end{aligned}$$

D'après les propriétés de calcul, $(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = 3 \times 4 = 12$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 16$.

À toi : Deux angles, deux signes

Soit $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 3$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$, puis lorsque $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi\ [2\pi]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la définition : le produit des normes, multiplié par le cosinus de l'angle.

Indice 2

Tu as besoin de $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de $\cos\pi = -1$.

Indice 3

Point délicat : pour l'angle π, les vecteurs sont de sens contraires ; le produit scalaire est négatif.

Réponse

Premier cas. Par définition :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 5 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{6} \\ &= 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Second cas. De même, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 \times \cos\pi = -15$.

Les vecteurs sont alors colinéaires et de sens contraires.

Expression analytique, norme, distance

Développer dans un repère orthonormé

En clair. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, prenons $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

On développe $\vec{u} \cdot \vec{v}$ comme un produit, grâce aux propriétés de calcul. On obtient quatre termes :

$$\begin{aligned}&2\,\vec{i} \cdot \vec{i} + 6\,\vec{i} \cdot \vec{j} \\ &+ \vec{j} \cdot \vec{i} + 3\,\vec{j} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un repère orthonormé, chacun de ces termes se calcule sans angle.

Devine : Quatre termes, une valeur

Le repère est orthonormé. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$, c'est-à-dire la somme suivante ?

$$\begin{aligned}&2\,\vec{i} \cdot \vec{i} + 6\,\vec{i} \cdot \vec{j} \\ &+ \vec{j} \cdot \vec{i} + 3\,\vec{j} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

A. 12

Faux.
Tu as compté $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1$: or $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.

B. 0

Faux.
$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$, et non 0.

C. 5

Juste.
Juste : $2 \times 1 + 0 + 0 + 3 \times 1 = 5$.

D. 7

Faux.
Tu as gardé les termes croisés et supprimé les autres : c'est l'inverse.

Correction
Le repère est orthonormé :

- $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$;
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$.

Il reste $2 + 3 = 5$. Avec les coordonnées $\vec{u}(2, 1)$ et $\vec{v}(1, 3)$, c'est le calcul $2 \times 1 + 1 \times 3$.

La formule et sa preuve

Propriété : Expression analytique du produit scalaire, norme et distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs, et $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Démonstration

Étape 1. Le repère est orthonormé : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant orthogonaux, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$.

Étape 2. On écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, puis on développe grâce aux propriétés du produit scalaire (distributivité, sortie des réels) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) = xx' + yy'$.

Étape 3. Avec $\vec{v} = \vec{u}$: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$; une norme est positive, donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Étape 4. La caractérisation de l'orthogonalité par un produit scalaire nul donne la dernière équivalence.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans la preuve, quelle propriété du repère annule les termes croisés $xy'(\vec{i}\cdot\vec{j})$ et $yx'(\vec{j}\cdot\vec{i})$?

A. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour norme 1.

Faux.

Cette propriété donne $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1$; elle ne touche pas les termes croisés.

B. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.

Juste.

Juste : leur produit scalaire est nul, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$.

C. Le repère a pour origine le point O.

Faux.

L'origine ne joue aucun rôle : on calcule avec des vecteurs.

D. Le produit scalaire est symétrique.

Faux.

La symétrie donne $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}$, mais pas la valeur 0.

Correction

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, donc $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$: les termes croisés disparaissent.

Leur norme 1 donne ensuite $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1$. Ces deux propriétés réunies font du repère un repère orthonormé.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit chaque vecteur avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis on développe le produit scalaire.

Le repère est orthonormé : $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$. Il reste $xx'+yy'$.

La norme vient de $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$, et la distance AB est la norme de $\overrightarrow{AB}$.

Calculer avec les coordonnées

Méthode : calculer avec les coordonnées

1. **Vérifie** que le repère est orthonormé.
2. **Calcule** les coordonnées des vecteurs utiles, par exemple $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A)$.
3. **Applique** $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$, ou $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. **Conclus** : un produit scalaire nul signifie que les deux vecteurs sont orthogonaux.

Exemple : deux vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}(3,-2)$ et $\vec{v}(4,6)$. D'après l'expression analytique :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 3\times 4+(-2)\times 6\\ &= 12-12=0\end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux. Leurs normes valent :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{9+4}=\sqrt{13}\\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{16+36}\\ &= \sqrt{52}=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

Exemple : le triangle des refuges

Reprenons $A(1,1)$, $B(5,3)$ et $C(0,3)$. On a $\overrightarrow{AB}(4,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,2)$.

Angle en A. D'après l'expression analytique :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+4=0$$

Le triangle est donc rectangle en A.

Contrôle par les distances.

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{16+4}=2\sqrt{5}\\ AC &= \sqrt{1+4}=\sqrt{5}\\ BC &= \sqrt{25+0}=5\end{aligned}$$

On retrouve $AB^2+AC^2=20+5=25=BC^2$.

Un piège, puis à toi

Attention : un repère orthonormé, sinon rien

✗ « Le vecteur $\vec{i}$ a pour coordonnées $(1,0)$, donc $\vec{i}\cdot\vec{i}=1^2+0^2=1$, quel que soit le repère. »

✓ Dans un repère où $\|\vec{i}\|=2$, $\|\vec{j}\|=1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, on a pourtant $\vec{i}\cdot\vec{i}=\|\vec{i}\|^2=4$. L'expression analytique n'est valable que dans un repère **orthonormé** : vérifie-le avant tout calcul.

Vérifie : Une distance

Dans un repère orthonormé, que vaut la distance EF, avec $E(-2,1)$ et $F(1,5)$?

A. 7

Faux.

Tu as ajouté les écarts 3 et 4 sans les élever au carré.

B. 25

Faux.

C'est EF^2 : prends sa racine carrée.

C. 5

Juste.

Juste : $\sqrt{9+16}=5$.

D. $\sqrt{7}$

Faux.

Les écarts s'élèvent au carré avant d'être additionnés.

Correction

On a $\overrightarrow{EF}(1-(-2),5-1)$, soit $\overrightarrow{EF}(3,4)$.

D'après l'expression analytique :

$$EF=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

À toi : La nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé, soit $E(-1,0)$, $F(2,1)$ et $G(1,4)$. Calcule $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FG}$, puis FE et FG. Quelle est la nature du triangle EFG ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{FE}$ et de $\overrightarrow{FG}$.

Indice 2

Applique l'expression analytique du produit scalaire, puis celle de la norme.

Indice 3

Point délicat : un produit scalaire nul donne un angle droit en F ; compare aussi les deux longueurs.

Réponse

On a $\overrightarrow{FE}(-3,-1)$ et $\overrightarrow{FG}(-1,3)$.

Angle en F. D'après l'expression analytique :

$$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FG}=3-3=0$$

Le triangle est rectangle en F.

Longueurs. $FE=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ et $FG=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.

Conclusion. Le triangle EFG est rectangle et isocèle en F.

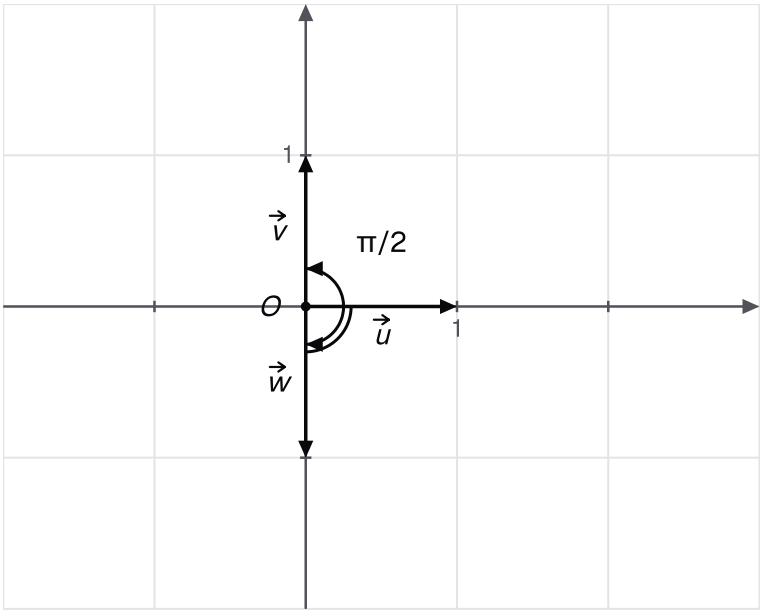
Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le cosinus ne voit pas le sens

En clair. Prends $\vec{u}(1,0)$, puis $\vec{v}(0,1)$ et $\vec{w}(0,-1)$. Les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}$ sont nuls tous les deux.

Pourtant, on va de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ par un quart de tour direct, et de $\vec{u}$ à $\vec{w}$ par un quart de tour dans l'autre sens. Le cosinus ne voit pas le sens : il faut aussi le **sinus**.

Pourquoi est-ce vrai ? Le sinus va venir d'un second calcul sur les coordonnées.



Trois vecteurs unitaires depuis l'origine : v s'obtient à partir de u par un quart de tour direct, w par un quart de tour qui tourne dans l'autre sens, vers le bas.

Devine : Deux angles de même cosinus

Soit $\vec{u}(1,0)$ et $\vec{w}(0,-1)$. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{w})$?

A. $\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

Un quart de tour direct mène de $\vec{u}$ au vecteur $(0,1)$, qui pointe vers le haut.

B. $-\dfrac{\pi}{2}$

Juste.

Juste : on tourne d'un quart de tour dans le sens indirect.

C. π

Faux.

Un demi-tour mène au vecteur $(-1,0)$; d'ailleurs $\cos\pi=-1$, alors que $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$.

D. 0

Faux.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires : l'angle n'est pas nul.

Correction
Le vecteur $\vec{w}$ pointe vers le bas : on va de $\vec{u}$ à $\vec{w}$ par un quart de tour dans le sens indirect. La mesure principale est $-\dfrac{\pi}{2}$.

Les réels $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ ont le même cosinus 0 ; seul le sinus, 1 ou -1, les distingue.

Le cosinus et le sinus par les coordonnées

Propriété : Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls, et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

Le réel $xy' - x'y$ est le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration

Étape 1. Soit A le point du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{OA}$ ait la même direction et le même sens que $\vec{u}$, et α une abscisse curviligne de A. Alors $\overrightarrow{OA}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\overrightarrow{OA}$, donc $x = \|\vec{u}\|\cos\alpha$ et $y = \|\vec{u}\|\sin\alpha$. De même, avec un point B et une abscisse curviligne β : $x' = \|\vec{v}\|\cos\beta$ et $y' = \|\vec{v}\|\sin\beta$.

Étape 2. Par définition d'une mesure d'un angle orienté, $\theta = \beta - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Le cosinus et le sinus sont de période 2π, donc $\cos\theta = \cos(\beta - \alpha)$ et $\sin\theta = \sin(\beta - \alpha)$.

Étape 3. Le cosinus et le sinus d'une différence donnent $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$ et $\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$.

Étape 4. On multiplie par $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ et on remplace grâce à l'étape 1 : on obtient $xx' + yy'$ et $xy' - x'y$. On divise enfin par $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, qui n'est pas nul.

Vérifie : L'outil de la preuve

Dans la preuve, quel résultat du chapitre « Calcul trigonométrique » fait apparaître $xx' + yy'$ et $xy' - x'y$?

A. La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Faux.
Elle ne fait intervenir qu'un seul réel ; la preuve en compare deux, α et β.

B. Les formules des angles associés.

Faux.
Aucun réel de la forme $\pi - x$ ou $\pi + x$ n'apparaît dans la preuve.

C. Les formules de duplication.
Faux.
Aucun angle double n'apparaît dans la preuve.

D. Le cosinus et le sinus d'une différence.
Juste.
Juste : une mesure de l'angle est $\beta - \alpha$.

Correction
On écrit $\vec{u} = \|\vec{u}\|(\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\beta, \sin\beta)$. Une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\beta - \alpha$.

Le cosinus et le sinus d'une différence donnent alors, après multiplication par $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, les expressions $xx' + yy'$ et $xy' - x'y$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque vecteur s'écrit avec sa norme et une abscisse curviligne : $x = \|\vec{u}\|\cos\alpha$ et $y = \|\vec{u}\|\sin\alpha$.

Une mesure de l'angle est la différence $\beta - \alpha$. Le cosinus et le sinus d'une différence font le reste.

Le numérateur du cosinus est le produit scalaire ; celui du sinus est le déterminant.

Trouver une mesure

Méthode : trouver la mesure principale d'un angle orienté

1. **Calcule** $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\det(\vec{u}, \vec{v})$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. **Divise** par $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$: tu obtiens $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
3. **Reconnais** le réel θ de $]-\pi, \pi]$ qui a ce cosinus et ce sinus, grâce aux valeurs remarquables.
4. **Contrôle** le signe : si $\sin\theta > 0$, θ est dans $]0, \pi[$; si $\sin\theta < 0$, il est dans $]-\pi, 0[$.

Exemple : un angle droit direct

Soit $\vec{u}(1, \sqrt{3})$ et $\vec{v}(-\sqrt{3}, 1)$.

Normes. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3+1} = 2$.

Produit scalaire et déterminant. D'après l'expression analytique, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$. Puis :

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 1 \times 1 - (-\sqrt{3}) \times \sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Mesure. D'après le cosinus et le sinus d'un angle orienté, $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = \frac{4}{4} = 1$.

Conclusion. $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: la mesure principale est $\frac{\pi}{2}$.

Exemple : un sinus négatif

Soit $\vec{u}(2,0)$ et $\vec{v}(-1,1)$, avec $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$.

D'après l'expression analytique, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2$. Le déterminant vaut $\det(\vec{u},\vec{v}) = 2\times 1 - (-1)\times 0 = 2$.

D'après le cosinus et le sinus d'un angle orienté :

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Dans l'autre ordre, $\det(\vec{v},\vec{u}) = -2$: le sinus devient négatif, et $(\vec{v},\vec{u}) \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Le signe du sinus, puis à toi

Vérifie : Le cosinus ne suffit pas

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a trouvé $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) < 0$. Quelle est la mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$?

A. $\frac{\pi}{3}$

Faux.

Son sinus est positif, alors que le déterminant est négatif.

B. $-\frac{\pi}{6}$

Faux.

Son cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et non $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{\pi}{3}$

Juste.

Juste : cosinus $\frac{1}{2}$ et sinus négatif.

D. $\frac{2\pi}{3}$

Faux.

Son cosinus vaut $-\frac{1}{2}$.

Correction

Le déterminant a le signe de $\sin\theta$, car $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| > 0$. Donc $\sin\theta < 0$, et θ est dans $]-\pi, 0[$.

Le seul réel de cet intervalle dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

À toi : Une mesure à trouver

Soit $\vec{u}(2, 2\sqrt{3})$ et $\vec{v}(-3, 0)$. Détermine la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Indice 2

Tu dois trouver $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

Indice 3

Point délicat : le signe du déterminant décide entre $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

Réponse

Normes. $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 12} = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3$.

Produit scalaire et déterminant. D'après l'expression analytique, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 = -6$. Puis :

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 2 \times 0 - (-3) \times 2\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Cosinus et sinus. D'après le cosinus et le sinus d'un angle orienté :

$$\cos\theta = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion. La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{2\pi}{3}$.

Vecteur normal et équation cartésienne

Un vecteur perpendiculaire à la droite

Rappel du tronc commun. Pour décrire une droite, on donne un de ses points et un **vecteur directeur**. La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Dans ce chapitre, on la décrit aussi par un vecteur qui lui est **perpendiculaire**. Ce vecteur se lit directement dans l'équation.

Devine : Un vecteur perpendiculaire

La droite (D) a pour équation $2x+3y-6=0$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-3,2)$. Lequel de ces vecteurs est orthogonal à $\vec{u}$?

A. Le vecteur $(3,-2)$.

Faux.

C'est $-\vec{u}$: il dirige aussi la droite.

B. Le vecteur $(-3,2)$.

Faux.

C'est $\vec{u}$ lui-même.

C. Le vecteur $(2,3)$.

Juste.

Juste : $(-3)\times 2+2\times 3=0$.

D. Le vecteur $(3,2)$.

Faux.

$(-3)\times 3+2\times 2=-5$: le produit scalaire n'est pas nul.

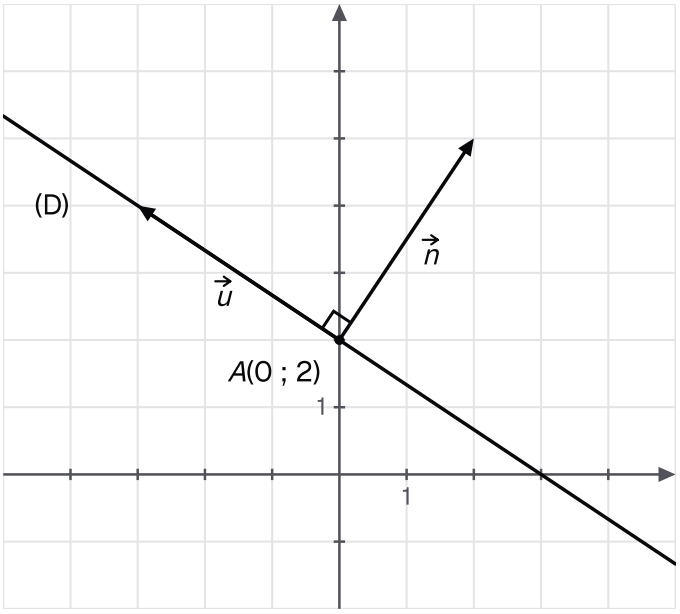
Correction

D'après l'expression analytique, $(-3)\times 2+2\times 3=0$: le vecteur $(2,3)$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Ses coordonnées sont les coefficients de x et de y dans l'équation de (D). Ce n'est pas un hasard : c'est l'objet de cette section.

Définition : Vecteur normal à une droite

Soit (D) une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D). On appelle **vecteur normal** à (D) tout vecteur **non nul** $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$.



La droite (D) d'équation 2x + 3y - 6 = 0 de l'activité : u(-3, 2) la dirige, n(2, 3) lui est perpendiculaire.

L'équation d'une droite de vecteur normal donné

En clair. Un point M est sur la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ quand $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Avec les coordonnées, cette condition devient une équation du premier degré en x et y.

Pourquoi est-ce vrai ? L'expression analytique du produit scalaire transforme l'orthogonalité en calcul.

Propriété : Équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a, b et c trois réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- La droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Elle a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.
- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$; le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ en est un vecteur directeur.

Démonstration

Étape 1. Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est non nul et $\vec{n} \cdot \vec{u} = -ab + ba = 0$. Si un vecteur $\vec{v}(p, q)$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{v} = ap + bq = 0$, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -bq - ap = 0$: $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Réciproquement, si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors $\vec{n} \cdot \vec{v} = k(\vec{n} \cdot \vec{u}) = 0$. Les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$ sont donc exactement les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

Étape 2. Soit (D) la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Ses vecteurs directeurs sont orthogonaux à $\vec{n}$, donc colinéaires à $\vec{u}$ d'après l'étape 1 : $\vec{u}$ dirige (D). Ainsi $M \in (D)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire, d'après l'étape 1, si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Étape 3. Avec $M(x, y)$, l'expression analytique du produit scalaire donne $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, soit $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.

Étape 4. Réciproquement, l'équation $ax + by + c = 0$ a une solution (x_A, y_A), par exemple $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ sinon. Comme $c = -ax_A - by_A$, l'équation s'écrit $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: c'est la droite de l'étape 2.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans la preuve, quel outil transforme la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ en l'équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$?

A. L'expression analytique du produit scalaire.

Juste.
Juste : $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$ et $\vec{n}(a, b)$ donnent $a(x - x_A) + b(y - y_A)$.

B. Le théorème de Pythagore.

Faux.
Aucun triangle rectangle n'est utilisé pour écrire l'équation.

C. Le déterminant de deux vecteurs.

Faux.
Le déterminant sert à reconnaître des vecteurs colinéaires, pas à écrire l'équation.

D. Les coordonnées du milieu d'un segment.

Faux.
Aucun milieu n'intervient dans cette preuve.

Correction
Avec $M(x, y)$, on a $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$. Le repère est orthonormé : d'après l'expression analytique,

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \\ &= a(x - x_A) + b(y - y_A) \end{aligned}$$

En développant, on obtient $ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_A$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}(a, b)$ sont exactement les vecteurs colinéaires à $\vec{u}(-b, a)$: le déterminant et les propriétés de calcul du produit scalaire le prouvent.

Un point M est donc sur la droite quand $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. L'expression analytique écrit cette condition $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, toute équation de cette forme décrit une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$.

Une droite, puis une médiatrice

Exemple : une droite par un point, de vecteur normal donné

Cherchons la droite (D) passant par $A(3,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,-1)$.

Forme. D'après l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné, (D) a une équation $2x-y+c=0$.

Calcul de c. Le point A la vérifie : $6-1+c=0$, donc $c=-5$.

Conclusion. On obtient (D) : $2x-y-5=0$.

Contrôle : le vecteur $\vec{u}(1,2)$ dirige (D), et $\vec{n}\cdot\vec{u}=2-2=0$.

Méthode : écrire l'équation d'une droite de vecteur normal donné

1. **Trouve** un point A de la droite et un vecteur normal $\vec{n}(a,b)$.
2. **Écris** l'équation sous la forme $ax+by+c=0$.
3. **Calcule** c : les coordonnées de A vérifient l'équation.
4. **Vérifie** avec un second point connu de la droite, s'il en existe un.

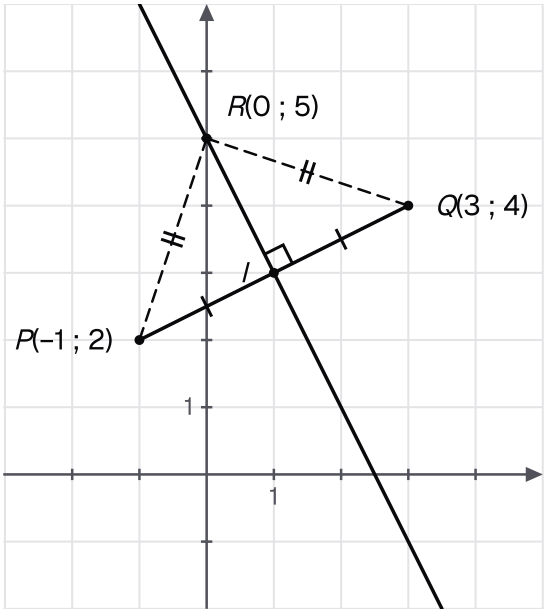
Exemple : la médiatrice d'un segment

Soit $P(-1,2)$ et $Q(3,4)$. La médiatrice de $[PQ]$ passe par le milieu $I(1,3)$ et elle est perpendiculaire à (PQ) : le vecteur $\overrightarrow{PQ}(4,2)$ lui est normal.

Équation. D'après l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné, elle a une équation $4x+2y+c=0$. Avec I : $4+6+c=0$, donc $c=-10$.

En divisant par 2, on obtient $2x+y-5=0$.

Contrôle. Le point $R(0,5)$ est sur cette droite, et $RP^2=1+9=10$, $RQ^2=9+1=10$.



La médiatrice de [PQ] traverse le milieu I à angle droit ; le point de contrôle R est à la même distance de P et de Q.

Un piège, puis à toi

Attention : vecteur normal ou vecteur directeur

✗ « La droite d'équation $2x - 5y + 1 = 0$ est dirigée par le vecteur $(2, -5)$. »

✓ Le vecteur $\vec{n}(2, -5)$ est **normal** à cette droite. Un vecteur directeur est $\vec{u}(5, 2)$, et $2 \times 5 + (-5) \times 2 = 0$.

Confondre les deux revient à échanger droites parallèles et droites perpendiculaires.

À toi : Une perpendiculaire par un point

Soit (Δ) la droite d'équation $x - 4y + 2 = 0$ et $B(-2, 5)$. Écris une équation de la droite (L) passant par B et perpendiculaire à (Δ). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Un vecteur directeur de (Δ) est $(-b, a)$.
Indice 2
Ce vecteur directeur de (Δ) est normal à (L).
Indice 3
Point délicat : calcule la constante c avec les coordonnées de B, puis vérifie que B est sur ta droite.

Réponse
Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(4, 1)$. La droite (L) est perpendiculaire à (Δ) : $\vec{u}$ est normal à (L).

D'après l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné, (L) a une équation $4x + y + c = 0$. Avec B : $-8 + 5 + c = 0$, donc $c = 3$.

Conclusion. La perpendiculaire cherchée est $(L) : 4x + y + 3 = 0$.

Droites perpendiculaires, droites parallèles

Comparer deux vecteurs normaux

En clair. Deux droites sont perpendiculaires quand leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Elles sont parallèles quand leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Les coefficients des équations suffisent donc : un produit scalaire ou un déterminant, et la question est réglée.

Devine : Perpendiculaires ?

Les droites d'équations $x + 3y - 1 = 0$ et $3x - y + 2 = 0$ sont-elles perpendiculaires ?

A. Oui : $1 \times 3 + 3 \times (-1) = 0$.

Juste.
Juste : leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

B. Non, car elles sont parallèles.

Faux.
$1 \times (-1) - 3 \times 3 = -10$: leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

C. Non : les constantes -1 et 2 diffèrent.

Faux.
Les constantes ne disent rien de la direction ; seuls a et b comptent.

D. Non : leurs coefficients de x ont le même signe.

Faux.
Le signe des coefficients ne suffit pas : on calcule $aa' + bb'$.

Correction
Les vecteurs normaux sont $\vec{n}(1, 3)$ et $\vec{n}'(3, -1)$. D'après l'expression analytique, $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3 - 3 = 0$: ils sont orthogonaux, donc les droites sont perpendiculaires.

Deux critères sur les coefficients

Propriété : Droites perpendiculaires, droites parallèles

Dans un repère orthonormé, soit (D) et (D') deux droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, de vecteurs normaux $\vec{n}(a, b)$ et $\vec{n}'(a', b')$.

- (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Démonstration

Idée de la preuve. D'après l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné, $\vec{u}(-b, a)$ dirige (D) et $\vec{u}'(-b', a')$ dirige (D'). Les droites sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{u}' = bb' + aa' = 0$, par l'expression analytique du produit scalaire. Elles sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{u}') = -ba' + b'a = 0$. Le lien entre droites perpendiculaires et vecteurs directeurs orthogonaux, vu au tronc commun, n'est pas détaillé.

Exemple : deux droites perpendiculaires

Soit $(D) : 2x - y - 5 = 0$ et $(D') : x + 2y - 4 = 0$.

Position. Ici $aa' + bb' = 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$. D'après le critère des droites perpendiculaires, (D) et (D') sont perpendiculaires.

Point commun. Il vérifie les deux équations. La première donne $y = 2x - 5$; on reporte dans la seconde :

$$x + 2(2x - 5) - 4 = 0$$

soit $5x - 14 = 0$. Donc $x = \dfrac{14}{5}$ et $y = \dfrac{28}{5} - 5 = \dfrac{3}{5}$.

Exemple : deux droites parallèles

Soit $(D) : 2x - y - 5 = 0$ et $(D'') : -4x + 2y + 3 = 0$. Ici :

$$\begin{aligned} ab'' - a''b &= 2 \times 2 - (-4) \times (-1) \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

D'après le critère des droites parallèles, (D) et (D'') sont parallèles.

Elles sont distinctes : $A(3, 1)$ est sur (D), mais $-12 + 2 + 3 = -7 \neq 0$.

À toi, puis une remarque

À toi : Parallèle et perpendiculaire

Soit $(D) : 3x + 2y - 1 = 0$ et $B(-1, 4)$. Écris une équation de la parallèle à (D) passant par B, puis de la perpendiculaire à (D) passant par B. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Une parallèle à (D) a le même vecteur normal $\vec{n}(3, 2)$.
Indice 2
Une perpendiculaire à (D) a pour vecteur normal un vecteur directeur de (D), par exemple $(-2, 3)$.

Indice 3
Point délicat : dans chaque cas, calcule la constante avec les coordonnées de B.

Réponse
La parallèle. Elle a une équation $3x + 2y + c = 0$. Avec B : $-3 + 8 + c = 0$, donc $c = -5$. Équation : $3x + 2y - 5 = 0$.

La perpendiculaire. D'après le critère des droites perpendiculaires, elle a pour vecteur normal $(-2, 3)$, car $3 \times (-2) + 2 \times 3 = 0$.

Son équation s'écrit $-2x + 3y + c' = 0$. Avec B : $2 + 12 + c' = 0$, donc $c' = -14$. Équation : $-2x + 3y - 14 = 0$.

Remarque : Deux équations, une seule droite

Les équations $2x - y - 5 = 0$ et $-4x + 2y + 10 = 0$ décrivent la **même** droite : la seconde est la première multipliée par -2.

Des droites parallèles peuvent donc être confondues. Pour le savoir, cherche si un point de l'une est sur l'autre.

Distance d'un point à une droite

Le plus court chemin

En clair. Pour rejoindre une route rectiligne au plus vite, on marche perpendiculairement à elle. Le point atteint est le **projeté orthogonal** du point de départ.

La longueur parcourue est la distance du point à la droite. Dans un repère orthonormé, elle se calcule avec les coefficients de l'équation.

Devine : Le plus court chemin

Soit (D) une droite, A un point hors de (D) et H son projeté orthogonal sur (D). Pour un point M de (D) distinct de H, comment se comparent AM et AH ?

A. On a $AM = AH$.
Faux.
Pour $M \neq H$, le triangle AHM est rectangle en H, donc $AM^2 = AH^2 + HM^2 > AH^2$: seul H est à la distance AH de A.

B. On a $AM < AH$.
Faux.
C'est l'inverse : dans le triangle AHM, l'hypoténuse est $[AM]$.

C. Cela dépend de la position de M.
Faux.

Pour tout point M de (D) distinct de H, la comparaison est la même.

D. On a $AM > AH$.

Juste.

Juste : $AM^2 = AH^2 + HM^2$, avec $HM > 0$.

Correction

Le triangle AHM est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AH^2 + HM^2$, avec $HM > 0$. Donc $AM > AH$: le point H est le point de (D) le plus proche de A.

La formule de la distance

Propriété : Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé, soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et $A(x_A, y_A)$ un point. On note H le projeté orthogonal de A sur (D). La **distance** du point A à la droite (D) est la distance AH, et

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration

Idée de la preuve. Soit $\vec{n}(a, b)$ et $H(x_H, y_H)$. Le vecteur $\overrightarrow{HA}$ est orthogonal à (D), donc colinéaire à $\vec{n}$; l'angle de ces deux vecteurs mesure 0 ou π, et la définition du produit scalaire donne $|\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$. Par l'expression analytique, $\overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = a(x_A - x_H) + b(y_A - y_H) = ax_A + by_A + c$, car $ax_H + by_H = -c$: H est sur (D). On divise par $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le cas où A est sur (D), où les deux membres sont nuls, n'est pas détaillé.

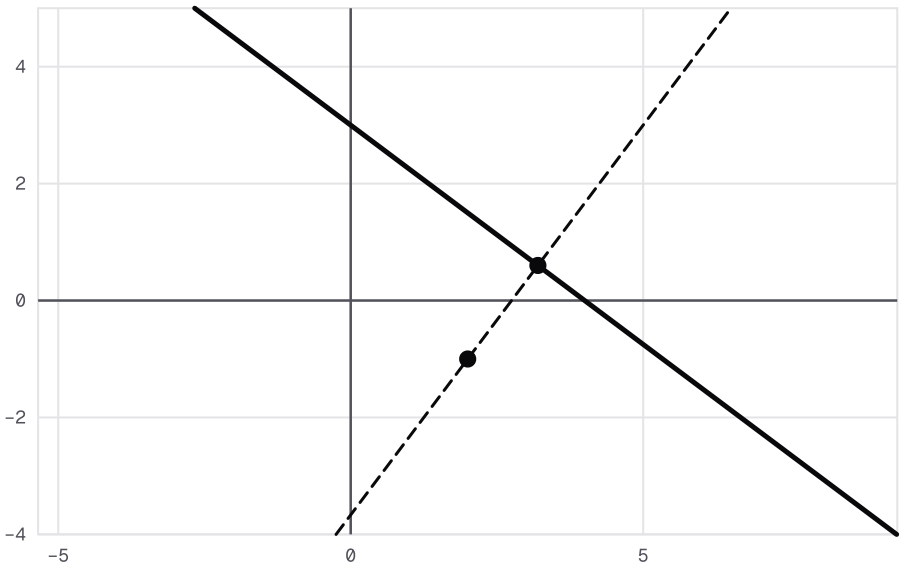
Exemple : une distance en une ligne

Soit (D) : $3x + 4y - 12 = 0$ et $A(2, -1)$. D'après la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} & d(A, (D)) \\ &= \frac{|3 \times 2 + 4 \times (-1) - 12|}{\sqrt{9 + 16}} \\ &= \frac{|-10|}{5} = 2 \end{aligned}$$

Contrôle. Le projeté orthogonal de A est $H\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$: il est sur (D), et $\overrightarrow{AH}\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ est colinéaire à $\vec{n}(3, 4)$. On retrouve :

$$AH = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}} = 2$$



La droite (D) : 3x + 4y – 12 = 0, le point A(2, –1) et son projeté orthogonal H. Le segment [AH] mesure 2.

Méthode, piège, aire, puis à toi

Méthode : calculer la distance d'un point à une droite

1. **Écris** l'équation de la droite sous la forme $ax + by + c = 0$, tous les termes dans le même membre.
2. **Remplace** x et y par les coordonnées du point.
3. **Prends** la valeur absolue du résultat.
4. **Divise** par $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Attention : la valeur absolue et la racine

✗ « Pour $A(1, 2)$ et $(D) : 3x - 4y + 1 = 0$, on a $d(A, (D)) = \dfrac{3 - 8 + 1}{9 + 16} = -\dfrac{4}{25}$. »

✓ Une distance est positive : on prend la valeur absolue, $|-4| = 4$. Le dénominateur est une **racine** : $\sqrt{9 + 16} = 5$. Donc $d(A, (D)) = \dfrac{4}{5}$.

Si la droite est donnée par $y = mx + p$, écris d'abord $mx - y + p = 0$.

Exemple : une hauteur et une aire

Reprenons le triangle $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(0, 3)$.

Équation de (AC). Le vecteur $\overrightarrow{AC}(-1,2)$ dirige (AC), et le vecteur $(2,1)$ lui est orthogonal. D'après l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné, (AC) a une équation $2x+y+c=0$. Avec $A(1,1)$: $2+1+c=0$, donc $c=-3$ et (AC) : $2x+y-3=0$.

Hauteur issue de B. D'après la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(B,(AC)) &= \frac{|10+3-3|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Aire. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{AC \times d(B,(AC))}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = 5 \end{aligned}$$

À toi : Une droite donnée par y = mx + p

Calcule la distance du point $E(-2,3)$ à la droite (D) d'équation $y=2x+1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris d'abord l'équation de (D) sous la forme $ax+by+c=0$.
Indice 2
Applique la distance d'un point à une droite, avec $a=2$, $b=-1$ et $c=1$.
Indice 3
Point délicat : garde la valeur absolue au numérateur et la racine au dénominateur.

Réponse
On écrit d'abord (D) : $2x-y+1=0$. D'après la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} & d(E,(D)) \\ &= \frac{|2\times(-2)-3+1|}{\sqrt{4+1}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Équation cartésienne d'un cercle

Un cercle, c'est une distance

En clair. Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r de Ω. Dans un repère orthonormé, une distance se calcule avec les coordonnées.

Pourquoi est-ce vrai ? Écrire $\Omega M = r$ avec les coordonnées de M donne une équation du cercle.

Devine : Sur le cercle ?

Le point $M(5,3)$ est-il sur le cercle de centre $\Omega(2,-1)$ et de rayon 5 ?

A. Non : M est trop loin de Ω.

Faux.

Calcule la distance : elle vaut exactement le rayon.

B. Oui : $\Omega M = 5$.

Juste.

Juste : $\Omega M = \sqrt{9+16} = 5$.

C. Non : $\Omega M = 3 + 4 = 7$.

Faux.

Les écarts s'élèvent au carré avant d'être additionnés.

D. On ne peut pas le savoir sans figure.

Faux.

Le calcul de la distance suffit.

Correction

On a $\overrightarrow{\Omega M}(3,4)$. D'après l'expression analytique :

$$\Omega M = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Le point M est à la distance 5 du centre : il est sur le cercle.

L'équation et sa preuve

Propriété : Équation cartésienne d'un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $r > 0$. Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Cette équation s'écrit aussi $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Démonstration

Étape 1. Par définition du cercle, $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M = r$.

Étape 2. Les réels ΩM et r sont positifs, donc $\Omega M = r$ si et seulement si $\Omega M^2 = r^2$.

Étape 3. La distance de deux points dans un repère orthonormé donne $\Omega M^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, d'où l'équation.

Étape 4. On développe : $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$, soit $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans la preuve, pourquoi peut-on remplacer l'égalité $\Omega M = r$ par $\Omega M^2 = r^2$?

A. Parce que $a = b$ équivaut toujours à $a^2 = b^2$.

Faux.

On a $(-2)^2 = 2^2$, et pourtant $-2 \neq 2$: il faut des réels positifs.

B. Parce que le rayon du cercle vaut 1.

Faux.

Le rayon r est un réel strictement positif quelconque.

C. Parce que ΩM et r sont positifs.

Juste.

Juste : deux réels positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont.

D. Parce que le théorème de Pythagore l'impose.

Faux.

Aucun triangle rectangle n'intervient à cette étape.

Correction

Les réels ΩM et r sont positifs. Pour deux réels positifs, l'égalité équivaut à l'égalité des carrés.

Or ΩM^2 s'écrit sans racine, d'après la distance de deux points : $(x - a)^2 + (y - b)^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le cercle est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$. Les deux membres étant positifs, on élève au carré.

La distance de deux points en repère orthonormé donne alors $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

En développant, on obtient la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Exemple : du centre et du rayon à l'équation

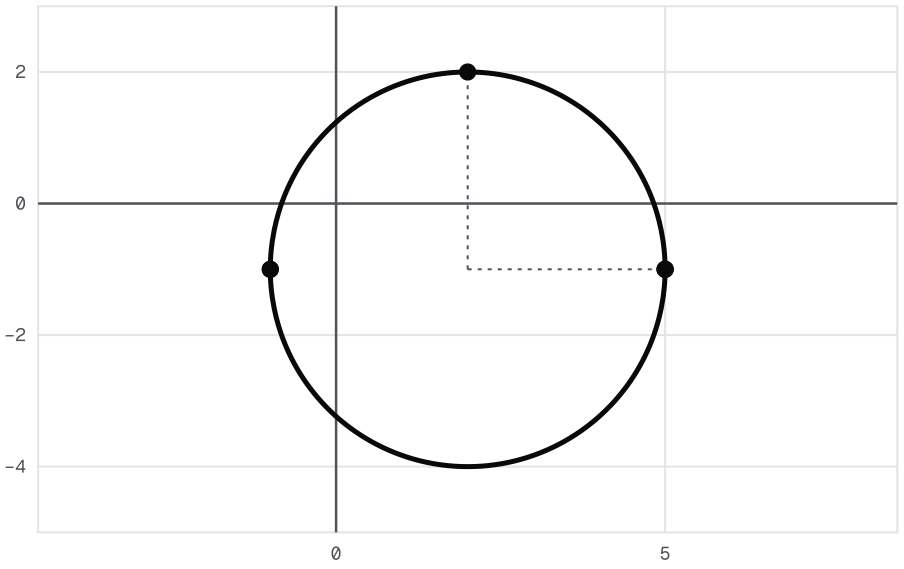
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(2, -1)$ et de rayon 3. D'après l'équation cartésienne d'un cercle :

$$\mathcal{C} : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

En développant, $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$, soit $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Contrôles. On a bien $c = a^2 + b^2 - r^2 = 4 + 1 - 9 = -4$. Le point $(5, -1)$ est sur $\mathcal{C}$, car $9 + 0 = 9$.

Reconnaître un cercle



Le cercle de centre Ω(2, −1) et de rayon 3, formé de deux demi-cercles, avec deux rayons.

Propriété : Reconnaître un cercle par son équation

Dans un repère orthonormé, soit a, b et c trois réels, et (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. On pose $k = a^2 + b^2 - c$.

- Si $k > 0$, (E) est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, (E) est réduit au point $\Omega(a, b)$.
- Si $k < 0$, (E) est l'ensemble vide.

Démonstration

Idée de la preuve. On complète les carrés : $x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$ et $y^2 - 2by = (y - b)^2 - b^2$. L'équation équivaut donc à $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, c'est-à-dire à $\Omega M^2 = k$. Si $k > 0$, l'équation cartésienne d'un cercle conclut ; si $k = 0$, seul $M = \Omega$ convient ; si $k < 0$, aucun point ne convient, car un carré de distance est positif. Le détail des trois cas est omis.

Méthode : reconnaître un cercle par son équation

1. **Vérifie** que x^2 et y^2 ont le même coefficient, sans terme en xy ; divise par ce coefficient s'il n'est pas 1.
2. **Complète les carrés** : $x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$, et de même en y.
3. **Écris** l'équation sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$.

4. **Conclus** selon le signe de k : un cercle de rayon $\sqrt{k}$ si $k > 0$, le seul point $\Omega(a, b)$ si $k = 0$, l'ensemble vide si $k < 0$.

Exemple : un centre et un rayon

Soit (E) : $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

Carrés complétés. On a $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ et $y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9$. L'équation devient :

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 4 + 9 + 3 \\ &= 16\end{aligned}$$

Conclusion. Le second membre 16 est strictement positif. D'après la propriété qui reconnaît un cercle par son équation, (E) est le cercle de centre $\Omega(-2, 3)$ et de rayon 4.

Deux pièges, puis trois points

Attention : le signe du centre et celui du second membre

✗ « $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ est le cercle de centre $(3, 1)$ et de rayon 16. »

✓ On écrit $(x + 3)^2 = (x - (-3))^2$: le centre est $\Omega(-3, 1)$, et le rayon est $\sqrt{16} = 4$.

Vérifie aussi le signe : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ s'écrit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -1$. Un carré de distance n'est jamais négatif : cet ensemble est **vide**.

Méthode : le cercle passant par trois points

1. **Vérifie** que les trois points A, B, C ne sont pas alignés : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$.
2. **Cherche** une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
3. **Remplace** x et y par les coordonnées de chaque point : tu obtiens trois équations en α, β et γ.
4. **Résous** ce système, puis **lis** le centre et le rayon en complétant les carrés.

Exemple : un cercle par trois points

Soit $O(0, 0)$, $K(4, 0)$ et $L(0, 2)$.

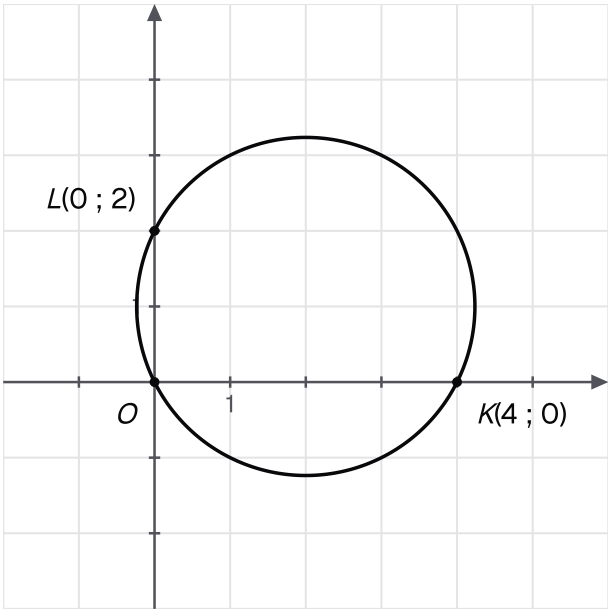
Points non alignés. $\det(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OL}) = 4 \times 2 - 0 \times 0 = 8 \neq 0$.

Système. On cherche une équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

- Avec O : $\gamma = 0$.
- Avec K : $16 + 4\alpha = 0$, donc $\alpha = -4$.

- Avec L : $4 + 2\beta = 0$, donc $\beta = -2$.

Conclusion. L'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ s'écrit $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Comme $5 > 0$, c'est le cercle de centre $(2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.



Le cercle trouvé par le calcul passe bien par les trois points O, K et L de l'exemple.

À toi : Un centre et un rayon

Détermine la nature de l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Complète les carrés : $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.
Indice 2
Fais de même avec $y^2 + 8y$.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe du second membre avant de conclure, et lis le centre avec le bon signe.

Réponse
On complète les carrés : $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$ et $y^2 + 8y = (y+4)^2 - 16$. L'équation devient :

$$\begin{aligned}&(x-3)^2 + (y+4)^2 \\ &= 9 + 16 - 9 \\ &= 16\end{aligned}$$

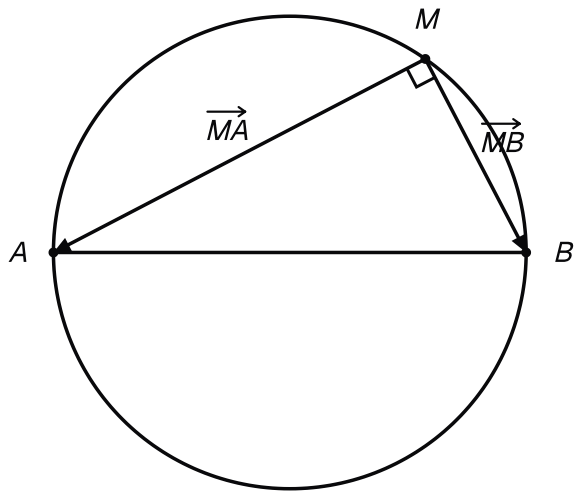
Le second membre est strictement positif. D'après la propriété qui reconnaît un cercle par son équation, (E) est le cercle de centre $\Omega(3, -4)$ et de rayon 4.

Cercle de diamètre donné

Un angle droit depuis le cercle

En clair. Trace un segment $[AB]$, puis un point M du cercle de diamètre $[AB]$, distinct de A et de B. Depuis M, on voit le segment $[AB]$ sous un angle droit : c'est un résultat du collège.

Avec le produit scalaire, cet angle droit s'écrit $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Cette condition donne directement une équation du cercle.



Un point M du cercle de diamètre [AB] voit ce segment sous un angle droit : les vecteurs MA et MB sont orthogonaux.

Devine : Un angle droit ?

Soit $A(-1, 0)$ et $B(3, 2)$. Le point $M(0, 3)$ vérifie-t-il $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$?

A. Oui : le produit vaut $-3 + 3 = 0$.

Juste.

Juste : $\overrightarrow{MA}(-1, -3)$ et $\overrightarrow{MB}(3, -1)$.

B. Non : le produit vaut -6.

Faux.

Recalcule les coordonnées : $\overrightarrow{MA}(-1, -3)$ et $\overrightarrow{MB}(3, -1)$.

C. Non : les points M, A et B sont alignés.

Faux.

$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 1 + 9 = 10 \neq 0$: ils ne le sont pas.

D. Non : le produit vaut 10.

Faux.

10 est la valeur du déterminant, pas celle du produit scalaire.

Correction
On a $\overrightarrow{MA}(-1,-3)$ et $\overrightarrow{MB}(3,-1)$. D'après l'expression analytique :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-3+3=0$$

L'angle $\widehat{AMB}$ est droit : M est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

L'équation du cercle de diamètre donné

Propriété : Cercle de diamètre donné

Soit A et B deux points distincts. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration
Idée de la preuve. Soit I le milieu de $[AB]$, de sorte que $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$. On écrit $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}$, puis on développe grâce aux propriétés du produit scalaire : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$. Ce produit est nul si et seulement si $MI=IA=\dfrac{AB}{2}$, c'est-à-dire si et seulement si M est sur le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$. Le détail du développement est omis.

Exemple : l'équation d'un cercle de diamètre donné

Soit $A(-1,0)$ et $B(3,2)$. Pour $M(x,y)$, on a $\overrightarrow{MA}(-1-x,-y)$ et $\overrightarrow{MB}(3-x,2-y)$.

D'après le cercle de diamètre donné et l'expression analytique, M est sur ce cercle si et seulement si :

$$\begin{aligned}&(-1-x)(3-x)\\&\quad+(-y)(2-y)=0\end{aligned}$$

En développant : $x^2+y^2-2x-2y-3=0$, soit $(x-1)^2+(y-1)^2=5$.

Contrôle. Le centre $(1,1)$ est le milieu de $[AB]$, et le rayon $\sqrt{5}$ vaut $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{20}}{2}$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un autre diamètre

Soit $E(2,-3)$ et $F(-4,1)$. Écris une équation du cercle de diamètre $[EF]$, puis donne son centre et son rayon. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour $M(x,y)$, écris les coordonnées de $\overrightarrow{ME}$ et de $\overrightarrow{MF}$.
Indice 2

Développe $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, puis complète les carrés.

Indice 3

Point délicat : contrôle que le centre trouvé est le milieu de $[EF]$.

Réponse

Pour $M(x, y)$: $\overrightarrow{ME}(2 - x, -3 - y)$ et $\overrightarrow{MF}(-4 - x, 1 - y)$.

D'après le cercle de diamètre donné, M est sur le cercle si et seulement si :

$$\begin{aligned}&(2 - x)(-4 - x)\\&\quad + (-3 - y)(1 - y)\\&= 0\end{aligned}$$

En développant : $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 11 = 0$. On complète les carrés : $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$.

Contrôle. Le centre $(-1, -1)$ est bien le milieu de $[EF]$; le rayon vaut $\sqrt{13}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger avec un diamètre

En devoir, cite le résultat, puis écris le calcul :

« D'après le cercle de diamètre donné, $M(x, y)$ appartient au cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. D'après l'expression analytique, cela s'écrit $(-1 - x)(3 - x) + (-y)(2 - y) = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$. »

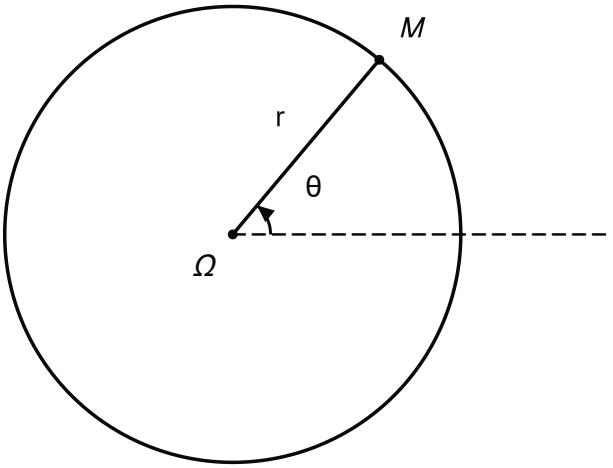
Termine par le centre et le rayon, et contrôle le milieu.

Représentation paramétrique d'un cercle

Un point qui tourne

En clair. Une nacelle de grande roue tourne à vitesse constante autour du centre Ω de la roue. Sa position dépend d'un seul nombre : l'angle θ parcouru.

Sur le cercle trigonométrique, le point d'abscisse curviligne θ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Pour un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r, on agrandit d'un facteur r, puis on décale de (a, b).



La nacelle M sur la roue de centre Ω et de rayon r : sa position est fixée par l'angle θ parcouru depuis l'horizontale.

Devine : Un point de la roue

Un point parcourt un cercle selon le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = -3 + 2\sin\theta \end{cases}$$

Où est-il pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$?

A. Au point $(3, -3)$.

Faux.

C'est le point obtenu pour $\theta = 0$.

B. Au point $(1, -5)$.

Faux.

C'est le point obtenu pour $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

C. Au point $(-1, -3)$.

Faux.

C'est le point obtenu pour $\theta = \pi$.

D. Au point $(1, -1)$.

Juste.

Juste : $x = 1 + 0$ et $y = -3 + 2$.

Correction

On a $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, donc $x = 1 + 0 = 1$ et $y = -3 + 2 = -1$.

Le point est en haut du cercle de centre $(1, -3)$ et de rayon 2.

La représentation paramétrique

Propriété : Représentation paramétrique d'un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

Ce système, où θ décrit $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** du cercle $\mathcal{C}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Si M est donné par le système, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, donc M est sur $\mathcal{C}$ d'après son équation cartésienne. Réciproquement, si $M \in \mathcal{C}$, le point P de coordonnées $\left(\dfrac{x-a}{r}, \dfrac{y-b}{r}\right)$ est sur le cercle trigonométrique ; il possède une abscisse curviligne θ, et ses coordonnées sont $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Le calcul qui place P sur le cercle trigonométrique est omis.

Méthode : d'une représentation paramétrique à une équation, et retour

1. **Isole** $\cos\theta = \dfrac{x-a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{y-b}{r}$.
2. **Élimine** θ grâce à la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
3. **Lis** le centre $\Omega(a, b)$ et le rayon r, qui doit être strictement positif.
4. **En sens inverse**, à partir du centre et du rayon, écris le système ci-dessous, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

Exemple : du paramétrage à l'équation

On considère le système suivant, où θ décrit $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = -3 + 2\sin\theta \end{cases}$$

On isole $\cos\theta = \dfrac{x-1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{y+3}{2}$. D'après la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

soit $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. D'après la représentation paramétrique d'un cercle, c'est le cercle de centre $(1, -3)$ et de rayon 2.

Dans l'autre sens, puis à toi

Exemple : de l'équation au paramétrage

Le cercle d'équation $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ a pour centre $\Omega(-2,3)$ et pour rayon 4 : on l'a vu plus haut.

D'après la représentation paramétrique d'un cercle, il est décrit par le système suivant, où θ décrit $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = -2+4\cos\theta \\ y = 3+4\sin\theta \end{cases}$$

Pour $\theta=0$, on obtient le point $(2,3)$; pour $\theta=\pi$, le point $(-6,3)$. Ces deux points sont diamétralement opposés.

À toi : Dans les deux sens

Un cercle a pour représentation paramétrique le système suivant, avec $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = -1+3\cos\theta \\ y = 2+3\sin\theta \end{cases}$$

Donne son équation cartésienne développée, puis le point obtenu pour $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Isole $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis utilise $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

Indice 2

Tu obtiens une équation de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=k$: lis a, b et k sur les égalités de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, puis développe.

Indice 3

Point délicat : $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; garde les valeurs exactes.

Réponse

Équation. On isole $\cos\theta=\dfrac{x+1}{3}$ et $\sin\theta=\dfrac{y-2}{3}$. D'après la relation $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

soit $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Point. Pour $\theta=\dfrac{\pi}{3}$: $x=-1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ et $y=2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Contrôle.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{27}{4}=9$$

Remarque : Plusieurs paramétrages

Un même cercle a plusieurs représentations paramétriques. Le système suivant, avec $\theta \in \mathbb{R}$, décrit aussi le cercle de centre $(1,-3)$ et de rayon 2 :

$$\begin{cases} x = 1+2\cos\theta \\ y = -3-2\sin\theta \end{cases}$$

Le point le parcourt simplement dans l'autre sens. Pour reconnaître le cercle, élimine θ.

Position relative d'une droite et d'un cercle

Comparer une distance et un rayon

En clair. Une droite et un cercle peuvent se couper en deux points, se toucher en un seul, ou s'éviter.

Tout se joue sur une comparaison : la distance d du centre à la droite, face au rayon r. Si la droite passe loin du centre, elle manque le cercle. Si elle passe près, elle le traverse.

Devine : Loin ou près ?

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $O(0,0)$ et pour rayon 5. La droite (D) d'équation $y=7$ coupe-t-elle $\mathcal{C}$?

A. Oui, elle le coupe en deux points.

Faux.
Elle passe à la distance 7 du centre, au-delà du rayon.

B. Oui, elle le touche en un point.

Faux.
Il faudrait une distance au centre égale à 5.

C. Non : elle passe à la distance 7 du centre.

Juste.
Juste : $7>5$.

D. On ne peut pas conclure sans calculer les points.

Faux.
Comparer la distance au centre et le rayon suffit.

Correction
Les points de (D) ont tous pour ordonnée 7. Le projeté orthogonal de O sur (D) est $H(0,7)$, et $OH=7$.

> Comme $7 > 5$, chaque point de (D) est à une distance de O au moins égale à 7 : aucun n'est sur le cercle.

Trois cas

Propriété : Position relative d'une droite et d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, (D) une droite, H le projeté orthogonal de Ω sur (D) et $d = d(\Omega, (D))$.

- Si $d > r$, la droite (D) et le cercle $\mathcal{C}$ n'ont aucun point commun.
- Si $d = r$, ils ont un seul point commun, le point H : on dit que (D) est **tangente** à $\mathcal{C}$ en H.
- Si $d < r$, ils ont exactement deux points communs.

Démonstration

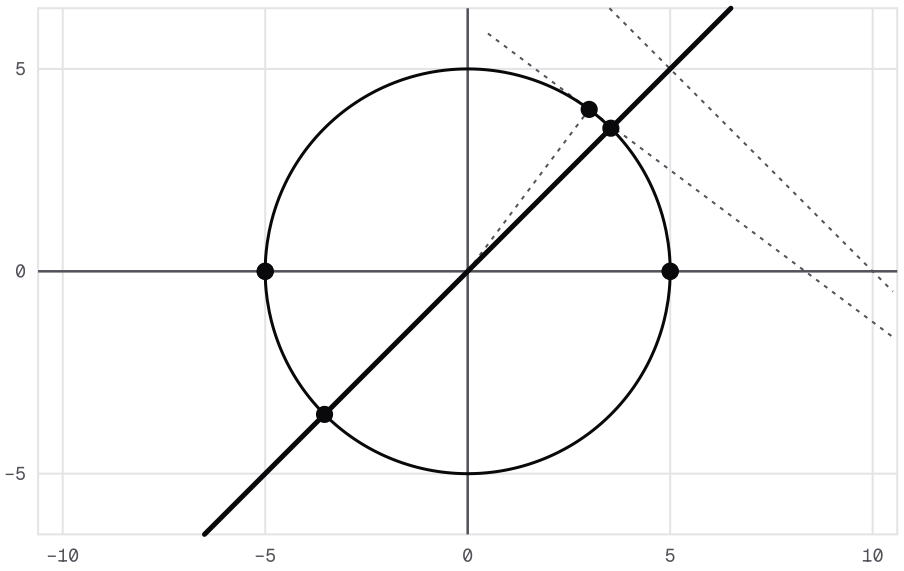
Idée de la preuve. On a $\Omega H = d$. Pour tout point M de (D) distinct de H, le triangle $\Omega H M$ est rectangle en H, et le théorème de Pythagore donne $\Omega M^2 = d^2 + HM^2$; l'égalité reste vraie pour $M = H$. Ainsi $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $HM^2 = r^2 - d^2$. Si $d > r$, c'est impossible ; si $d = r$, seul $M = H$ convient ; si $d < r$, conviennent exactement les deux points de (D) situés à la distance $\sqrt{r^2 - d^2}$ de H. Le cas $d = 0$, où $H = \Omega$, se traite de la même façon.

Exemple : un cercle et trois droites

Soit $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 25$, de centre $O(0, 0)$ et de rayon 5. D'après la distance d'un point à une droite :

- (D_1) : $x - y = 0$ passe par O, donc $d = 0 < 5$: deux points communs ;
- (D_2) : $3x + 4y - 25 = 0$ donne $d = \dfrac{|-25|}{\sqrt{9 + 16}} = 5 = r$: la droite est tangente ;
- (D_3) : $x + y - 10 = 0$ donne $d = \dfrac{|-10|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} > 5$: aucun point commun.

D'après la position relative d'une droite et d'un cercle, ces comparaisons suffisent.



Le cercle x² + y² = 25 et trois droites : (D_1) sécante, (D_2) tangente en T(3, 4), (D_3) extérieure.

Calculer les points communs

Méthode : étudier la position d'une droite et d'un cercle

1. **Lis** le centre Ω et le rayon r du cercle.
2. **Calcule** $d = d(\Omega, (D))$ avec la distance d'un point à une droite.
3. **Compare** d et r : aucun, un ou deux points communs.
4. **Pour trouver** les points communs, exprime une inconnue à l'aide de l'autre grâce à l'équation de la droite. Reporte dans l'équation du cercle, puis résous l'équation du second degré obtenue avec son discriminant Δ : $\Delta > 0$ donne deux points, $\Delta = 0$ un seul, $\Delta < 0$ aucun.

Exemple : calculer les deux points communs

Cherchons les points communs à $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 25$ et $(D_1) : x - y = 0$.

L'équation de la droite donne $y = x$. On reporte : $x^2 + x^2 = 25$, soit $x^2 = \dfrac{25}{2}$. Donc $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Les points communs sont $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

On trouve bien deux points, comme l'annonçait $d < r$.

Vérifie : Ce que dit le discriminant

On reporte $y = \dfrac{25 - 3x}{4}$ dans $x^2 + y^2 = 25$. On obtient $25x^2 - 150x + 225 = 0$. Que conclure pour la droite (D_2) et le cercle ?

A. Ils ont deux points communs.

Faux.

Le discriminant est nul : l'équation n'a qu'une solution.

B. Ils n'ont aucun point commun.

Faux.

Le discriminant n'est pas négatif : il est nul.

C. Un seul point commun, d'abscisse -3.

Faux.

L'équation s'écrit $25(x-3)^2 = 0$: la solution est $x = 3$, et non -3.

D. Un seul point commun, $T(3, 4)$.

Juste.

Juste : $\Delta = 0$ et $x = 3$.

Correction

Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= 150^2 - 4 \times 25 \times 225 \\ &= 22\,500 - 22\,500 = 0\end{aligned}$$

L'équation a une seule solution, $x = \dfrac{150}{50} = 3$, et alors $y = \dfrac{25 - 9}{4} = 4$.

La droite (D_2) touche le cercle au seul point $T(3, 4)$: elle lui est tangente, comme l'annonçait $d = r$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Deux points à trouver

Soit $\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ et $(D) : x - y + 8 = 0$. Compare $d(\Omega, (D))$ et le rayon, puis calcule les points communs. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le centre est $\Omega(-2, 1)$ et le rayon vaut 5 ; applique la distance d'un point à une droite.

Indice 2

Reporte $y = x + 8$ dans l'équation du cercle.

Indice 3

Point délicat : simplifie l'équation du second degré obtenue avant de calculer son discriminant.

Réponse

Comparaison. Le centre est $\Omega(-2,1)$ et le rayon $r=5$. D'après la distance d'un point à une droite :

$$d=\frac{|-2-1+8|}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Or $\frac{5\sqrt{2}}{2}<5$, donc $d<r$: il y a deux points communs.

Points communs. On reporte $y=x+8$ dans l'équation du cercle :

$$(x+2)^2+(x+7)^2=25$$

soit $2x^2+18x+28=0$, ou encore $x^2+9x+14=0$. Ici $\Delta=81-56=25$, donc $x=-2$ ou $x=-7$.

Conclusion. Les points communs sont $(-2,6)$ et $(-7,1)$.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une position relative**

En devoir, la conclusion compare toujours d et r. Écris :

« Le cercle a pour centre $O(0,0)$ et pour rayon $r=5$. D'après la distance d'un point à une droite, $d(O,(D_3))=\frac{|-10|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$. Or $5\sqrt{2}>5$, donc $d>r$: la droite (D_3) et le cercle n'ont aucun point commun. »

Tangente à un cercle en un point

Toucher sans traverser

En clair. Pose une règle contre une roue : elle la touche en un seul point. En ce point, la règle est perpendiculaire au rayon.

La tangente en A est donc la droite qui passe par A et qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$. Son équation s'écrit avec un produit scalaire nul.

Devine : Perpendiculaire à quoi ?

Le point A est sur le cercle de centre Ω. La tangente au cercle en A est perpendiculaire à quelle droite ?

A. À l'axe des abscisses.
Faux.
La tangente dépend du point A ; elle n'est pas toujours verticale.

B. À la droite (ΩA).
Juste.
Juste : la tangente est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$.

C. À tous les diamètres du cercle.

Faux.

Une droite ne peut pas être perpendiculaire à deux droites sécantes.

D. À aucune droite particulière.

Faux.

Elle est perpendiculaire au rayon qui aboutit en A.

Correction

La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$, donc à la droite (ΩA). Le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ est ainsi normal à la tangente.

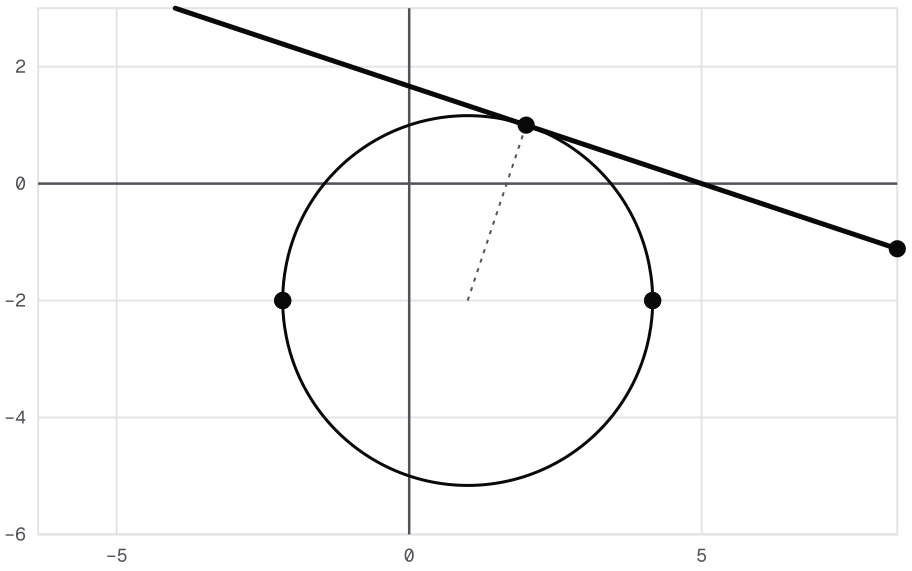
L'équation de la tangente

Propriété : Tangente à un cercle en un point

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, et A un point de $\mathcal{C}$. La **tangente** à $\mathcal{C}$ en A est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$: c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$.

Démonstration

Idée de la preuve. La droite (T) passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$ est perpendiculaire en A au rayon $[\Omega A]$. Le point A est donc le projeté orthogonal de Ω sur (T), et $d(\Omega, (T)) = \Omega A = r$. D'après la position relative d'une droite et d'un cercle, (T) est tangente à $\mathcal{C}$ en A. Toute autre droite passant par A est à une distance de Ω strictement inférieure à r, et coupe $\mathcal{C}$ en deux points : ce point n'est pas détaillé.



La tangente (T) en A(2, 1) au cercle de centre Ω(1, −2) et de rayon √10, formé de deux demi-cercles.

Exemple : une tangente en un point

Soit $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$, de centre $\Omega(1, -2)$, et $A(2, 1)$.

Point du cercle. A est sur $\mathcal{C}$, car $1 + 9 = 10$.

Équation. On a $\overrightarrow{A\Omega}(-1, -3)$. D'après la tangente à un cercle en un point, $M(x, y)$ est sur la tangente (T) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$, soit :

$$-(x-2) - 3(y-1) = 0$$

Donc $(T) : x + 3y - 5 = 0$.

Contrôle.

$$\begin{aligned} d(\Omega, (T)) &= \frac{|1 - 6 - 5|}{\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{10} = r \end{aligned}$$

Méthode, à toi, coin devoir

Méthode : écrire la tangente en un point d'un cercle

1. **Vérifie** que le point A est sur le cercle.
2. **Calcule** les coordonnées de $\overrightarrow{A\Omega}$: c'est un vecteur normal à la tangente.
3. **Écris** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ avec $M(x, y)$, puis développe.

4. **Contrôle** : la distance du centre à la tangente est égale au rayon.

À toi : Une tangente à écrire

Soit $\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$ et $B(1,5)$. Vérifie que B est sur $\mathcal{C}$, puis écris une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en B. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Remplace les coordonnées de B dans l'équation du cercle.
Indice 2
Le centre est $\Omega(-2,1)$; calcule $\overrightarrow{B\Omega}$.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{B\Omega}$ va de B vers le centre ; écris $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{B\Omega} = 0$ avec $M(x,y)$, puis contrôle par la distance de Ω à la tangente.

Réponse
Point du cercle. $(1+2)^2 + (5-1)^2 = 9 + 16 = 25$: B est sur $\mathcal{C}$.

Équation. Le centre est $\Omega(-2,1)$, donc $\overrightarrow{B\Omega}(-3,-4)$. D'après la tangente à un cercle en un point :

$$\begin{aligned} &-3(x-1) - 4(y-5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

soit $3x + 4y - 23 = 0$.

Contrôle. $d(\Omega,(T)) = \dfrac{|-6+4-23|}{5} = 5$, égale au rayon.

Remarque **: Coin devoir : rédiger une tangente**

En devoir, justifie d'abord que le point est sur le cercle. Écris :

« $(2-1)^2 + (1+2)^2 = 10$, donc $A \in \mathcal{C}$. D'après la tangente à un cercle en un point, $M(x,y) \in (T)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$. Avec $\overrightarrow{A\Omega}(-1,-3)$, on obtient $(T) : x + 3y - 5 = 0$. »

Termine par le contrôle $d(\Omega,(T)) = r$.

Régionnement du plan, inéquations à deux inconnues

Les deux côtés d'une frontière

En clair. Une droite coupe le plan en deux côtés. D'un côté, l'expression $ax + by + c$ est positive ; de l'autre, elle est négative ; sur la droite, elle est nulle.

Un cercle sépare de même son intérieur de son extérieur. Pour savoir quel côté convient, il suffit de tester un point.

Devine : De quel côté ?

Les points $O(0,0)$ et $P(2,2)$ sont-ils du même côté de la droite (D) : $x+y-2=0$?

A. Non : $x+y-2$ vaut -2 en O et 2 en P.

Juste.

Juste : les signes sont contraires.

B. Oui : aucun des deux n'est sur (D).

Faux.

Être hors de (D) ne dit pas de quel côté on se trouve.

C. On ne peut pas savoir : P est sur (D).

Faux.

En P, $2+2-2=2\neq 0$: P n'est pas sur (D).

D. Oui : leurs coordonnées sont positives.

Faux.

Seul compte le signe de $x+y-2$.

Correction

En O : $0+0-2=-2<0$. En P : $2+2-2=2>0$. Les valeurs sont de signes contraires : O et P sont de part et d'autre de (D).

Le régionnement et la méthode

Propriété : Régionnement du plan par une droite ou un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- Soit (D) la droite d'équation $ax+by+c=0$, avec $(a,b)\neq(0,0)$. Elle partage le plan en deux demi-plans ouverts : l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by+c>0$, et l'ensemble des points tels que $ax+by+c<0$. Deux points hors de (D) sont du même côté de (D) si et seulement si $ax+by+c$ prend en ces points des valeurs de même signe.
- Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $r>0$. L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ est l'**intérieur** de $\mathcal{C}$; celui des points tels que $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ est son **extérieur**.

Démonstration

Idée de la preuve. Pour la droite, soit A un point de (D) et $\vec{n}(a,b)$. Pour tout point $M(x,y)$, l'expression analytique donne $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = ax+by+c$, puisque $ax_A+by_A=-c$. Ce produit scalaire est positif quand l'angle géométrique de $\overrightarrow{AM}$ et de $\vec{n}$ est aigu, négatif quand il est obtus : son signe dit de quel côté de (D) se trouve M. Le fait qu'un côté de (D) corresponde à un signe constant n'est pas détaillé. Pour le cercle, $(x-a)^2+(y-b)^2=\Omega M^2$, que l'on compare à r^2.

Méthode : représenter les solutions d'un système d'inéquations

1. **Trace** chaque frontière : la droite d'équation $ax+by+c=0$, ou le cercle.
2. **Choisis** un point test situé sur aucune frontière, par exemple l'origine $O(0,0)$.
3. **Calcule** chaque expression en ce point : son signe dit quel côté convient.
4. **Délimite** la région où toutes les inégalités sont vraies : une inégalité large garde la frontière, une inégalité stricte l'exclut.

Exemple : un demi-plan

Résolvons $x+y-2\leq 0$. La frontière est la droite (D) : $x+y-2=0$, qui passe par $(2,0)$ et $(0,2)$.

Point test. En $O(0,0)$: $0+0-2=-2\leq 0$, l'inégalité est vraie.

Conclusion. D'après le régionnement du plan, les solutions forment le demi-plan de frontière (D) qui contient O. L'inégalité est large : la droite (D) en fait partie.

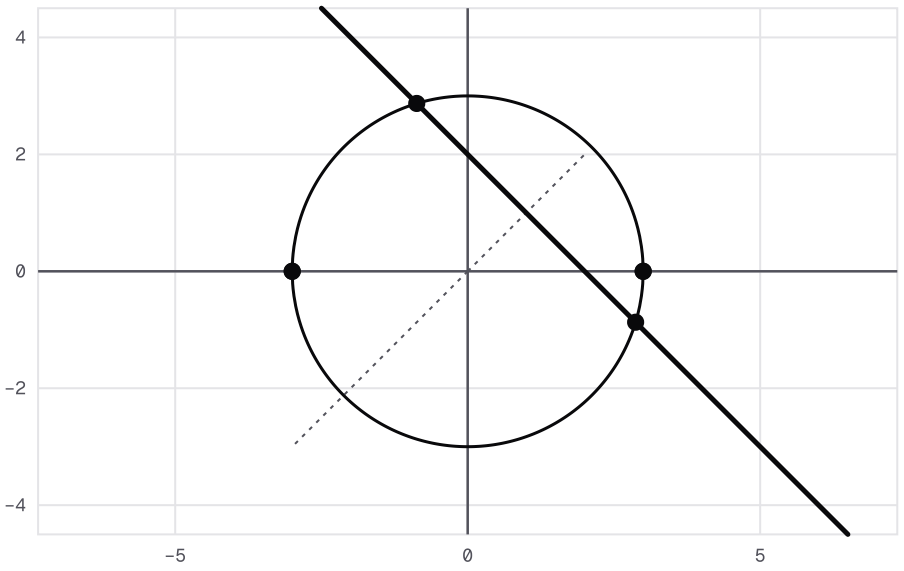
Un disque, puis un système

Exemple : l'intérieur d'un cercle

Résolvons $x^2+y^2<9$. La frontière est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O(0,0)$ et de rayon 3.

D'après le régionnement du plan, les solutions sont les points intérieurs à $\mathcal{C}$: ceux dont la distance à O est strictement inférieure à 3. L'inégalité est stricte : le cercle n'en fait pas partie.

Par exemple, $Q(-3,-3)$ ne convient pas, car $9+9=18>9$.



Les frontières du système x + y − 2 ≤ 0 et x² + y² < 9, avec les points tests O, P et Q.

Exemple : un système

Résolvons le système formé de $x + y - 2 \leq 0$ et de $x^2 + y^2 < 9$ (figure ci-dessus). On teste trois points, d'après le régionnement du plan :

- en $O(0, 0)$: $-2 \leq 0$ et $0 < 9$, les deux inégalités sont vraies ;
- en $P(2, 2)$: $2 > 0$, la première est fausse ;
- en $Q(-3, -3)$: $18 > 9$, la seconde est fausse.

Les solutions sont les points intérieurs au cercle, du même côté de (D) que O. La partie de (D) située dans le disque convient ; le cercle est exclu.

Un piège, une question, puis à toi

Attention : frontière incluse ou exclue

✗ « Pour $x - y + 2 > 0$, je teste le point $(-2, 0)$: $-2 - 0 + 2 = 0$, donc aucune solution de ce côté. »

✓ Le point $(-2, 0)$ est **sur** la droite d'équation $x - y + 2 = 0$: il ne renseigne sur aucun côté. Choisis un point test hors de toute frontière, comme O, qui donne $2 > 0$.

L'inégalité stricte $>$ exclut la droite ; l'inégalité large $\geq$ la garde.

Vérifie : Sur la frontière

Le point $(1, 1)$ est-il solution du système formé de $x + y - 2 \leq 0$ et de $x^2 + y^2 < 9$?

A. Non : il est sur la droite (D).

Faux.

L'inégalité est large : les points de (D) conviennent.

B. Oui : il vérifie les deux inégalités.

Juste.

Juste : $0 \leq 0$ et $2 < 9$.

C. Non : il est hors du cercle.

Faux.

$1 + 1 = 2 < 9$: il est à l'intérieur.

D. On ne peut pas conclure sans figure.

Faux.

Le calcul des deux expressions suffit.

Correction

En $(1, 1)$: $1 + 1 - 2 = 0 \leq 0$ est vrai, car l'inégalité est large. Puis $1 + 1 = 2 < 9$ est vrai.

Le point est solution : il est sur la frontière (D), qui fait partie de l'ensemble.

À toi : Un autre système

On considère le système formé de $x - 2y + 2 > 0$ et de $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$. Les points $O(0, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(3, 0)$ sont-ils solutions ? Décris l'ensemble des solutions. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les frontières sont la droite d'équation $x - 2y + 2 = 0$ et le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 2.

Indice 2

Calcule les deux expressions en chacun des trois points.

Indice 3

Point délicat : B est sur la droite et C sur le cercle ; regarde chaque fois si l'inégalité est large ou stricte.

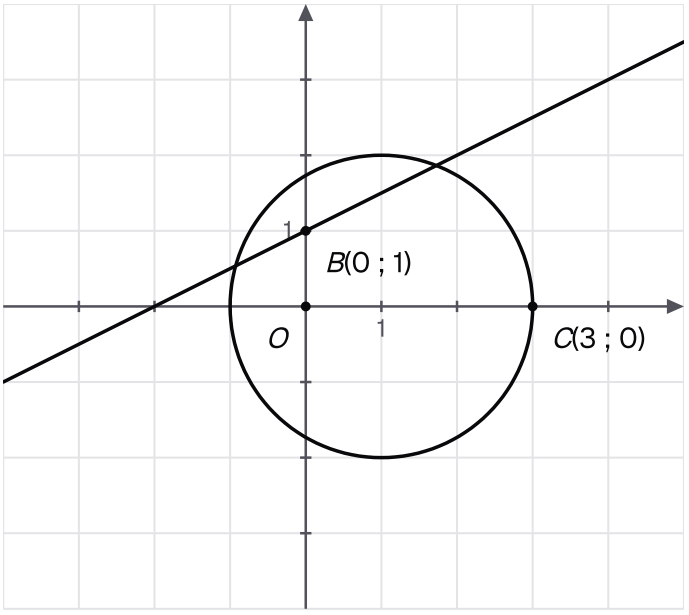
Réponse

En O. $2 > 0$ et $1 \leq 4$: O est solution.

En B. $0 - 2 + 2 = 0$, et $0 > 0$ est faux : B, situé sur la droite, n'est pas solution.

En C. $3 + 2 = 5 > 0$ et $4 \leq 4$: C, situé sur le cercle, est solution.

Conclusion. D'après le régionnement du plan, les solutions sont les points du disque de centre $(1, 0)$ et de rayon 2, cercle compris, situés du côté de O. La droite d'équation $x - 2y + 2 = 0$ est exclue.



Les données de l'essai : la droite x - 2y + 2 = 0, le cercle de centre (1, 0) et de rayon 2, et les trois points à tester.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Angle droit, longueur** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, en repère orthonormé.
- **Mesure d'un angle orienté** : $\cos\theta$ vient du produit scalaire, $\sin\theta$ du déterminant.
- **Droite de vecteur normal** $\vec{n}(a, b)$: $ax + by + c = 0$, puis c par un point.
- **Perpendiculaires, parallèles** : $aa' + bb' = 0$, ou $ab' - a'b = 0$.
- **Distance d'un point à une droite** : $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- **Cercle** : compléter les carrés et vérifier le signe du second membre ; diamètre $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
- **Paramétrage** : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour éliminer θ.
- **Droite et cercle** : comparer d et r, puis le second degré pour les points communs.
- **Tangente en** A : le vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.
- **Inéquations** : les frontières, puis un point test hors des frontières.

Le mot du prof. Avant tout calcul, vérifie que le repère est orthonormé : toutes les formules du chapitre en dépendent.

Fais une figure à main levée ; elle annonce le résultat et repère les erreurs de signe. En physique, tu retrouveras le produit scalaire dans le travail d'une force.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Analytique du produit scalaire et applications » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)