BURHAN

Résumé : Suites numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/resume

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Qu'est-ce qu'une suite ?

> **À retenir : Une liste de nombres numérotés**
>
> Prends un exemple fictif : une boutique note son nombre de clients au fil des mois. Le mois 0, le mois 1, le mois 2… chaque mois reçoit un nombre.
>
> Une suite, c'est exactement cela : une liste de nombres rangés par un numéro entier, le rang.

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** est une fonction qui, à chaque entier naturel n tel que $n \geq n_0$, associe un nombre réel noté u_n.

- La suite se note $(u_n)_{n \geq n_0}$, ou simplement (u_n) lorsque l'indice de départ est clair.
- Le réel u_n est le **terme de rang** n (ou **terme général**) de la suite ; u_{n_0} est son **premier terme**.

Définition : Suite définie explicitement, suite définie par récurrence

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **définie explicitement** lorsque son terme général est donné directement en fonction de n : $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction définie au moins sur les entiers $n \geq n_0$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **définie par récurrence** (suite **récurrente**) lorsque son premier terme u_{n_0} est donné et qu'une relation permet de calculer chaque terme à partir du précédent : $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$, où g est une fonction définie en chacun des termes u_n.

Méthode : calculer des termes

1. **Regarde** comment la suite est donnée : par une formule en n, ou par un premier terme et une relation entre deux termes voisins.
2. **Avec une formule**, remplace n par le rang demandé : le calcul est direct.
3. **Avec une relation de récurrence**, avance terme par terme depuis le premier : aucun rang ne peut être sauté.

4. **Pour beaucoup de termes**, programme la relation sur ta calculatrice ou dans une colonne de tableur.

Exemple

Formule explicite. Pour tout entier naturel n, soit $u_n = 5n - 2$. On obtient directement $u_0 = -2$ et $u_6 = 5 \times 6 - 2 = 28$.

Relation de récurrence. Soit $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n - 2$. On avance pas à pas : $v_1 = 4$, $v_2 = 10$, $v_3 = 28$.

Au tableur. Écris 2 en B2, puis la formule « =3*B2-2 » en B3, et recopie-la vers le bas.

Attention : Le terme suivant n'est pas le terme plus un

Pour tout entier naturel n, soit $u_n = 4n$. Le terme suivant est $u_{n+1} = 4(n+1) = 4n + 4$.

Ce n'est pas $u_n + 1 = 4n + 1$: remplace toujours n par $n + 1$ dans toute la formule.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$; le réel M est un **majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$; le réel m est un **minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Méthode : majorer, minorer, borner

1. **Choisis** le nombre à tester : l'énoncé le donne en général, sinon calcule quelques termes.
2. **Suite donnée par une formule** : écris $u_n - M$ sous une seule fraction et étudie son signe.
3. **Suite récurrente** : rédige une récurrence avec ses trois titres, initialisation, hérédité, conclusion.
4. **Termine** par une phrase qui nomme le majorant ou le minorant et le rang de départ.

Exemple

Par le signe. Pour tout entier naturel n, soit $u_n = \dfrac{6n}{n+2}$. On calcule

$$\begin{aligned} u_n - 6 &= \frac{6n - 6n - 12}{n+2} \\ &= \frac{-12}{n+2}. \end{aligned}$$

Ce nombre est négatif, donc $u_n \leq 6$. De plus $u_n \geq 0$, car $6n \geq 0$ et $n + 2 > 0$: la suite est bornée.

Par récurrence. Soit $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 2$. Montrons que $w_n \leq 3$ pour tout entier naturel n.

- **Initialisation** : $w_0 = 1 \leq 3$.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel tel que $w_n \leq 3$. Alors $\frac{1}{3}w_n + 2 \leq 1 + 2$, soit $w_{n+1} \leq 3$.
- **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $w_n \leq 3$.

Sens de variation d'une suite

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$; **strictement croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$; **strictement décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Autrement dit, (u_n) est croissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$, et décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Propriété : Monotonie d'une suite à termes strictement positifs

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**.

- Si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante.
- Si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

Avec des inégalités strictes, la suite est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Méthode : trouver le sens de variation

1. **Calcule** $u_{n+1} - u_n$ et réduis le résultat.
2. **Étudie son signe** pour tous les rangs concernés : positif, la suite croît ; négatif, elle décroît.

3. **Termes tous strictement positifs**, avec des puissances ou des produits : compare plutôt $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
4. **Vérifie** ta conclusion sur deux ou trois termes calculés.

Exemple

Par la différence. Pour tout entier naturel n, soit $u_n = 7 - \frac{2}{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

La différence reste donc strictement positive, et la suite croît strictement.

Par le quotient. Pour tout entier naturel n, soit $v_n = \frac{4^n}{n+1}$; tous les termes sont strictement positifs. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4(n+1)}{n+2}.$$

Or $4n + 4 > n + 2$ et $n + 2 > 0$, donc ce quotient dépasse 1 : la suite est strictement croissante.

Attention : Le quotient trompe si les termes sont négatifs

Pour tout entier naturel n, soit $u_n = -2^n$. Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut 2, plus grand que 1. Pourtant $u_0 = -1$, $u_1 = -2$, $u_2 = -4$: la suite décroît.

Avant d'utiliser le quotient, vérifie que tous les termes sont strictement positifs.

Suites arithmétiques

Définition : Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite. On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r.

Propriété : Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$,

$$u_n = u_p + (n - p)\, r.$$

En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 + n\, r$ pour tout entier naturel n.

Propriété : Monotonie d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique, et n, p deux entiers tels que $n \geq p \geq n_0$. La somme des termes consécutifs de u_p à u_n vaut

$$\begin{aligned} &u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n \\ &= (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}. \end{aligned}$$

Autrement dit : **nombre de termes** multiplié par la demi-somme du **premier** et du **dernier** terme. En particulier, pour tout entier naturel $n \geq 1, 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Méthode : reconnaître une suite arithmétique ou géométrique

1. **Pour une suite arithmétique**, calcule $u_{n+1} - u_n$: si tu trouves un nombre fixe r, sans n, c'est gagné.
2. **Pour une suite géométrique**, écris u_{n+1} sous la forme $q \times u_n$, avec q fixe.
3. **Donne** toujours le premier terme avec la raison.
4. **Pour prouver le contraire**, il suffit de trois termes qui se suivent sans écart constant, ou sans quotient constant.

Exemple

Énoncé. La suite (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = 40$ et de raison $r = -6$.

Terme général. Pour tout entier naturel n, $u_n = 40 - 6n$. Donc $u_{10} = 40 - 60 = -20$.

Variation. La raison est négative : la suite est strictement décroissante.

Somme. De u_0 à u_{10}, il y a 11 termes :

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} \\ &= 11 \times \frac{40 + (-20)}{2} \\ &= 110. \end{aligned}$$

Attention : Le nombre de termes : penser au plus un

Combien de termes dans $u_7 + u_8 + \cdots + u_{30}$? Ce n'est pas $30 - 7 = 23$, mais $30 - 7 + 1 = 24$.

Contrôle sur un petit cas : de u_1 à u_3, tu comptes bien 3 termes.

Suites géométriques

Définition : Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = q\, u_n.$$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite. On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q.

Propriété : Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout entier naturel n (avec la convention $q^0 = 1$).

Propriété : Monotonie d'une suite géométrique de premier terme et de raison strictement positifs

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q, avec $q > 0$ et un premier terme $u_{n_0} > 0$.

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q, et n, p deux entiers tels que $n \geq p \geq n_0$.

- Si $q \neq 1$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Autrement dit : **premier terme** multiplié par $\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$. En particulier, $1+q+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

- Si $q=1$: $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=(n-p+1)\,u_p$.

Méthode : calculer une somme de termes consécutifs

1. **Repère** le type de la suite, le premier terme de la somme et, si elle est géométrique, sa raison q.
2. **Compte** les termes : du rang p au rang n, cela fait $n-p+1$.
3. **Arithmétique** : multiplie ce nombre par la demi-somme des deux termes extrêmes.
4. **Géométrique**, avec $q\neq 1$: premier terme fois $\dfrac{1-q^k}{1-q}$, où k est le nombre de termes.

Exemple

Énoncé. La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0=5$ et de raison $q=3$.

Reconnaître. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3\,u_n$: le quotient de deux termes voisins vaut toujours 3. C'est la méthode de reconnaissance vue avec les suites arithmétiques, point 2.

Terme général. Pour tout entier naturel n, $u_n=5\times 3^n$. Donc $u_4=5\times 81=405$.

Variation. $u_0>0$ et $q>1$: la suite est strictement croissante.

Somme. De u_0 à u_4, il y a 5 termes :

$$\begin{aligned} u_0+\cdots+u_4 &= 5\times\frac{1-3^5}{1-3}\\ &= 5\times 121\\ &= 605. \end{aligned}$$

Attention : Premier terme au rang 1 : exposant n - 1

Si la suite démarre au rang 1, l'exposant n'est plus n. Avec $u_1=7$ et $q=3$, on a $u_n=7\times 3^{n-1}$ pour tout entier $n\geq 1$, donc $u_5=7\times 3^4=567$.

Écrire 7×3^5 donnerait $1\,701$, le terme d'après.

Arithmétique de raison r : terme général	Somme arithmétique du rang p au rang n
$u_n=u_p+(n-p)\,r$	$(n-p+1)\times\dfrac{u_p+u_n}{2}$

Entiers de 1 à n

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Géométrique de raison q : terme général

$$u_n=u_p\times q^{n-p}$$

Somme géométrique du rang p au rang n, raison q non égale à 1

$$u_p\times\frac{1-q^{\,n-p+1}}{1-q}$$

Capital à intérêts simples, taux décimal t

$$C_n=C_0\,(1+n\,t)$$

Capital à intérêts composés, taux décimal t

$$C_n=C_0\,(1+t)^n$$

Coefficient multiplicateur d'une hausse ou d'une baisse au taux t

$$1+t \quad \text{ou} \quad 1-t$$

Suite récurrente affine, a différent de 1, et son nombre fixe

$$u_n=\ell+(u_0-\ell)\,a^n$$

Suites et économie

Définition : Intérêts simples, intérêts composés

Un capital C_0 (en dirhams) est placé au **taux annuel** t, où t est un réel strictement positif : un taux de 4 pour cent s'écrit $t=0{,}04$. On note C_n le capital disponible au bout de n années.

- **Intérêts simples** : chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital **initial** C_0 ; il vaut $C_0\,t$ et s'ajoute au capital. Pour tout entier naturel n, $C_{n+1}=C_n+C_0\,t$.
- **Intérêts composés** : chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital **disponible** C_n ; il vaut $C_n\,t$ et s'ajoute au capital, puis produit à son tour des intérêts. Pour tout entier naturel n, $C_{n+1}=C_n+C_n\,t=(1+t)\,C_n$.

Propriété : Capital à intérêts simples, capital à intérêts composés

Avec les notations de la définition des intérêts simples et composés, pour tout entier naturel n :

- à **intérêts simples**, la suite (C_n) est arithmétique de raison $C_0\,t$, et $C_n=C_0\,(1+n\,t)$;
- à **intérêts composés**, la suite (C_n) est géométrique de raison $1+t$, et $C_n=C_0\,(1+t)^n$.

Propriété : Évolution en pourcentage et coefficient multiplicateur

Soit t un **taux** écrit en décimal, $t>0$: une évolution de 4 pour cent correspond à $t=0{,}04$.

- **Augmenter** une quantité au taux t revient à la **multiplier** par $1+t$.
- **Diminuer** une quantité au taux t (avec $t<1$) revient à la **multiplier** par $1-t$.

Le nombre $1+t$ (ou $1-t$) est le **coefficient multiplicateur** de l'évolution : une hausse de 4 pour cent a pour coefficient $1{,}04$, une baisse de 4 pour cent a pour coefficient $0{,}96$. Si une quantité u_n évolue chaque année au **même** taux, la suite (u_n) est géométrique de raison ce coefficient : en cas de hausse annuelle au taux t, $u_n = u_0\,(1+t)^n$.

Méthode : traduire une situation économique

1. **Pose** la suite : u_n désigne la quantité étudiée après n périodes, et u_0 sa valeur de départ.
2. **Ajout fixe** à chaque période : la suite est arithmétique. **Multiplication** par un même nombre : elle est géométrique.
3. **Change** chaque pourcentage en coefficient : écris le taux en décimal (6 pour cent donne $t = 0{,}06$) ; une hausse donne $1+t$, une baisse donne $1-t$.
4. **Réponds** à la question avec l'unité, en arrondissant raisonnablement.

Exemple

Énoncé (données inventées). On place $8\,000$ dirhams (DH) pendant 6 ans au taux annuel $t = 0{,}05$.

Intérêts simples.

$$\begin{aligned} C_6 &= 8\,000 \times (1 + 6 \times 0{,}05) \\ &= 8\,000 \times 1{,}3 \\ &= 10\,400. \end{aligned}$$

Le capital atteint $10\,400$ DH.

Intérêts composés. $C_6 = 8\,000 \times 1{,}05^6 \approx 10\,720{,}77$ DH.

Bilan. Les intérêts composés rapportent environ $320{,}77$ DH de plus : les intérêts eux-mêmes produisent des intérêts.

Attention : Les pourcentages successifs se multiplient

Un loyer monte de 10 pour cent, puis baisse de 10 pour cent. Il ne revient pas au départ : $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$. Le loyer final a baissé de 1 pour cent.

Multiplie les coefficients, n'additionne jamais les pourcentages.

Suites récurrentes et suite auxiliaire

Propriété : Suite récurrente affine et suite auxiliaire géométrique

Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$, et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

On note ℓ le réel tel que $\ell = a\,\ell + b$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est **géométrique de raison** a, et, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n.$$

Méthode : utiliser une suite auxiliaire donnée

1. **Pars** de v_{n+1} écrit avec la définition de (v_n), puis remplace u_{n+1} par son expression.
2. **Réduis** jusqu'à reconnaître $v_{n+1} = q\,v_n$ ou $v_{n+1} = v_n + r$, sans n dans q ni dans r.
3. **Écris** v_n en fonction de n avec la formule du terme général.
4. **Reviens** à u_n : isole u_n dans la définition de v_n.

Exemple

Énoncé. $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 5$. On pose $v_n = u_n - 5$.

Raison. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 2u_n - 5 - 5 \\ &= 2(u_n - 5) \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2, avec $v_0 = -4$.

Terme général. Pour tout entier naturel n, $v_n = -4 \times 2^n$, donc $u_n = 5 - 4 \times 2^n$.

Contrôle. $u_1 = 2 - 5 = -3$ et $5 - 8 = -3$; $u_2 = -6 - 5 = -11$ et $5 - 16 = -11$.

Exemple

Énoncé. $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Dénominateur. Montrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

- **Initialisation** : $u_0 = 1 > 0$.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel tel que $u_n > 0$. Alors $u_n + 1 > 0$ et $\dfrac{u_n}{u_n + 1} > 0$, soit $u_{n+1} > 0$.
- **Conclusion** : pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, donc $u_n + 1 \neq 0$ et $u_n \neq 0$.

Raison. Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + v_n.$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison 1, avec $v_0 = 1$.

Terme général. Pour tout entier naturel n, $v_n = n + 1$, donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Attention : Ni arithmétique, ni géométrique

Soit $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$: on obtient $0, 3, 9, 21$.

Les écarts $3, 6, 12$ changent : la suite n'est pas arithmétique. Les quotients 3 et $\dfrac{7}{3}$ changent aussi : elle n'est pas géométrique.

Passe par la suite auxiliaire.

À retenir : Rédiger en devoir

Un exercice de devoir sur une suite récurrente peut s'enchaîner ainsi : calculer les premiers termes, prouver une inégalité par récurrence, étudier le sens de variation, puis utiliser la suite auxiliaire.

Chaque question donne son résultat : sers-t'en pour la suivante, même si tu n'as pas su la démontrer.

Cite toujours la propriété employée.

À retenir : Quelle méthode pour quelle question

- **Un terme demandé** : remplace n, ou applique la relation depuis le premier terme.
- **Un majorant, un minorant** : étudie le signe de $u_n - M$; si aucune formule n'existe, raisonne par récurrence.
- **Une monotonie** : le signe de $u_{n+1} - u_n$; avec des termes tous strictement positifs, le quotient comparé à 1.
- **Une nature de suite** : $u_{n+1} - u_n$ fixe, arithmétique ; $u_{n+1} = q\,u_n$, géométrique.
- **Une somme, un modèle** : $n - p + 1$ termes ; ajout fixe ou coefficient $1 + t$ fixe.
- **Une relation affine ou homographique** : vérifie la suite auxiliaire donnée, puis reviens à u_n.