BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Les adhérents d'une association sportive

Un exemple fictif : une association sportive compte $3\,000$ adhérents en 2025. Chaque année, 25 pour cent des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion, et 600 nouveaux adhérents s'inscrivent. On note a_n le nombre d'adhérents de l'année $2025+n$; ainsi $a_0 = 3\,000$. Le modèle donne des valeurs approchées : elles ne sont pas toujours entières.

1. 0,5 pts

Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 600$, puis calculer a_1 et a_2.

INDICE

Début : garder 75 pour cent des adhérents revient à multiplier leur nombre par $0{,}75$.

2. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n > 2\,400$.

INDICE

Outil : une récurrence titrée. **Début de l'hérédité :** multiplie l'inégalité $a_n > 2\,400$ par $0{,}75$, qui est positif.

3. 1 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = a_n - 2\,400$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$, puis que $a_n = 2\,400 + 600 \times 0{,}75^n$.

INDICE

Outil : écris $v_{n+1} = a_{n+1} - 2\,400$ et remplace a_{n+1} ; pour la suite, le terme général d'une suite géométrique.

4. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - a_n = -150 \times 0{,}75^n$. En déduire le sens de variation de la suite (a_n).

INDICE

Outil : utilise l'expression de a_n trouvée à la question 3 et mets $600 \times 0{,}75^n$ en facteur.

5. 0,75 pts

À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année l'association comptera au plus $2\,450$ adhérents selon ce modèle.

INDICE

Outil : la suite est décroissante ; fais un tableau de valeurs de a_n à la calculatrice, par pas de 5, puis resserre.

Exercice 2 — 4 pts

Une suite homographique et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation avec $u_0 = 3$; garde des fractions.

2. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{4x-2}{x+1} - 2 = \dfrac{2(x-2)}{x+1}$ et $\dfrac{4x-2}{x+1} - 1 = \dfrac{3(x-1)}{x+1}$.

INDICE

Outil : écris $2 = \dfrac{2(x+1)}{x+1}$, puis $1 = \dfrac{x+1}{x+1}$, et réduis chaque fois au même dénominateur.

3. — 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n > 2$.

INDICE

Début de l'hérédité : si $u_n > 2$, regarde le signe de $u_n + 1$, puis applique la première égalité de la question 2 avec $x = u_n$.

4. — 1 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Justifier que v_n est bien défini, puis montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

INDICE

Outil : écris v_{n+1} comme le quotient de $u_{n+1} - 2$ par $u_{n+1} - 1$, et remplace chacun grâce à la question 2.

5. — 0,5 pts

Exprimer v_n en fonction de n. Montrer que $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$, puis en déduire u_n en fonction de n.

INDICE

Outil : le terme général de (v_n). **Début :** de $v_n\,(u_n - 1) = u_n - 2$, regroupe les termes en u_n.

Exercice 3 — 4 pts

La production d'une usine en baisse

Des données inventées : une usine fabrique $12\,000$ pièces en 2025. On prévoit que sa production baisse de 5 pour cent par an. On note p_n la production de l'année $2025 + n$, en pièces.

1. — 1 pts

Donner le coefficient multiplicateur associé à cette baisse, calculer p_1, puis montrer que (p_n) est géométrique et que $p_n = 12\,000 \times 0{,}95^n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : écris le taux en décimal ; une baisse au taux t multiplie par $1 - t$.

2. — 0,5 pts

Donner le sens de variation de (p_n).

INDICE

Outil : regarde le signe du premier terme et compare la raison à 0 et à 1.

3. — 1 pts

Montrer que la production totale de 2025 à 2034 vaut $240\,000 \times (1 - 0{,}95^{10})$ pièces, puis en donner l'arrondi à l'unité.

INDICE

Début : écris la production totale comme une somme de termes de (p_n), puis compte ses termes.

4. — 0,75 pts

À l'aide de la calculatrice, déterminer la première année où la production sera inférieure à $9\,000$ pièces.

INDICE

Outil : la suite est décroissante ; fais un tableau de valeurs de p_n à la calculatrice.

5. — 0,75 pts

Montrer qu'en deux ans la production baisse de $9{,}75$ pour cent, et non de 10 pour cent.

INDICE

Outil : sur deux ans, les coefficients annuels se multiplient.

Exercice 4 4 pts

Deux offres de salaire

Un exemple fictif : deux entreprises proposent un poste à Leila. On note a_n et b_n le salaire annuel, en dirhams (DH), de la $(n+1)$-ième année de travail.

- Entreprise A : $a_0 = 60\,000$, et le salaire augmente de $2\,400$ DH par an.
- Entreprise B : $b_0 = 58\,000$, et chaque année le salaire augmente de 3 pour cent, puis de 600 DH supplémentaires. Ainsi, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 1{,}03\,b_n + 600$.

1. 0,75 pts

Calculer b_1 et b_2. Montrer que (a_n) est arithmétique et que $a_n = 60\,000 + 2\,400n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : pour b_1, applique la relation avec b_0 ; pour (a_n), une augmentation fixe chaque année.

2. 1 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = b_n + 20\,000$. Montrer que (w_n) est géométrique de raison $1{,}03$, puis que $b_n = 78\,000 \times 1{,}03^n - 20\,000$.

INDICE

Outil : écris $w_{n+1} = b_{n+1} + 20\,000$, remplace b_{n+1}, puis cherche à factoriser par $1{,}03$.

3. 0,75 pts

Calculer a_8, b_8, a_9 et b_9 (arrondis au centime). Que constate-t-on ?

INDICE

Outil : utilise les expressions des questions 1 et 2, et la calculatrice pour les puissances de $1{,}03$.

4. 1,5 pts

Montrer que, sur les dix premières années, l'entreprise A verse au total $708\,000$ DH, et que l'entreprise B verse $2\,600\,000 \times (1{,}03^{10} - 1) - 200\,000$ DH. Quelle entreprise verse le plus sur cette période ?

INDICE

Début : les dix premières années correspondent aux rangs 0 à 9 ; pour B, écris chaque b_k à l'aide de w_k.

Exercice 5 4 pts

Des panneaux solaires installés mois après mois

Un exemple fictif : une entreprise commence à installer des panneaux solaires dans un quartier. Pour tout entier naturel n, elle installe $d_n = 2n + 3$ panneaux le mois numéro $n + 1$. On note u_n le nombre total de panneaux installés au bout de n mois ; ainsi $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. 0,75 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3, puis montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Outil : pour u_1, prends $n = 0$ dans la relation ; pour le sens de variation, la relation donne directement $u_{n+1} - u_n$.

2. 0,5 pts

Montrer que la suite (d_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : calcule $d_{n+1} - d_n$ et vérifie que le résultat ne dépend pas de n.

3. 1,25 pts

Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$. En déduire que $u_n = n^2 + 2n$.

INDICE

Début : au bout de n mois, le total est formé des installations des mois numéros 1 à n ; compte ensuite les termes de la somme.

4. 0,75 pts

Au bout de combien de mois l'entreprise aura-t-elle installé au moins $1\,000$ panneaux ?

INDICE

Outil : la suite est croissante ; fais un tableau de valeurs de $n^2 + 2n$ à la calculatrice.

5. 0,75 pts

Calculer le nombre de panneaux installés du mois numéro 11 au mois numéro 20, puis le contrôler avec la question 3.

INDICE

Début : ces mois correspondent aux termes d_{10} à d_{19} ; compte-les.