BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Les adhérents d'une association sportive

Un exemple fictif : une association sportive compte $3\,000$ adhérents en 2025. Chaque année, 25 pour cent des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion, et 600 nouveaux adhérents s'inscrivent. On note a_n le nombre d'adhérents de l'année $2025+n$; ainsi $a_0 = 3\,000$. Le modèle donne des valeurs approchées : elles ne sont pas toujours entières.

1. 0,5 pts

Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 600$, puis calculer a_1 et a_2.

INDICE

Début : garder 75 pour cent des adhérents revient à multiplier leur nombre par $0{,}75$.

CORRIGÉ

Relation de récurrence. Soit n un entier naturel. Sur les a_n adhérents de l'année $2025+n$, 75 pour cent renouvellent leur adhésion : ils sont $0{,}75\,a_n$. Les 600 nouveaux inscrits s'y ajoutent :

$$a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 600.$$

Premiers termes. $a_1 = 0{,}75 \times 3\,000 + 600 = 2\,850$ et $a_2 = 0{,}75 \times 2\,850 + 600 = 2\,737{,}5$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 600$; $a_1 = 2\,850$ et $a_2 = 2\,737{,}5$.

2. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n > 2\,400$.

INDICE

Outil : une récurrence titrée. **Début de l'hérédité :** multiplie l'inégalité $a_n > 2\,400$ par $0{,}75$, qui est positif.

CORRIGÉ

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété « $a_n > 2\,400$ ».

Initialisation. $a_0 = 3\,000 > 2\,400$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $a_n > 2\,400$. Comme $0{,}75 > 0$, multiplier par $0{,}75$ conserve l'inégalité, puis on ajoute 600 :

$$\begin{aligned} 0{,}75\,a_n &> 1\,800 \\ 0{,}75\,a_n + 600 &> 2\,400. \end{aligned}$$

Ainsi $a_{n+1} > 2\,400$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $a_n > 2\,400$.

3. 1 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = a_n - 2\,400$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$, puis que $a_n = 2\,400 + 600 \times 0{,}75^n$.

INDICE

Outil : écris $v_{n+1} = a_{n+1} - 2\,400$ et remplace a_{n+1} ; pour la suite, le terme général d'une suite géométrique.

CORRIGÉ

Nature de (v_n). Soit n un entier naturel. On remplace a_{n+1}, puis on factorise par $0{,}75$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 2\,400 \\ &= 0{,}75\,a_n + 600 \\ &\quad - 2\,400 \\ &= 0{,}75\,a_n - 1\,800 \\ &= 0{,}75\,(a_n - 2\,400) \\ &= 0{,}75\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$, de premier terme $v_0 = 3\,000 - 2\,400 = 600$.

Expression de a_n. Pour tout entier naturel n, $v_n = 600 \times 0{,}75^n$, et $a_n = v_n + 2\,400$.

Contrôle. $2\,400 + 600 \times 0{,}75 = 2\,850 = a_1$.

Conclusion. (v_n) est géométrique de raison $0{,}75$ et, pour tout entier naturel n, $a_n = 2\,400 + 600 \times 0{,}75^n$.

4. 0,75 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - a_n = -150 \times 0{,}75^n$. En déduire le sens de variation de la suite (a_n).

INDICE

Outil : utilise l'expression de a_n trouvée à la question 3 et mets $600 \times 0{,}75^n$ en facteur.

CORRIGÉ

Différence. Soit n un entier naturel. D'après la question 3, les termes $2\,400$ s'éliminent, et $0{,}75^{n+1} = 0{,}75 \times 0{,}75^n$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 600 \times 0{,}75^{n+1} \\ &\quad - 600 \times 0{,}75^n \\ &= 600 \times 0{,}75^n \\ &\quad \times (0{,}75 - 1) \\ &= -150 \times 0{,}75^n. \end{aligned}$$

Signe. Comme $0{,}75^n > 0$, la différence est strictement négative.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - a_n = -150 \times 0{,}75^n < 0$: la suite (a_n) est strictement décroissante.

5. `0,75 pts`

À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année l'association comptera au plus $2\,450$ adhérents selon ce modèle.

INDICE

Outil : la suite est décroissante ; fais un tableau de valeurs de a_n à la calculatrice, par pas de 5, puis resserre.

CORRIGÉ

Valeurs. À la calculatrice, $a_8 \approx 2\,460{,}1 > 2\,450$ et $a_9 \approx 2\,445{,}1 \leq 2\,450$.

Rôle de la décroissance. Comme (a_n) est décroissante, $a_n \geq a_8 > 2\,450$ pour $n \leq 8$, et $a_n \leq a_9 \leq 2\,450$ pour $n \geq 9$.

Conclusion. Selon ce modèle, l'association compte au plus $2\,450$ adhérents à partir de l'année $2025 + 9$, soit 2034.

Exercice 2 — 4 pts

Une suite homographique et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. — 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation avec $u_0 = 3$; garde des fractions.

CORRIGÉ

Calcul de u_1. Avec $u_0 = 3$:

$$u_1 = \frac{12 - 2}{3 + 1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Calcul de u_2. Avec $u_1 = \dfrac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{10 - 2}{\frac{5}{2} + 1} \\ &= \frac{8}{\frac{7}{2}} = \frac{16}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $u_2 = \dfrac{16}{7}$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{4x-2}{x+1} - 2 = \dfrac{2(x-2)}{x+1}$ et $\dfrac{4x-2}{x+1} - 1 = \dfrac{3(x-1)}{x+1}$.

INDICE

Outil : écris $2 = \dfrac{2(x+1)}{x+1}$, puis $1 = \dfrac{x+1}{x+1}$, et réduis chaque fois au même dénominateur.

CORRIGÉ

Soit x un réel différent de -1, de sorte que $x+1 \neq 0$.

Première égalité. On écrit $2 = \dfrac{2(x+1)}{x+1}$:

$$\begin{aligned} &\frac{4x-2}{x+1} - 2 \\ &= \frac{4x-2-2x-2}{x+1} \\ &= \frac{2x-4}{x+1} \\ &= \frac{2(x-2)}{x+1}. \end{aligned}$$

Seconde égalité. On écrit $1 = \dfrac{x+1}{x+1}$:

$$\begin{aligned} &\frac{4x-2}{x+1} - 1 \\ &= \frac{4x-2-x-1}{x+1} \\ &= \frac{3x-3}{x+1} \\ &= \frac{3(x-1)}{x+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \neq -1$, les deux égalités demandées sont vraies.

3. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n > 2$.

INDICE

Début de l'hérédité : si $u_n > 2$, regarde le signe de $u_n + 1$, puis applique la première égalité de la question 2 avec $x = u_n$.

CORRIGÉ

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété « u_n est défini et $u_n > 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 3$ est défini et $3 > 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que u_n est défini et $u_n > 2$.

Alors $u_n + 1 > 3 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas, donc u_{n+1} est défini. La première égalité de la question 2, avec $x = u_n$, donne :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $u_{n+1} - 2 > 0$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est défini et $u_n > 2$.

4. 1 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Justifier que v_n est bien défini, puis montrer que (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

INDICE

Outil : écris v_{n+1} comme le quotient de $u_{n+1} - 2$ par $u_{n+1} - 1$, et remplace chacun grâce à la question 2.

CORRIGÉ

Définition de v_n. Soit n un entier naturel. D'après la question 3, $u_n > 2$, donc $u_n - 1 > 0$: v_n est bien défini.

Relation entre v_{n+1} et v_n. On a aussi $u_{n+1} - 1 > 0$. Les deux égalités de la question 2, avec $x = u_n$, donnent $u_{n+1} - 2$ et $u_{n+1} - 1$; diviser par le second revient à multiplier par son inverse :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1} \\ &\quad \times \frac{u_n + 1}{3(u_n - 1)} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \\ &= \frac{2}{3}\, v_n. \end{aligned}$$

Premier terme. $v_0 = \dfrac{3 - 2}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. v_n est défini pour tout entier naturel n, et (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, de premier terme $\dfrac{1}{2}$.

5. `0,5 pts`

Exprimer v_n en fonction de n. Montrer que $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$, puis en déduire u_n en fonction de n.

INDICE

Outil : le terme général de (v_n). **Début :** de $v_n\,(u_n - 1) = u_n - 2$, regroupe les termes en u_n.

CORRIGÉ

Terme général de (v_n). Pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Expression de u_n à l'aide de v_n. Soit n un entier naturel. On multiplie $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ par $u_n - 1$, qui n'est pas nul, et on regroupe les termes en u_n :

$$\begin{aligned} v_n\,u_n - v_n &= u_n - 2 \\ u_n\,(1 - v_n) &= 2 - v_n. \end{aligned}$$

Pour diviser par $1 - v_n$, on vérifie qu'il n'est pas nul :

$$\begin{aligned} 1 - v_n &= \frac{(u_n - 1) - (u_n - 2)}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{u_n - 1}. \end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas nul, donc $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$.

Expression de u_n en fonction de n. On remplace v_n :

$$u_n = \frac{2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Contrôle. Pour $n = 1$, $v_1 = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{2 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{5}{2} = u_1$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $u_n = \dfrac{2 - v_n}{1 - v_n}$, et u_n s'écrit comme ci-dessus en fonction de n.

Exercice 3 — 4 pts

La production d'une usine en baisse

Des données inventées : une usine fabrique $12\,000$ pièces en 2025. On prévoit que sa production baisse de 5 pour cent par an. On note p_n la production de l'année $2025+n$, en pièces.

1. — 1 pts

Donner le coefficient multiplicateur associé à cette baisse, calculer p_1, puis montrer que (p_n) est géométrique et que $p_n = 12\,000 \times 0{,}95^n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : écris le taux en décimal ; une baisse au taux t multiplie par $1-t$.

CORRIGÉ

Coefficient multiplicateur. Le taux vaut $t = 0{,}05$: le coefficient est $1-t = 0{,}95$.

Calcul de p_1. $p_1 = 12\,000 \times 0{,}95 = 11\,400$.

Nature et terme général. Chaque année, la production est multipliée par $0{,}95$: pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}95\,p_n$. La suite (p_n) est géométrique de raison $0{,}95$ et de premier terme $p_0 = 12\,000$, donc, pour tout entier naturel n :

$$p_n = 12\,000 \times 0{,}95^n.$$

Conclusion. Le coefficient multiplicateur est $0{,}95$, $p_1 = 11\,400$, et (p_n) est géométrique avec $p_n = 12\,000 \times 0{,}95^n$ pour tout entier naturel n.

2. — 0,5 pts

Donner le sens de variation de (p_n).

INDICE

Outil : regarde le signe du premier terme et compare la raison à 0 et à 1.

CORRIGÉ

Le premier terme vérifie $p_0 = 12\,000 > 0$ et la raison $0 < 0{,}95 < 1$. Une suite géométrique ainsi faite est strictement décroissante.

Conclusion. La suite (p_n) est strictement décroissante.

3. 1 pts

Montrer que la production totale de 2025 à 2034 vaut $240\,000 \times (1 - 0{,}95^{10})$ pièces, puis en donner l'arrondi à l'unité.

INDICE

Début : écris la production totale comme une somme de termes de (p_n), puis compte ses termes.

CORRIGÉ

Somme à calculer. De 2025 à 2034, la production totale est $p_0 + p_1 + \cdots + p_9$, qui compte $9 - 0 + 1 = 10$ termes.

Calcul. La raison $0{,}95$ est différente de 1, et $\dfrac{12\,000}{1 - 0{,}95} = \dfrac{12\,000}{0{,}05} = 240\,000$:

$$\begin{aligned} & p_0 + \cdots + p_9 \\ &= 12\,000 \times \frac{1 - 0{,}95^{10}}{1 - 0{,}95} \\ &= 240\,000 \times (1 - 0{,}95^{10}) \\ &\approx 96\,303. \end{aligned}$$

Conclusion. De 2025 à 2034, la production totale vaut $240\,000 \times (1 - 0{,}95^{10})$ pièces, soit environ $96\,303$ pièces à l'unité près.

4. 0,75 pts

À l'aide de la calculatrice, déterminer la première année où la production sera inférieure à $9\,000$ pièces.

INDICE

Outil : la suite est décroissante ; fais un tableau de valeurs de p_n à la calculatrice.

CORRIGÉ

Valeurs. À la calculatrice, $p_5 \approx 9\,285{,}4$ et $p_6 \approx 8\,821{,}1$.

Rôle de la décroissance. La suite étant décroissante, $p_n \geq p_5 > 9\,000$ pour $n \leq 5$, et $p_n \leq p_6 < 9\,000$ pour $n \geq 6$.

Conclusion. La production passe sous $9\,000$ pièces pour la première fois l'année $2025 + 6$, soit en 2031.

5. `0,75 pts`

Montrer qu'en deux ans la production baisse de $9{,}75$ pour cent, et non de 10 pour cent.

INDICE

Outil : sur deux ans, les coefficients annuels se multiplient.

CORRIGÉ

Sur deux ans, les deux coefficients annuels se multiplient :

$$\begin{aligned} 0{,}95 \times 0{,}95 &= 0{,}9025 \\ &= 1 - 0{,}0975. \end{aligned}$$

Un coefficient $1 - 0{,}0975$ correspond à une baisse au taux $0{,}0975$.

Conclusion. En deux ans, la production baisse de $9{,}75$ pour cent, et non de 10 pour cent : deux baisses de 5 pour cent ne s'additionnent pas.

Exercice 4 4 pts

Deux offres de salaire

Un exemple fictif : deux entreprises proposent un poste à Leila. On note a_n et b_n le salaire annuel, en dirhams (DH), de la $(n+1)$-ième année de travail.

- Entreprise A : $a_0 = 60\,000$, et le salaire augmente de $2\,400$ DH par an.
- Entreprise B : $b_0 = 58\,000$, et chaque année le salaire augmente de 3 pour cent, puis de 600 DH supplémentaires. Ainsi, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 1{,}03\,b_n + 600$.

1. 0,75 pts

Calculer b_1 et b_2. Montrer que (a_n) est arithmétique et que $a_n = 60\,000 + 2\,400n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : pour b_1, applique la relation avec b_0 ; pour (a_n), une augmentation fixe chaque année.

CORRIGÉ

Calcul de b_1 et b_2.

$$\begin{aligned} b_1 &= 1{,}03 \times 58\,000 + 600 \\ &= 59\,740 + 600 = 60\,340, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= 1{,}03 \times 60\,340 + 600 \\ &= 62\,150{,}2 + 600 \\ &= 62\,750{,}2. \end{aligned}$$

Nature de (a_n). Chaque année, le salaire de l'entreprise A augmente de $2\,400$ DH : pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + 2\,400$. La suite (a_n) est arithmétique de raison $2\,400$ et de premier terme $60\,000$, donc, pour tout entier naturel n :

$$a_n = 60\,000 + 2\,400n.$$

Conclusion. $b_1 = 60\,340$ et $b_2 = 62\,750{,}2$; (a_n) est arithmétique et $a_n = 60\,000 + 2\,400n$ pour tout entier naturel n.

2. 1 pts

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = b_n + 20\,000$. Montrer que (w_n) est géométrique de raison $1{,}03$, puis que $b_n = 78\,000 \times 1{,}03^n - 20\,000$.

INDICE

Outil : écris $w_{n+1} = b_{n+1} + 20\,000$, remplace b_{n+1}, puis cherche à factoriser par $1{,}03$.

CORRIGÉ

Nature de (w_n). Soit n un entier naturel. On remplace b_{n+1}, puis on factorise par $1{,}03$, sachant que $1{,}03 \times 20\,000 = 20\,600$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= b_{n+1} + 20\,000 \\ &= 1{,}03\, b_n + 600 \\ &\quad + 20\,000 \\ &= 1{,}03\, b_n + 20\,600 \\ &= 1{,}03\,(b_n + 20\,000) \\ &= 1{,}03\, w_n. \end{aligned}$$

La suite (w_n) est géométrique de raison $1{,}03$, de premier terme $w_0 = 58\,000 + 20\,000 = 78\,000$.

Expression de b_n. Pour tout entier naturel n, $w_n = 78\,000 \times 1{,}03^n$, et $b_n = w_n - 20\,000$.

Contrôle. $78\,000 \times 1{,}03 - 20\,000 = 60\,340 = b_1$.

Conclusion. (w_n) est géométrique de raison $1{,}03$ et, pour tout entier naturel n, $b_n = 78\,000 \times 1{,}03^n - 20\,000$.

3. 0,75 pts

Calculer a_8, b_8, a_9 et b_9 (arrondis au centime). Que constate-t-on ?

INDICE

Outil : utilise les expressions des questions 1 et 2, et la calculatrice pour les puissances de $1{,}03$.

CORRIGÉ

Entreprise A. $a_8 = 60\,000 + 2\,400 \times 8 = 60\,000 + 19\,200 = 79\,200$ et $a_9 = 60\,000 + 21\,600 = 81\,600$.

Entreprise B. À la calculatrice :

$$\begin{aligned} b_8 &= 78\,000 \times 1{,}03^8 \\ &\quad - 20\,000 \\ &\approx 78\,808{,}07, \end{aligned}$$

et $b_9 = 78\,000 \times 1{,}03^9 - 20\,000 \approx 81\,772{,}31$.

Conclusion. $b_8 < a_8$, mais $b_9 > a_9$: la dixième année, le salaire proposé par l'entreprise B dépasse celui de l'entreprise A.

4. 1,5 pts

Montrer que, sur les dix premières années, l'entreprise A verse au total $708\,000$ DH, et que l'entreprise B verse $2\,600\,000 \times (1{,}03^{10} - 1) - 200\,000$ DH. Quelle entreprise verse le plus sur cette période ?

INDICE

Début : les dix premières années correspondent aux rangs 0 à 9 ; pour B, écris chaque b_k à l'aide de w_k.

CORRIGÉ

Entreprise A. La somme $a_0 + \cdots + a_9$ compte 10 termes, de $a_0 = 60\,000$ à $a_9 = 81\,600$. Pour une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} &a_0 + \cdots + a_9 \\ &= 10 \times \frac{60\,000 + 81\,600}{2} \\ &= 708\,000. \end{aligned}$$

Entreprise B. Pour tout entier k compris entre 0 et 9, $b_k = w_k - 20\,000$. On retire donc dix fois $20\,000$:

$$\begin{aligned} &b_0 + \cdots + b_9 \\ &= (w_0 + \cdots + w_9) - 200\,000. \end{aligned}$$

La raison $1{,}03$ est différente de 1, et $\dfrac{78\,000}{1{,}03 - 1} = \dfrac{78\,000}{0{,}03} = 2\,600\,000$:

$$\begin{aligned} &w_0 + \cdots + w_9 \\ &= 78\,000 \times \frac{1 - 1{,}03^{10}}{1 - 1{,}03} \\ &= 2\,600\,000 \\ &\quad \times (1{,}03^{10} - 1). \end{aligned}$$

Donc l'entreprise B verse :

$$\begin{aligned} &2\,600\,000 \times (1{,}03^{10} - 1) \\ &\quad - 200\,000 \\ &\approx 694\,182{,}59. \end{aligned}$$

Comparaison. $708\,000 - 694\,182{,}59 = 13\,817{,}41$.

Conclusion. Sur les dix premières années, l'entreprise A verse $708\,000$ DH et l'entreprise B environ $694\,182{,}59$ DH : l'entreprise A verse le plus, d'environ $13\,817$ DH.

Exercice 5 4 pts

Des panneaux solaires installés mois après mois

Un exemple fictif : une entreprise commence à installer des panneaux solaires dans un quartier. Pour tout entier naturel n, elle installe $d_n = 2n + 3$ panneaux le mois numéro $n + 1$. On note u_n le nombre total de panneaux installés au bout de n mois ; ainsi $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. 0,75 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3, puis montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

INDICE

Outil : pour u_1, prends $n = 0$ dans la relation ; pour le sens de variation, la relation donne directement $u_{n+1} - u_n$.

CORRIGÉ

Premiers termes. Avec $n = 0$, 1, puis 2 dans la relation :

- $u_1 = 0 + 2 \times 0 + 3 = 3$;
- $u_2 = 3 + 2 \times 1 + 3 = 8$;
- $u_3 = 8 + 2 \times 2 + 3 = 15$.

Sens de variation. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$, et $2n + 3 \geq 3 > 0$.

Conclusion. $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 15$, et la suite (u_n) est strictement croissante.

2. 0,5 pts

Montrer que la suite (d_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : calcule $d_{n+1} - d_n$ et vérifie que le résultat ne dépend pas de n.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= 2(n+1) + 3 \\ &\quad - 2n - 3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ce nombre ne dépend pas de n.

Conclusion. La suite (d_n) est arithmétique, de raison 2 et de premier terme $d_0 = 3$.

3. 1,25 pts

Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$. En déduire que $u_n = n^2 + 2n$.

INDICE

Début : au bout de n mois, le total est formé des installations des mois numéros 1 à n ; compte ensuite les termes de la somme.

CORRIGÉ

Le total comme somme. Soit $n \geq 1$ un entier. Au bout de n mois, on a installé les panneaux des mois numéros 1 à n, c'est-à-dire $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$. Donc $u_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$.

Calcul de la somme. Elle compte $(n-1) - 0 + 1 = n$ termes, de premier terme $d_0 = 3$ et de dernier terme $d_{n-1} = 2(n-1) + 3 = 2n + 1$. Pour une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} u_n &= n \times \frac{3 + 2n + 1}{2} \\ &= n\,(n+2) = n^2 + 2n. \end{aligned}$$

Contrôle. $3^2 + 2 \times 3 = 15 = u_3$; la formule donne aussi $u_0 = 0$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$, et $u_n = n^2 + 2n$.

4. 0,75 pts

Au bout de combien de mois l'entreprise aura-t-elle installé au moins $1\,000$ panneaux ?

INDICE

Outil : la suite est croissante ; fais un tableau de valeurs de $n^2 + 2n$ à la calculatrice.

CORRIGÉ

Valeurs. D'après la question 3, $u_{30} = 900 + 60 = 960$ et $u_{31} = 961 + 62 = 1\,023$.

Rôle de la croissance. La suite (u_n) étant croissante, $u_n \leq 960 < 1\,000$ pour $n \leq 30$, et $u_n \geq 1\,023$ pour $n \geq 31$.

Conclusion. L'entreprise aura installé au moins $1\,000$ panneaux au bout de 31 mois.

5. 0,75 pts

Calculer le nombre de panneaux installés du mois numéro 11 au mois numéro 20, puis le contrôler avec la question 3.

INDICE

Début : ces mois correspondent aux termes d_{10} à d_{19} ; compte-les.

CORRIGÉ

Somme à calculer. Le mois numéro $k+1$ correspond au terme d_k : du mois 11 au mois 20, on installe $d_{10}+d_{11}+\cdots+d_{19}$. Cette somme compte $19-10+1=10$ termes, avec $d_{10}=23$ et $d_{19}=41$.

Calcul. Pour une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} &d_{10}+\cdots+d_{19} \\ &= 10\times\frac{23+41}{2}=320. \end{aligned}$$

Contrôle. D'après la question 3, $u_{20}-u_{10}=440-120=320$.

Conclusion. Du mois numéro 11 au mois numéro 20, l'entreprise installe 320 panneaux.