BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	8

Exercice 1

Un encadrement par récurrence, puis le sens de variation

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{4}$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation avec $u_0 = 2$, puis avec u_1.

2.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.

INDICE

Outil : une récurrence en trois temps. **Début de l'hérédité :** si $1 \leq u_n \leq 2$, élève au carré (les nombres sont positifs), puis ajoute 3 et divise par 4.

3.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}$.

INDICE

Outil : mets $u_{n+1} - u_n$ sur le dénominateur 4, puis développe le produit proposé pour comparer.

4.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Outil : l'encadrement de la question 2 donne le signe de $u_n - 1$ et celui de $u_n - 3$.

Exercice 2

Le quotient de deux termes consécutifs

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n \times 2^n}{3^n}$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

INDICE

Outil : remplace n par chaque rang, puis simplifie les fractions.

2.

Justifier que tous les termes sont strictement positifs, puis montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Outil : le quotient de deux fractions ; simplifie $\dfrac{2^{n+1}}{2^n}$ et $\dfrac{3^n}{3^{n+1}}$.

3.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

INDICE

Outil : comme $3n > 0$, comparer le quotient à 1 revient à comparer $2(n+1)$ et $3n$.

4.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle décroissante ?

INDICE

Outil : pour savoir si une suite est décroissante, compare chaque terme de la question 1 au suivant.

Exercice 3

Les ventes d'un magasin, semaine après semaine

Un exemple fictif : un magasin ouvre ses portes. Il vend 140 articles la première semaine, puis, d'une semaine à la suivante, 12 articles de plus. On note u_n le nombre d'articles vendus la semaine numéro n, pour $n \geq 1$.

1.

Montrer que $u_n = 128 + 12n$ pour tout entier $n \geq 1$, puis calculer u_{20}.

INDICE

Outil : la suite est arithmétique de raison 12, mais son premier terme est u_1 : utilise $u_n = u_1 + (n-1)\,r$.

2.

Calculer le nombre total d'articles vendus pendant les 20 premières semaines.

INDICE

Outil : la somme $u_1 + \cdots + u_{20}$ compte 20 termes ; prends la demi-somme du premier et du dernier.

3.

On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Montrer que $S_n = 6n^2 + 134n$.

INDICE

Outil : même formule, avec n termes, le premier $u_1 = 140$ et le dernier $u_n = 128 + 12n$.

4.

À l'aide de la calculatrice, déterminer à la fin de quelle semaine le cumul des ventes dépasse $3\,000$ articles pour la première fois.

INDICE

Outil : fais un tableau de valeurs de S_n à la calculatrice, par pas de 5, puis resserre.

Exercice 4

Une suite géométrique de raison deux tiers

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 81$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\,u_n$.

1.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_4.

INDICE

Outil : la relation est de la forme $u_{n+1} = q\,u_n$.

2.

Donner le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Outil : premier terme strictement positif ; compare la raison à 0 et à 1.

3.

Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_4$ par une formule, puis contrôler en additionnant les termes.

INDICE

Outil : cinq termes, premier terme 81 ; le dénominateur vaut $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

4.

Calculer $T = u_2 + u_3 + u_4$ à l'aide de la même formule.

INDICE

Outil : cette fois, le premier terme de la somme est u_2, et elle compte 3 termes.

Exercice 5

Deux placements comparés année après année

Des données inventées : Samir dispose de $15\,000$ dirhams (DH). La banque A lui propose des intérêts simples au taux annuel $0{,}06$. La banque B lui propose des intérêts composés au taux annuel $0{,}05$. On note A_n et B_n les capitaux, en dirhams, au bout de n années.

1.

Calculer A_1 et B_1. Quelle offre est la meilleure au bout d'un an ?

INDICE

Outil : l'intérêt de la première année se calcule sur le capital de départ, pour les deux offres.

2.

Exprimer A_n et B_n en fonction de n.

INDICE

Outil : la propriété du capital à intérêts simples, puis celle du capital à intérêts composés.

3.

À la calculatrice, dresser un tableau des capitaux arrondis au centime. Au bout de combien d'années l'offre B devient-elle meilleure ?

INDICE

Outil : programme A_n et B_n dans le mode « suite » de la calculatrice, puis compare les deux colonnes rang par rang.

4.

Justifier que $B_n \geq B_9 > 23\,000$ pour tout entier $n \geq 9$, puis que $0{,}05\,B_n > 900$. En déduire que $B_n > A_n$ pour tout entier $n \geq 9$.

INDICE

Outil : $B_{n+1} - B_n = 0{,}05\,B_n$ et $A_{n+1} - A_n = 900$; étudie ensuite le sens de variation de la suite $(B_n - A_n)$.

Exercice 6

La population d'une ville en hausse régulière

Un exemple fictif : une ville compte $45\,000$ habitants en 2025. On suppose que sa population augmente de 2 pour cent par an. On note P_n la population de l'année $2025 + n$.

1.

Justifier que (P_n) est une suite géométrique, et exprimer P_n en fonction de n.

INDICE

Outil : écris le taux en décimal ; une hausse au taux t revient à multiplier par $1 + t$.

2.

Estimer la population en 2035, arrondie à l'unité.

INDICE

Outil : l'année 2025 correspond à $n = 0$.

3.

En quelle année la population dépassera-t-elle $50\,000$ habitants pour la première fois ?

INDICE

Outil : la suite est croissante ; fais un tableau de valeurs de P_n à la calculatrice.

4.

Un élève affirme : « En dix ans, la population augmente de 20 pour cent. » Est-ce exact ?

INDICE

Outil : l'évolution sur dix ans a pour coefficient le produit des dix coefficients annuels.

Exercice 7

Une suite affine étudiée par une suite auxiliaire

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 5$.

1.

Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

INDICE

Outil : compare les écarts $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$, puis les quotients.

2.

Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 5$, remplace u_{n+1}, puis factorise par $0{,}6$.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Outil : le terme général de (v_n), puis $u_n = v_n + 5$.

4.

Déterminer le sens de variation de (u_n).

INDICE

Outil : étudie d'abord (v_n) ; ajouter 5 à chaque terme ne change pas le sens de variation.

5.

Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.

INDICE

Outil : chaque terme vaut $5 + v_k$: la somme se scinde en cinq fois 5, plus la somme des cinq premiers termes de (v_n).

Exercice 8

Ni arithmétique, ni géométrique, mais une somme des deux

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = 3n + 2^n$.

1.

Calculer w_0, w_1, w_2 et w_3. Montrer que (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

INDICE

Outil : pour prouver qu'une suite n'est pas d'un type donné, trois termes consécutifs suffisent.

2.

Montrer que $w_0 + w_1 + \cdots + w_9 = 3 \times (0 + 1 + \cdots + 9) + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9)$, puis calculer cette somme.

INDICE

Outil : regroupe les termes $3k$ d'un côté et les puissances 2^k de l'autre ; chaque morceau est une somme connue.

3.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = 3 + 2^n$. En déduire le sens de variation de (w_n).

INDICE

Outil : développe $w_{n+1} - w_n$, puis remarque que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.