BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	8

Exercice 1

Un encadrement par récurrence, puis le sens de variation

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{4}$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation avec $u_0 = 2$, puis avec u_1.

CORRIGÉ

Calcul de u_1. Avec $n = 0$ et $u_0 = 2$:

$$u_1 = \frac{2^2 + 3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Calcul de u_2. Avec $n = 1$ et $u_1 = \dfrac{7}{4}$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{49}{16} + 3\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{97}{16} \\ &= \frac{97}{64}. \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{7}{4}$ et $u_2 = \dfrac{97}{64}$.

2.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.

INDICE

Outil : une récurrence en trois temps. **Début de l'hérédité :** si $1 \leq u_n \leq 2$, élève au carré (les nombres sont positifs), puis ajoute 3 et divise par 4.

CORRIGÉ

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

Initialisation. $u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $1 \leq u_n \leq 2$. Montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Les trois membres de l'encadrement sont positifs ; les élever au carré conserve donc l'ordre :

$$1 \leq u_n^2 \leq 4.$$

On ajoute 3, puis on divise par 4, qui est positif :

$$\begin{aligned} 4 \leq u_n^2 + 3 &\leq 7, \\ 1 \leq u_{n+1} &\leq \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{7}{4} \leq 2$, on obtient $1 \leq u_{n+1} \leq 2$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.

3.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}$.

INDICE

Outil : mets $u_{n+1} - u_n$ sur le dénominateur 4, puis développe le produit proposé pour comparer.

CORRIGÉ

Différence. Soit n un entier naturel. On réduit au dénominateur 4 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + 3}{4} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{4}. \end{aligned}$$

Produit proposé. On le développe :

$$\begin{aligned} &(u_n - 1)(u_n - 3) \\ &= u_n^2 - 3u_n - u_n + 3 \\ &= u_n^2 - 4u_n + 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux numérateurs sont égaux : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{4}$.

4.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Outil : l'encadrement de la question 2 donne le signe de $u_n - 1$ et celui de $u_n - 3$.

CORRIGÉ

Signe des facteurs. Soit n un entier naturel. D'après la question 2, $u_n \geq 1$, donc $u_n - 1 \geq 0$; et $u_n \leq 2$, donc $u_n - 3 \leq -1 < 0$.

Signe de la différence. Le produit $(u_n - 1)(u_n - 3)$ est négatif ou nul. D'après la question 3, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Contrôle. $u_0 = 2$, $u_1 = 1{,}75$ et $u_2 \approx 1{,}52$ vont bien en diminuant.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 2

Le quotient de deux termes consécutifs

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n \times 2^n}{3^n}$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

INDICE

Outil : remplace n par chaque rang, puis simplifie les fractions.

CORRIGÉ

On remplace n par $1, 2, 3$ et 4 :

- $u_1 = \dfrac{1 \times 2}{3} = \dfrac{2}{3}$;
- $u_2 = \dfrac{2 \times 4}{9} = \dfrac{8}{9}$;
- $u_3 = \dfrac{3 \times 8}{27} = \dfrac{8}{9}$;
- $u_4 = \dfrac{4 \times 16}{81} = \dfrac{64}{81}$.

Conclusion. $u_1 = \dfrac{2}{3}$, $u_2 = u_3 = \dfrac{8}{9}$ et $u_4 = \dfrac{64}{81}$.

2.

Justifier que tous les termes sont strictement positifs, puis montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

INDICE

Outil : le quotient de deux fractions ; simplifie $\dfrac{2^{n+1}}{2^n}$ et $\dfrac{3^n}{3^{n+1}}$.

CORRIGÉ

Signe des termes. Pour tout entier $n \geq 1$, les nombres n, 2^n et 3^n sont strictement positifs, donc $u_n > 0$.

Quotient. Soit $n \geq 1$ un entier. Diviser par u_n, qui n'est pas nul, revient à multiplier par son inverse :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1) \times 2^{n+1}}{3^{n+1}} \\ &\quad \times \frac{3^n}{n \times 2^n} \\ &= \frac{(n+1) \times 2}{n \times 3} \\ &= \frac{2(n+1)}{3n}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les termes sont strictement positifs et, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n}$.

3.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

INDICE

Outil : comme $3n > 0$, comparer le quotient à 1 revient à comparer $2(n+1)$ et $3n$.

CORRIGÉ

Comparaison du quotient à 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Comme $3n > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{2(n+1)}{3n} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 2n + 2 \leq 3n \\ &\Leftrightarrow n \geq 2. \end{aligned}$$

La condition $n \geq 2$ est remplie : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Sens de variation. Les termes sont strictement positifs ; un quotient de deux termes consécutifs inférieur ou égal à 1 donne $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq 2$. Pour $n \geq 3$, l'inégalité est stricte.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$: la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, et même strictement décroissante à partir du rang 3.

4.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle décroissante ?

INDICE

Outil : pour savoir si une suite est décroissante, compare chaque terme de la question 1 au suivant.

CORRIGÉ

On compare les deux premiers termes : $u_1 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$ et $u_2 = \dfrac{8}{9}$, donc $u_2 > u_1$.

Le quotient le confirme : pour $n = 1$, il vaut $\dfrac{2 \times 2}{3 \times 1} = \dfrac{4}{3} > 1$.

Conclusion. Non : la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas décroissante. Elle croît du rang 1 au rang 2, puis décroît.

Exercice 3

Les ventes d'un magasin, semaine après semaine

Un exemple fictif : un magasin ouvre ses portes. Il vend 140 articles la première semaine, puis, d'une semaine à la suivante, 12 articles de plus. On note u_n le nombre d'articles vendus la semaine numéro n, pour $n \geq 1$.

1.

Montrer que $u_n = 128 + 12n$ pour tout entier $n \geq 1$, puis calculer u_{20}.

INDICE

Outil : la suite est arithmétique de raison 12, mais son premier terme est u_1 : utilise $u_n = u_1 + (n-1)\,r$.

CORRIGÉ

Nature. Chaque semaine, on vend 12 articles de plus que la précédente : pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 12$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de raison 12 et de premier terme $u_1 = 140$.

Terme général. Le premier terme est de rang 1 : $u_n = u_1 + (n-1)\,r$. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= 140 + 12(n-1) \\ &= 128 + 12n. \end{aligned}$$

Calcul de u_{20}. $u_{20} = 128 + 12 \times 20 = 128 + 240 = 368$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 128 + 12n$, et $u_{20} = 368$.

2.

Calculer le nombre total d'articles vendus pendant les 20 premières semaines.

INDICE

Outil : la somme $u_1 + \cdots + u_{20}$ compte 20 termes ; prends la demi-somme du premier et du dernier.

CORRIGÉ

Le total est $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$: 20 termes, du premier $u_1 = 140$ au dernier $u_{20} = 368$. Pour une suite arithmétique, cette somme vaut le nombre de termes multiplié par la demi-somme des termes extrêmes :

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} \\ &= 20 \times \frac{140 + 368}{2} \\ &= 20 \times 254 = 5\,080. \end{aligned}$$

Conclusion. Pendant les 20 premières semaines, le magasin vend $5\,080$ articles.

3.

On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Montrer que $S_n = 6n^2 + 134n$.

INDICE

Outil : même formule, avec n termes, le premier $u_1 = 140$ et le dernier $u_n = 128 + 12n$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$ un entier. La somme S_n compte n termes, de $u_1 = 140$ à $u_n = 128 + 12n$:

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \frac{140 + 128 + 12n}{2} \\ &= n \times \frac{268 + 12n}{2} \\ &= n(134 + 6n) \\ &= 6n^2 + 134n. \end{aligned}$$

Contrôle. $S_{20} = 6 \times 400 + 134 \times 20 = 2\,400 + 2\,680 = 5\,080$, comme à la question 2.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 6n^2 + 134n$.

4.

À l'aide de la calculatrice, déterminer à la fin de quelle semaine le cumul des ventes dépasse $3\,000$ articles pour la première fois.

INDICE

Outil : fais un tableau de valeurs de S_n à la calculatrice, par pas de 5, puis resserre.

CORRIGÉ

Sens de variation de (S_n). Pour tout entier $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$: la suite (S_n) est strictement croissante.

Valeurs. À la calculatrice :

- $S_{13} = 6 \times 169 + 134 \times 13 = 1\,014 + 1\,742 = 2\,756$;
- $S_{14} = 6 \times 196 + 134 \times 14 = 1\,176 + 1\,876 = 3\,052$.

Comme (S_n) est croissante, $S_n \leq S_{13} < 3\,000$ pour $n \leq 13$, alors que $S_{14} > 3\,000$.

Conclusion. Le cumul des ventes dépasse $3\,000$ articles pour la première fois à la fin de la semaine 14.

Exercice 4

Une suite géométrique de raison deux tiers

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 81$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}\,u_n$.

1.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_4.

INDICE

Outil : la relation est de la forme $u_{n+1} = q\,u_n$.

CORRIGÉ

Nature. La relation s'écrit $u_{n+1} = q\,u_n$ avec $q = \dfrac{2}{3}$, nombre indépendant de n : la suite (u_n) est géométrique, de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 81$.

Terme général. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Calcul de u_4. $u_4 = 81 \times \dfrac{16}{81} = 16$.

Conclusion. (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$; pour tout entier naturel n, $u_n = 81 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, et $u_4 = 16$.

2.

Donner le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Outil : premier terme strictement positif ; compare la raison à 0 et à 1.

CORRIGÉ

Le premier terme vérifie $u_0 = 81 > 0$ et la raison vérifie $0 < \dfrac{2}{3} < 1$. Pour une suite géométrique, ces deux conditions donnent une suite strictement décroissante.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement décroissante.

3.

Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_4$ par une formule, puis contrôler en additionnant les termes.

INDICE

Outil : cinq termes, premier terme 81 ; le dénominateur vaut $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

CORRIGÉ

Formule. La somme compte $4 - 0 + 1 = 5$ termes, de premier terme 81, et la raison $\dfrac{2}{3}$ est différente de 1. Avec la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} S &= 81 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 243 \times \left(1 - \frac{32}{243}\right) \\ &= 243 - 32 = 211. \end{aligned}$$

On a utilisé $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, donc diviser par ce nombre revient à multiplier par 3.

Contrôle. Les termes sont 81, 54, 36, 24 et 16, et $81 + 54 + 36 + 24 + 16 = 211$.

Conclusion. $S = 211$.

4.

Calculer $T = u_2 + u_3 + u_4$ à l'aide de la même formule.

INDICE

Outil : cette fois, le premier terme de la somme est u_2, et elle compte 3 termes.

CORRIGÉ

Le premier terme de T est $u_2 = 81 \times \dfrac{4}{9} = 36$, et T compte $4 - 2 + 1 = 3$ termes :

$$\begin{aligned} T &= 36 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{1}{3}} \\ &= 108 \times \frac{19}{27} = 76. \end{aligned}$$

Contrôle. $36 + 24 + 16 = 76$.

Conclusion. $T = 76$.

Exercice 5

Deux placements comparés année après année

Des données inventées : Samir dispose de $15\,000$ dirhams (DH). La banque A lui propose des intérêts simples au taux annuel $0{,}06$. La banque B lui propose des intérêts composés au taux annuel $0{,}05$. On note A_n et B_n les capitaux, en dirhams, au bout de n années.

1.

Calculer A_1 et B_1. Quelle offre est la meilleure au bout d'un an ?

INDICE

Outil : l'intérêt de la première année se calcule sur le capital de départ, pour les deux offres.

CORRIGÉ

Banque A. L'intérêt de la première année est $15\,000 \times 0{,}06 = 900$ DH, donc $A_1 = 15\,000 + 15\,000 \times 0{,}06 = 15\,900$.

Banque B. Le coefficient multiplicateur annuel est $1{,}05$, donc $B_1 = 15\,000 \times 1{,}05 = 15\,750$.

Conclusion. $A_1 = 15\,900$ et $B_1 = 15\,750$: au bout d'un an, l'offre A est la meilleure.

2.

Exprimer A_n et B_n en fonction de n.

INDICE

Outil : la propriété du capital à intérêts simples, puis celle du capital à intérêts composés.

CORRIGÉ

Intérêts simples. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} A_n &= 15\,000\,(1 + 0{,}06n) \\ &= 15\,000 + 900n. \end{aligned}$$

La suite (A_n) est arithmétique de raison 900.

Intérêts composés. Pour tout entier naturel n :

$$B_n = 15\,000 \times 1{,}05^n.$$

La suite (B_n) est géométrique de raison $1{,}05$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $A_n = 15\,000 + 900n$ et $B_n = 15\,000 \times 1{,}05^n$.

3.

À la calculatrice, dresser un tableau des capitaux arrondis au centime. Au bout de combien d'années l'offre B devient-elle meilleure ?

INDICE

Outil : programme A_n et B_n dans le mode « suite » de la calculatrice, puis compare les deux colonnes rang par rang.

CORRIGÉ

À la calculatrice, on obtient notamment :

n	1	4	7	8	9
A_n	$15\,900$	$18\,600$	$21\,300$	$22\,200$	$23\,100$
B_n	$15\,750$	$18\,232{,}59$	$21\,106{,}51$	$22\,161{,}83$	$23\,269{,}92$

En comparant les deux colonnes rang par rang, on constate que $B_n < A_n$ pour $1 \leq n \leq 8$, alors que $B_9 > A_9$.

Conclusion. L'offre B devient meilleure au bout de 9 ans.

4.

Justifier que $B_n \geq B_9 > 23\,000$ pour tout entier $n \geq 9$, puis que $0{,}05\,B_n > 900$. En déduire que $B_n > A_n$ pour tout entier $n \geq 9$.

INDICE

Outil : $B_{n+1} - B_n = 0{,}05\,B_n$ et $A_{n+1} - A_n = 900$; étudie ensuite le sens de variation de la suite $(B_n - A_n)$.

CORRIGÉ

Minoration de B_n. La suite (B_n) est géométrique, de premier terme positif et de raison $1{,}05 > 1$: elle est croissante. Pour tout entier $n \geq 9$, $B_n \geq B_9$, et $B_9 \approx 23\,269{,}92 > 23\,000$ d'après la question 3. Donc $0{,}05\,B_n > 1\,150 > 900$.

Variation de l'écart. Pour tout entier naturel n, $B_{n+1} - B_n = 0{,}05\,B_n$ et $A_{n+1} - A_n = 900$. Pour $n \geq 9$:

$$\begin{aligned}(B_{n+1} - A_{n+1}) &\\ - (B_n - A_n) &\\ = (B_{n+1} - B_n) &\\ - (A_{n+1} - A_n) &\\ = 0{,}05\,B_n - 900 > 0.&\end{aligned}$$

La suite $(B_n - A_n)_{n \geq 9}$ est donc strictement croissante.

Conclusion. Comme $B_9 - A_9 > 0$ (question 3), on a $B_n - A_n \geq B_9 - A_9 > 0$ pour tout entier $n \geq 9$. Ainsi $B_n > A_n$ pour tout entier $n \geq 9$: l'offre B reste la meilleure.

Exercice 6

La population d'une ville en hausse régulière

Un exemple fictif : une ville compte $45\,000$ habitants en 2025. On suppose que sa population augmente de 2 pour cent par an. On note P_n la population de l'année $2025 + n$.

1.

Justifier que (P_n) est une suite géométrique, et exprimer P_n en fonction de n.

INDICE

Outil : écris le taux en décimal ; une hausse au taux t revient à multiplier par $1 + t$.

CORRIGÉ

Coefficient. Le taux vaut $t = 0{,}02$: une hausse de 2 pour cent revient à multiplier par $1 + t = 1{,}02$.

Nature. Pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = 1{,}02\,P_n$: la suite (P_n) est géométrique de raison $1{,}02$ et de premier terme $P_0 = 45\,000$.

Terme général. Pour tout entier naturel n :

$$P_n = 45\,000 \times 1{,}02^n.$$

Conclusion. (P_n) est géométrique de raison $1{,}02$, et $P_n = 45\,000 \times 1{,}02^n$ pour tout entier naturel n.

2.

Estimer la population en 2035, arrondie à l'unité.

INDICE

Outil : l'année 2025 correspond à $n = 0$.

CORRIGÉ

L'année 2035 correspond à $n = 2035 - 2025 = 10$:

$$\begin{aligned} P_{10} &= 45\,000 \times 1{,}02^{10} \\ &\approx 54\,855. \end{aligned}$$

Conclusion. En 2035, la ville compterait environ $54\,855$ habitants.

3.

En quelle année la population dépassera-t-elle $50\,000$ habitants pour la première fois ?

INDICE

Outil : la suite est croissante ; fais un tableau de valeurs de P_n à la calculatrice.

CORRIGÉ

Sens de variation. On a $P_0 > 0$ et $1{,}02 > 1$: la suite (P_n) est strictement croissante.

Valeurs. À la calculatrice, $P_5 \approx 49\,683{,}6 < 50\,000$ et $P_6 \approx 50\,677{,}3 > 50\,000$. La suite étant croissante, $P_n \leq P_5 < 50\,000$ pour $n \leq 5$.

Conclusion. La population dépasse $50\,000$ habitants pour la première fois l'année $2025 + 6$, soit en 2031.

4.

Un élève affirme : « En dix ans, la population augmente de 20 pour cent. » Est-ce exact ?

INDICE

Outil : l'évolution sur dix ans a pour coefficient le produit des dix coefficients annuels.

CORRIGÉ

Sur dix ans, les dix coefficients annuels se multiplient :

$$1{,}02^{10} \approx 1{,}219.$$

Ce coefficient n'est pas $1{,}20$: la hausse globale est d'environ $21{,}9$ pour cent.

Conclusion. L'affirmation est inexacte : des pourcentages successifs ne s'additionnent pas, ce sont leurs coefficients multiplicateurs qui se multiplient.

Exercice 7

Une suite affine étudiée par une suite auxiliaire

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}6\,u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 5$.

1.

Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

INDICE

Outil : compare les écarts $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$, puis les quotients.

CORRIGÉ

Termes. $u_1 = 0{,}6 \times 10 + 2 = 8$ et $u_2 = 0{,}6 \times 8 + 2 = 6{,}8$.

Écarts. $u_1 - u_0 = -2$ et $u_2 - u_1 = -1{,}2$: ils diffèrent, la suite n'est pas arithmétique.

Quotients. $\dfrac{u_1}{u_0} = 0{,}8$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = 0{,}85$: ils diffèrent, la suite n'est pas géométrique.

Conclusion. $u_1 = 8$, $u_2 = 6{,}8$; la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2.

Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 5$, remplace u_{n+1}, puis factorise par $0{,}6$.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel. On remplace u_{n+1}, puis on factorise par $0{,}6$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 0{,}6\,u_n + 2 - 5 \\ &= 0{,}6\,u_n - 3 \\ &= 0{,}6\,(u_n - 5) \\ &= 0{,}6\,v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}6$, de premier terme $v_0 = 10 - 5 = 5$.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

INDICE

Outil : le terme général de (v_n), puis $u_n = v_n + 5$.

CORRIGÉ

Terme général de (v_n). Pour tout entier naturel n :

$$v_n = 5 \times 0{,}6^n.$$

Retour à (u_n). Comme $u_n = v_n + 5$:

$$u_n = 5 + 5 \times 0{,}6^n.$$

Contrôle. $5 + 5 \times 0{,}6 = 8 = u_1$ et $5 + 5 \times 0{,}36 = 6{,}8 = u_2$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $v_n = 5 \times 0{,}6^n$ et $u_n = 5 + 5 \times 0{,}6^n$.

4.

Déterminer le sens de variation de (u_n).

INDICE

Outil : étudie d'abord (v_n) ; ajouter 5 à chaque terme ne change pas le sens de variation.

CORRIGÉ

Sens de variation de (v_n). On a $v_0 = 5 > 0$ et $0 < 0{,}6 < 1$: la suite géométrique (v_n) est strictement décroissante.

Retour à (u_n). Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (v_{n+1} + 5) \\ &\quad - (v_n + 5) \\ &= v_{n+1} - v_n < 0. \end{aligned}$$

Conclusion. La suite (u_n) est strictement décroissante.

5.

Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.

INDICE

Outil : chaque terme vaut $5 + v_k$: la somme se scinde en cinq fois 5, plus la somme des cinq premiers termes de (v_n).

CORRIGÉ

Découpage. La somme compte 5 termes et, pour tout entier naturel k, $u_k = 5 + v_k$. Donc :

$$\begin{aligned} S &= 5 \times 5 \\ &\quad + (v_0 + v_1 + \cdots + v_4). \end{aligned}$$

Somme géométrique. La raison $0{,}6$ est différente de 1 :

$$\begin{aligned} &v_0 + \cdots + v_4 \\ &= 5 \times \frac{1 - 0{,}6^5}{1 - 0{,}6} \\ &= 12{,}5 \times (1 - 0{,}077\,76) \\ &= 11{,}528. \end{aligned}$$

Donc $S = 25 + 11{,}528 = 36{,}528$.

Contrôle. $10 + 8 + 6{,}8 + 6{,}08 + 5{,}648 = 36{,}528$.

Conclusion. $S = 36{,}528$.

Exercice 8

Ni arithmétique, ni géométrique, mais une somme des deux

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = 3n + 2^n$.

1.

Calculer w_0, w_1, w_2 et w_3. Montrer que (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

INDICE

Outil : pour prouver qu'une suite n'est pas d'un type donné, trois termes consécutifs suffisent.

CORRIGÉ

Termes. $w_0 = 0 + 1 = 1$, $w_1 = 3 + 2 = 5$, $w_2 = 6 + 4 = 10$ et $w_3 = 9 + 8 = 17$.

- Écarts : $w_1 - w_0 = 4$ et $w_2 - w_1 = 5$. Ils diffèrent : la suite n'est pas arithmétique.
- Quotients : $\dfrac{w_1}{w_0} = 5$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = 2$. Ils diffèrent : la suite n'est pas géométrique.

Conclusion. $w_0 = 1$, $w_1 = 5$, $w_2 = 10$, $w_3 = 17$, et la suite (w_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2.

Montrer que $w_0 + w_1 + \cdots + w_9 = 3 \times (0 + 1 + \cdots + 9) + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9)$, puis calculer cette somme.

INDICE

Outil : regroupe les termes $3k$ d'un côté et les puissances 2^k de l'autre ; chaque morceau est une somme connue.

CORRIGÉ

Regroupement. On sépare, dans chaque terme $w_k = 3k + 2^k$, la partie $3k$ et la puissance 2^k :

$$\begin{aligned} &w_0 + \cdots + w_9 \\ &= (3 \times 0 + 3 \times 1 \\ &\quad + \cdots + 3 \times 9) \\ &\quad + (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^9) \\ &= 3 \times (0 + 1 + \cdots + 9) \\ &\quad + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9). \end{aligned}$$

Calcul.

- Somme des entiers : $0 + 1 + \cdots + 9 = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45$.
- Somme géométrique de raison 2, avec 10 termes : $1 + 2 + \cdots + 2^9 = \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1\,023$.

Donc :

$$\begin{aligned} &w_0 + w_1 + \cdots + w_9 \\ &= 3 \times 45 + 1\,023 \\ &= 1\,158. \end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité demandée est vraie, et $w_0 + w_1 + \cdots + w_9 = 1\,158$.

3.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = 3 + 2^n$. En déduire le sens de variation de (w_n).

INDICE

Outil : développe $w_{n+1} - w_n$, puis remarque que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

CORRIGÉ

Différence. Soit n un entier naturel. Comme $2^{n+1} = 2 \times 2^n$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 3(n+1) + 2^{n+1} \\ &\quad - 3n - 2^n \\ &= 3 + 2 \times 2^n - 2^n \\ &= 3 + 2^n. \end{aligned}$$

Signe. Le nombre $3 + 2^n$ est strictement positif.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = 3 + 2^n > 0$: la suite (w_n) est strictement croissante.