BURHAN

Suites numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	10

Exercice 1

Termes d'une suite donnée par une formule

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$.

1.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_9.

INDICE

Outil : la suite est donnée par une formule en n ; remplace n par 0, puis par 1, et ainsi de suite.

2.

Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

INDICE

Outil : remplace n par $n+1$ partout, au numérateur comme au dénominateur.

3.

Calculer $u_0 + 1$ et le comparer à u_1. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : utilise les valeurs de la question 1.

Exercice 2

De proche en proche, puis au tableur

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

INDICE

Outil : la relation donne un terme à partir du précédent ; pour u_1, prends $n = 0$ et $u_0 = 1$.

2.

Peut-on calculer u_{10} sans connaître u_9 ? Justifier.

INDICE

Outil : regarde ce dont la relation a besoin pour donner u_{10}.

3.

Dans un tableur, la colonne A contient les rangs $0, 1, 2, \ldots$ à partir de la cellule A2, et la cellule B2 contient 1. Quelle formule écrire en B3 pour obtenir u_1, puis recopier vers le bas ?

INDICE

Outil : en B3, le terme précédent est en B2 et son rang n est en A2.

Exercice 3

Encadrer une suite par l'étude d'un signe

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{3n + 2}{n + 1}$.

1.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 = \dfrac{-1}{n+1}$. En déduire que (u_n) est majorée par 3.

INDICE

Outil : écris $3 = \dfrac{3(n+1)}{n+1}$ pour tout mettre sur le même dénominateur.

2.

Calculer $u_n - 2$, puis montrer que (u_n) est minorée par 2.

INDICE

Outil : même méthode, avec le dénominateur commun $n + 1$.

3.

La suite (u_n) est-elle bornée ?

INDICE

Outil : rappelle-toi ce que signifie « bornée ».

Exercice 4

Une suite qui change de sens

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2 - 7n + 3$.

1.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n - 6$.

INDICE

Outil : développe $(n+1)^2 - 7(n+1) + 3$, puis soustrais u_n.

2.

Étudier le signe de $2n - 6$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

INDICE

Outil : résous l'inéquation $2n - 6 \geq 0$ d'inconnue n, puis relis la question 1.

3.

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle monotone ?

INDICE

Outil : calcule les six termes, puis compare chaque terme au suivant.

Exercice 5

La production d'une coopérative laitière

Un exemple fictif : une coopérative produit $1\,250$ litres de lait par jour en 2024. Chaque année, cette production journalière augmente de 85 litres. On note u_n la production journalière, en litres, de l'année $2024 + n$.

1.

Donner u_0 et justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

INDICE

Outil : une quantité à laquelle on ajoute chaque année le même nombre.

2.

Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer la production journalière de 2032.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_0 ; l'année 2024 correspond à $n = 0$.

3.

À partir de quelle année la production journalière atteindra-t-elle $2\,000$ litres ?

INDICE

Outil : résous $1\,250 + 85n \geq 2\,000$, avec n entier.

4.

Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

INDICE

Outil : le sens de variation d'une suite arithmétique dépend du signe de sa raison.

Exercice 6

Compter les termes, puis additionner

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 7 - 3n$.

1.

Montrer que (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : calcule $v_{n+1} - v_n$ et vérifie que le résultat ne dépend pas de n.

2.

Combien la somme $S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{20}$ compte-t-elle de termes ? Calculer v_4 et v_{20}.

INDICE

Outil : de v_p à v_n, on compte $n - p + 1$ termes.

3.

Calculer S.

INDICE

Outil : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, avec les résultats de la question 2.

4.

Calculer $T = 1 + 2 + \cdots + 60$.

INDICE

Outil : la somme des entiers de 1 à n, avec $n = 60$.

Exercice 7

Une suite géométrique cachée dans une fraction

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

1.

Calculer w_0, w_1 et w_2.

INDICE

Outil : remplace n par chaque rang ; $2^0 = 1$.

2.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{3}{2}\, w_n$. Conclure.

INDICE

Outil : écris $3^{n+2} = 3 \times 3^{n+1}$ et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

3.

Écrire w_n à l'aide du premier terme et de la raison, puis calculer w_4.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique de premier terme w_0.

4.

Donner le sens de variation de (w_n).

INDICE

Outil : vérifie les signes du premier terme et de la raison, puis compare la raison à 1.

Exercice 8

Une suite qui commence au rang 1

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique, de premier terme $u_1 = 6$ et de raison $q = 2$.

1.

Exprimer u_n en fonction de n, pour $n \geq 1$, puis calculer u_7.

INDICE

Outil : le terme général $u_n = u_p \times q^{n-p}$, avec $p = 1$.

2.

Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ à l'aide d'une formule.

INDICE

Outil : compte d'abord les termes, puis applique la somme géométrique avec le premier terme u_1.

3.

Vérifier le résultat en additionnant les sept termes.

INDICE

Outil : chaque terme est le double du précédent.

Exercice 9

Coefficients multiplicateurs et capital placé

Les montants de cet exercice sont fictifs.

1.

Donner le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 3 pour cent, puis à une baisse de 15 pour cent.

INDICE

Outil : écris d'abord chaque taux en décimal ; une hausse au taux t multiplie par $1+t$, une baisse par $1-t$.

2.

Karim place $12\,000$ dirhams (DH) à intérêts simples, au taux annuel $t = 0{,}03$. Calculer son capital au bout de 5 ans.

INDICE

Outil : à intérêts simples, $C_n = C_0\,(1 + n\,t)$.

3.

Nadia place la même somme au même taux, mais à intérêts composés. Calculer son capital au bout de 5 ans, arrondi au centime, et le comparer à celui de Karim.

INDICE

Outil : à intérêts composés, $C_n = C_0\,(1+t)^n$; utilise ta calculatrice pour $1{,}03^5$.

Exercice 10

Vérifier une suite auxiliaire donnée

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 6$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 10$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation avec $u_0 = 5$, puis avec u_1.

2.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}4\,v_n$. Préciser la nature de (v_n) et son premier terme.

INDICE

Outil : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 10$, puis remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n.

3.

En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n. Contrôler avec la question 1.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, puis la définition de v_n, à lire dans l'autre sens.