BURHAN

Suites numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	10

Exercice 1

Termes d'une suite donnée par une formule

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$.

1.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_9.

INDICE

Outil : la suite est donnée par une formule en n ; remplace n par 0, puis par 1, et ainsi de suite.

CORRIGÉ

On remplace n par chaque rang demandé dans la formule :

- $u_0 = \dfrac{0+5}{0+1} = \dfrac{5}{1} = 5$;
- $u_1 = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$;
- $u_2 = \dfrac{4+5}{3} = 3$;
- $u_9 = \dfrac{18+5}{10} = \dfrac{23}{10} = 2{,}3$.

Conclusion. $u_0 = 5$, $u_1 = \dfrac{7}{2}$, $u_2 = 3$ et $u_9 = 2{,}3$.

2.

Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

INDICE

Outil : remplace n par $n+1$ partout, au numérateur comme au dénominateur.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel. On remplace n par $n+1$ au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+1} \\ &= \frac{2n+7}{n+2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2n+7}{n+2}$.

3.

Calculer $u_0 + 1$ et le comparer à u_1. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : utilise les valeurs de la question 1.

CORRIGÉ

D'une part $u_0 + 1 = 5 + 1 = 6$; d'autre part $u_1 = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$. Ces deux nombres sont différents.

Conclusion. Le terme u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$: pour l'obtenir, on remplace n par $n+1$ dans la formule, comme à la question 2.

Exercice 2

De proche en proche, puis au tableur

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

INDICE

Outil : la relation donne un terme à partir du précédent ; pour u_1, prends $n = 0$ et $u_0 = 1$.

CORRIGÉ

On applique la relation pas à pas, avec $n = 0$, puis $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$:

- $u_1 = 2 \times 1 - 0 + 3 = 5$;
- $u_2 = 2 \times 5 - 1 + 3 = 12$;
- $u_3 = 2 \times 12 - 2 + 3 = 25$;
- $u_4 = 2 \times 25 - 3 + 3 = 50$.

Conclusion. $u_1 = 5$, $u_2 = 12$, $u_3 = 25$ et $u_4 = 50$.

2.

Peut-on calculer u_{10} sans connaître u_9 ? Justifier.

INDICE

Outil : regarde ce dont la relation a besoin pour donner u_{10}.

CORRIGÉ

Avec $n = 9$, la relation s'écrit :

$$u_{10} = 2u_9 - 9 + 3.$$

Elle réclame u_9, qui réclame lui-même u_8, et ainsi de suite jusqu'à u_0.

Conclusion. Non : sans u_9, on ne peut pas calculer u_{10}. Une relation de récurrence fait avancer d'un terme à la fois.

3.

Dans un tableur, la colonne A contient les rangs $0, 1, 2, \ldots$ à partir de la cellule A2, et la cellule B2 contient 1. Quelle formule écrire en B3 pour obtenir u_1, puis recopier vers le bas ?

INDICE

Outil : en B3, le terme précédent est en B2 et son rang n est en A2.

CORRIGÉ

Le terme u_{n+1} se calcule avec u_n, situé sur la ligne du dessus en colonne B, et avec le rang n, situé sur la ligne du dessus en colonne A. Pour B3, ce sont les cellules B2 et A2.

Conclusion. On écrit en B3 la formule « =2*B2-A2+3 ». Recopiée vers le bas, elle affiche $5, 12, 25, 50$: les valeurs de la question 1.

Exercice 3

Encadrer une suite par l'étude d'un signe

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$.

1.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n - 3 = \dfrac{-1}{n+1}$. En déduire que (u_n) est majorée par 3.

INDICE

Outil : écris $3 = \dfrac{3(n+1)}{n+1}$ pour tout mettre sur le même dénominateur.

CORRIGÉ

Calcul de $u_n - 3$. Soit n un entier naturel. On réduit au dénominateur $n+1$:

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{3n+2-3(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{3n+2-3n-3}{n+1} \\ &= \frac{-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $n+1 > 0$, le quotient $\dfrac{-1}{n+1}$ est strictement négatif. Donc $u_n - 3 < 0$, c'est-à-dire $u_n < 3$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_n - 3 = \dfrac{-1}{n+1}$ et $u_n < 3$: la suite (u_n) est majorée par 3.

2.

Calculer $u_n - 2$, puis montrer que (u_n) est minorée par 2.

INDICE

Outil : même méthode, avec le dénominateur commun $n+1$.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel. Avec le même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n - 2 &= \frac{3n+2-2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Le numérateur vérifie $n \geq 0$ et le dénominateur $n+1 > 0$. Donc $u_n - 2 \geq 0$, soit $u_n \geq 2$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$: la suite (u_n) est minorée par 2. Ce minorant est atteint, car $u_0 = 2$.

3.

La suite (u_n) est-elle bornée ?

INDICE

Outil : rappelle-toi ce que signifie « bornée ».

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, pour tout entier naturel n :

$$2 \leq u_n < 3.$$

Conclusion. La suite (u_n) est majorée et minorée : elle est bornée.

Exercice 4

Une suite qui change de sens

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2 - 7n + 3$.

1.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n - 6$.

INDICE

Outil : développe $(n+1)^2 - 7(n+1) + 3$, puis soustrais u_n.

CORRIGÉ

Calcul de u_{n+1}. Soit n un entier naturel. On remplace n par $n+1$, puis on développe :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 \\ &\quad - 7(n+1) + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &\quad - 7n - 7 + 3 \\ &= n^2 - 5n - 3. \end{aligned}$$

Différence.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n^2 - 5n - 3) \\ &\quad - (n^2 - 7n + 3) \\ &= 2n - 6. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n - 6$.

2.

Étudier le signe de $2n - 6$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

INDICE

Outil : résous l'inéquation $2n - 6 \geq 0$ d'inconnue n, puis relis la question 1.

CORRIGÉ

Signe de $2n - 6$. Pour un entier naturel n :

$$2n - 6 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 3.$$

Ainsi $2n - 6 < 0$ pour $n \leq 2$, $2n - 6 = 0$ pour $n = 3$, et $2n - 6 > 0$ pour $n \geq 4$.

Sens de variation. D'après la question 1, pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 6 \geq 0$.

Conclusion. La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante. Elle est même strictement croissante à partir du rang 4, puisque $2n - 6 > 0$ pour $n \geq 4$.

3.

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle monotone ?

INDICE

Outil : calcule les six termes, puis compare chaque terme au suivant.

CORRIGÉ

Termes. On trouve $u_0 = 3$, $u_1 = -3$, $u_2 = -7$, $u_3 = -9$, $u_4 = -9$ et $u_5 = -7$.

Comparaisons. Comme $u_1 < u_0$, la suite n'est pas croissante. Comme $u_5 > u_4$, elle n'est pas décroissante.

Conclusion. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas monotone : elle décroît du rang 0 au rang 3, puis croît à partir du rang 3.

Exercice 5

La production d'une coopérative laitière

Un exemple fictif : une coopérative produit $1\,250$ litres de lait par jour en 2024. Chaque année, cette production journalière augmente de 85 litres. On note u_n la production journalière, en litres, de l'année $2024 + n$.

1.

Donner u_0 et justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

INDICE

Outil : une quantité à laquelle on ajoute chaque année le même nombre.

CORRIGÉ

Premier terme. L'année 2024 correspond à $n = 0$, donc $u_0 = 1\,250$.

Relation entre deux termes. D'une année à la suivante, la production journalière gagne 85 litres. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 85.$$

Conclusion. $u_0 = 1\,250$, et (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 85$.

2.

Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer la production journalière de 2032.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_0 ; l'année 2024 correspond à $n = 0$.

CORRIGÉ

Terme général. La suite est arithmétique, de premier terme $u_0 = 1\,250$ et de raison 85. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1\,250 + 85n.$$

Année 2032. Elle correspond à $n = 2032 - 2024 = 8$:

$$\begin{aligned} u_8 &= 1\,250 + 85 \times 8 \\ &= 1\,250 + 680 = 1\,930. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,250 + 85n$. En 2032, la production journalière est de $1\,930$ litres.

3.

À partir de quelle année la production journalière atteindra-t-elle $2\,000$ litres ?

INDICE

Outil : résous $1\,250 + 85n \geq 2\,000$, avec n entier.

CORRIGÉ

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 2\,000$:

$$\begin{aligned} 1\,250 + 85n &\geq 2\,000 \\ 85n &\geq 750 \\ n &\geq \frac{750}{85}. \end{aligned}$$

Or $\dfrac{750}{85} \approx 8{,}82$: le plus petit entier qui convient est $n = 9$.

Contrôle. $u_8 = 1\,930 < 2\,000$ et $u_9 = 2\,015 \geq 2\,000$.

Conclusion. La production journalière atteint $2\,000$ litres à partir de l'année $2024 + 9$, soit 2033.

4.

Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

INDICE

Outil : le sens de variation d'une suite arithmétique dépend du signe de sa raison.

CORRIGÉ

Le sens de variation d'une suite arithmétique se lit sur le signe de sa raison. Ici $r = 85 > 0$.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement croissante : la production journalière augmente chaque année.

Exercice 6

Compter les termes, puis additionner

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 7 - 3n$.

1.

Montrer que (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : calcule $v_{n+1} - v_n$ et vérifie que le résultat ne dépend pas de n.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 7 - 3(n+1) \\ &\quad - (7 - 3n) \\ &= 7 - 3n - 3 \\ &\quad - 7 + 3n \\ &= -3. \end{aligned}$$

Ce nombre ne dépend pas de n : pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n - 3$.

Conclusion. La suite (v_n) est arithmétique, de raison -3 et de premier terme $v_0 = 7$.

2.

Combien la somme $S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{20}$ compte-t-elle de termes ? Calculer v_4 et v_{20}.

INDICE

Outil : de v_p à v_n, on compte $n - p + 1$ termes.

CORRIGÉ

Nombre de termes. Les rangs vont de 4 à 20 : la somme compte $20 - 4 + 1 = 17$ termes.

Termes extrêmes. $v_4 = 7 - 3 \times 4 = 7 - 12 = -5$ et $v_{20} = 7 - 3 \times 20 = 7 - 60 = -53$.

Conclusion. La somme S compte 17 termes ; $v_4 = -5$ et $v_{20} = -53$.

3.

Calculer S.

INDICE

Outil : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, avec les résultats de la question 2.

CORRIGÉ

La suite (v_n) est arithmétique. On applique la somme de termes consécutifs d'une telle suite, avec 17 termes, le premier v_4 et le dernier v_{20} :

$$\begin{aligned} S &= 17 \times \frac{v_4 + v_{20}}{2} \\ &= 17 \times \frac{-5 + (-53)}{2} \\ &= 17 \times (-29) = -493. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = -493$.

4.

Calculer $T = 1 + 2 + \cdots + 60$.

INDICE

Outil : la somme des entiers de 1 à n, avec $n = 60$.

CORRIGÉ

T est la somme des entiers de 1 à n pour $n = 60$, qui vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$:

$$T = \frac{60 \times 61}{2} = 1\,830.$$

Conclusion. $T = 1\,830$.

Exercice 7

Une suite géométrique cachée dans une fraction

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

1.

Calculer w_0, w_1 et w_2.

INDICE

Outil : remplace n par chaque rang ; $2^0 = 1$.

CORRIGÉ

On remplace n par 0, 1, puis 2 :

- $w_0 = \dfrac{3^1}{2^0} = \dfrac{3}{1} = 3$;
- $w_1 = \dfrac{3^2}{2^1} = \dfrac{9}{2}$;
- $w_2 = \dfrac{3^3}{2^2} = \dfrac{27}{4}$.

Conclusion. $w_0 = 3$, $w_1 = \dfrac{9}{2}$ et $w_2 = \dfrac{27}{4}$.

2.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{3}{2}\, w_n$. Conclure.

INDICE

Outil : écris $3^{n+2} = 3 \times 3^{n+1}$ et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel. On écrit $3^{n+2} = 3 \times 3^{n+1}$ et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3 \times 3^{n+1}}{2 \times 2^n} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{3^{n+1}}{2^n} \\ &= \frac{3}{2}\, w_n. \end{aligned}$$

Le coefficient $\dfrac{3}{2}$ ne dépend pas de n.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{3}{2}\, w_n$: la suite (w_n) est géométrique, de raison $\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 3$.

3.

Écrire w_n à l'aide du premier terme et de la raison, puis calculer w_4.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique de premier terme w_0.

CORRIGÉ

Terme général. Pour une suite géométrique de premier terme $w_0 = 3$ et de raison $\dfrac{3}{2}$, on a, pour tout entier naturel n :

$$w_n = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Calcul de w_4.

$$w_4 = 3 \times \frac{81}{16} = \frac{243}{16}.$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $w_n = 3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, et $w_4 = \dfrac{243}{16}$.

4.

Donner le sens de variation de (w_n).

INDICE

Outil : vérifie les signes du premier terme et de la raison, puis compare la raison à 1.

CORRIGÉ

Deux conditions sont réunies : le premier terme $w_0 = 3$ est strictement positif, et la raison vérifie $\dfrac{3}{2} > 1$. Une suite géométrique dans ce cas est strictement croissante.

Conclusion. La suite (w_n) est strictement croissante.

Exercice 8

Une suite qui commence au rang 1

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique, de premier terme $u_1 = 6$ et de raison $q = 2$.

1.

Exprimer u_n en fonction de n, pour $n \geq 1$, puis calculer u_7.

INDICE

Outil : le terme général $u_n = u_p \times q^{n-p}$, avec $p = 1$.

CORRIGÉ

Terme général. Pour une suite géométrique, $u_n = u_p \times q^{n-p}$. Ici $p = 1$, $u_1 = 6$ et $q = 2$; pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = 6 \times 2^{n-1}.$$

Calcul de u_7.

$$u_7 = 6 \times 2^6 = 6 \times 64 = 384.$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 6 \times 2^{n-1}$, et $u_7 = 384$.

2.

Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ à l'aide d'une formule.

INDICE

Outil : compte d'abord les termes, puis applique la somme géométrique avec le premier terme u_1.

CORRIGÉ

Nombre de termes. De u_1 à u_7, il y a $7 - 1 + 1 = 7$ termes.

Formule. La raison vaut 2, et $2 \neq 1$. On applique la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, avec le premier terme $u_1 = 6$:

$$\begin{aligned} S &= 6 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} \\ &= 6 \times \frac{-127}{-1} = 762. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = 762$.

3.

Vérifier le résultat en additionnant les sept termes.

INDICE

Outil : chaque terme est le double du précédent.

CORRIGÉ

Chaque terme est le double du précédent : les sept termes sont 6, 12, 24, 48, 96, 192 et 384. On les additionne :

$$\begin{aligned} &6 + 12 + 24 + 48 \\ &\quad + 96 + 192 + 384 \\ &= 762. \end{aligned}$$

Conclusion. L'addition directe redonne $S = 762$, le résultat de la question 2.

Exercice 9

Coefficients multiplicateurs et capital placé

Les montants de cet exercice sont fictifs.

1.

Donner le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 3 pour cent, puis à une baisse de 15 pour cent.

INDICE

Outil : écris d'abord chaque taux en décimal ; une hausse au taux t multiplie par $1+t$, une baisse par $1-t$.

CORRIGÉ

Une hausse au taux t multiplie une quantité par $1+t$; une baisse au taux t la multiplie par $1-t$.

- Hausse de 3 pour cent : $t = 0{,}03$, coefficient $1+t = 1{,}03$;
- baisse de 15 pour cent : $t = 0{,}15$, coefficient $1-t = 0{,}85$.

Conclusion. Le coefficient multiplicateur vaut $1{,}03$ pour la hausse et $0{,}85$ pour la baisse.

2.

Karim place $12\,000$ dirhams (DH) à intérêts simples, au taux annuel $t = 0{,}03$. Calculer son capital au bout de 5 ans.

INDICE

Outil : à intérêts simples, $C_n = C_0\,(1 + n\,t)$.

CORRIGÉ

À intérêts simples, le capital au bout de n années est $C_n = C_0\,(1 + n\,t)$. Ici $C_0 = 12\,000$, $t = 0{,}03$ et $n = 5$:

$$\begin{aligned} C_5 &= 12\,000 \\ &\quad \times (1 + 5 \times 0{,}03) \\ &= 12\,000 \times 1{,}15 \\ &= 13\,800. \end{aligned}$$

Conclusion. Au bout de 5 ans, Karim dispose de $13\,800$ DH.

3.

Nadia place la même somme au même taux, mais à intérêts composés. Calculer son capital au bout de 5 ans, arrondi au centime, et le comparer à celui de Karim.

INDICE

Outil : à intérêts composés, $C_n = C_0\,(1+t)^n$; utilise ta calculatrice pour $1{,}03^5$.

CORRIGÉ

Capital de Nadia. À intérêts composés, $C_n = C_0\,(1+t)^n$:

$$\begin{aligned} C_5 &= 12\,000 \times 1{,}03^5 \\ &\approx 12\,000 \times 1{,}159\,274 \\ &\approx 13\,911{,}29. \end{aligned}$$

Comparaison. $13\,911{,}29 - 13\,800 = 111{,}29$.

Conclusion. Au bout de 5 ans, Nadia dispose d'environ $13\,911{,}29$ DH, soit environ $111{,}29$ DH de plus que Karim : ses intérêts produisent à leur tour des intérêts.

Exercice 10

Vérifier une suite auxiliaire donnée

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}4\,u_n + 6$. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 10$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : applique la relation avec $u_0 = 5$, puis avec u_1.

CORRIGÉ

Avec $n = 0$: $u_1 = 0{,}4 \times 5 + 6 = 8$.

Avec $n = 1$: $u_2 = 0{,}4 \times 8 + 6 = 9{,}2$.

Conclusion. $u_1 = 8$ et $u_2 = 9{,}2$.

2.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}4\,v_n$. Préciser la nature de (v_n) et son premier terme.

INDICE

Outil : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 10$, puis remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel. On part de la définition de v_{n+1}, puis on remplace u_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0{,}4\,u_n + 6 - 10 \\ &= 0{,}4\,u_n - 4 \\ &= 0{,}4\,(u_n - 10) \\ &= 0{,}4\,v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}4\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}4$, de premier terme $v_0 = 5 - 10 = -5$.

3.

En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n. Contrôler avec la question 1.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, puis la définition de v_n, à lire dans l'autre sens.

CORRIGÉ

Terme général de (v_n). La suite est géométrique, de premier terme -5 et de raison $0{,}4$. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = -5 \times 0{,}4^n.$$

Retour à (u_n). De $v_n = u_n - 10$, on tire $u_n = v_n + 10$, soit :

$$u_n = 10 - 5 \times 0{,}4^n.$$

Contrôle. $10 - 5 \times 0{,}4 = 8 = u_1$ et $10 - 5 \times 0{,}16 = 9{,}2 = u_2$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $v_n = -5 \times 0{,}4^n$ et $u_n = 10 - 5 \times 0{,}4^n$.