BURHAN

Suites numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/suites-numeriques/cours

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Qu'est-ce qu'une suite ?

Une tirelire, mois après mois

Voici un exemple fictif. Salma garde 300 dirhams dans une tirelire. Chaque mois, elle y ajoute 50 dirhams.

Note $u_0 = 300$ la somme de départ, u_1 la somme au bout d'un mois, u_2 la somme au bout de deux mois.

Tu obtiens $u_1 = 350$, puis $u_2 = 400$.

Devine : Une prédiction

Combien Salma aura-t-elle dans sa tirelire au bout de 12 mois ?

A. 600 dirhams.

Faux.

Tu as compté les 12 ajouts, mais oublié les 300 dirhams du départ.

B. 950 dirhams.

Faux.

Tu as compté 13 ajouts : au bout de 12 mois, il y en a 12.

C. 900 dirhams.

Juste.

Juste : 300 dirhams au départ, plus 12 ajouts de 50 dirhams.

D. 850 dirhams.

Faux.

Tu as compté 11 ajouts : il en manque un.

Correction

Chaque mois ajoute 50 dirhams. Au bout de 12 mois, Salma a fait 12 ajouts :

$$\begin{aligned} u_{12} &= 300 + 12 \times 50 \\ &= 900. \end{aligned}$$

Au bout de 12 mois, la tirelire contient 900 dirhams.

En clair. Les sommes u_0, u_1, u_2, … forment une liste de nombres **numérotés** : chaque entier n reçoit un nombre u_n.

C'est cela, une suite. Le numéro n s'appelle le **rang**.

Définition et vocabulaire

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** est une fonction qui, à chaque entier naturel n tel que $n \geq n_0$, associe un nombre réel noté u_n.

- La suite se note $(u_n)_{n\geq n_0}$, ou simplement (u_n) lorsque l'indice de départ est clair.
- Le réel u_n est le **terme de rang** n (ou **terme général**) de la suite ; u_{n_0} est son **premier terme**.

Exemple : lire des termes

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par

$$u_n = \frac{n+4}{n+1}.$$

Son premier terme est $u_0 = 4$. Ensuite, $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_2 = 2$ et $u_3 = \frac{7}{4}$.

Une suite peut commencer plus loin. Pour tout entier $n \geq 2$, posons $w_n = \frac{1}{n-1}$: cette suite se note $(w_n)_{n\geq 2}$, et son premier terme est $w_2 = 1$.

Le terme w_1 n'existe pas, car on diviserait par 0.

Deux façons de définir une suite

La tirelire se décrit de deux façons.

Par une formule. Pour tout entier naturel n, le terme de rang n se calcule directement :

$$u_n = 300 + 50\,n.$$

Par récurrence. On donne le départ $u_0 = 300$, puis une règle valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 50.$$

Cette règle fabrique chaque terme à partir du précédent.

Définition : Suite définie explicitement, suite définie par récurrence

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **définie explicitement** lorsque son terme général est donné directement en fonction de n : $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction définie au moins sur les entiers $n \geq n_0$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **définie par récurrence** (suite **récurrente**) lorsque son premier terme u_{n_0} est donné et qu'une relation permet de calculer chaque terme à partir du précédent : $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \geq n_0$, où g est une fonction définie en chacun des termes u_n.

Vérifie : Reconnaître le mode de définition

Laquelle de ces suites est définie **par récurrence** ?

A. $a_n = 2^n + 1$, pour tout n.

Faux.

Le terme de rang n se calcule directement à partir de n : c'est une formule explicite.

B. $c_n = 5n - 7$, pour tout n.

Faux.

Ici aussi, n suffit pour calculer c_n : la suite est définie explicitement.

C. $d_n = \dfrac{n}{n+2}$, pour tout n.

Faux.

C'est encore une formule en n : aucune règle ne relie un terme au précédent.

D. $h_0 = 4$ et $h_{n+1} = 3\,h_n - 2$.

Juste.

Juste : on donne le premier terme et une règle qui calcule chaque terme à partir du précédent.

Correction

Seule la suite (h_n) est définie par récurrence : on connaît $h_0 = 4$, et la relation $h_{n+1} = 3\,h_n - 2$ donne chaque terme à partir du précédent.

Ainsi $h_1 = 10$ et $h_2 = 28$.

Pour les trois autres suites, le rang n suffit à calculer le terme : elles sont définies explicitement.

Calculer des termes

Méthode : calculer des termes d'une suite

1. **Repère le mode de définition.** Une formule en n, ou bien un premier terme et une règle de passage.
2. **Formule explicite.** Remplace n par le rang demandé. Chaque terme se calcule seul, sans les autres.
3. **Récurrence.** Pars du premier terme et applique la règle autant de fois que nécessaire. Pour u_4, calcule d'abord u_1, u_2 et u_3.
4. **Beaucoup de termes.** Programme la règle à la calculatrice ou au tableur, puis lis les valeurs.

Exemple : Exemple guidé : explicite ou récurrente

Suite explicite. Pour tout entier naturel n, soit $a_n = n^2 - 3n$. On remplace n par le rang voulu : $a_5 = 25 - 15 = 10$ et $a_{10} = 100 - 30 = 70$.

Suite récurrente. Soit $b_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 2\,b_n - 1$. On avance pas à pas :

n	0	1	2	3
b_n	3	5	9	17

Pour obtenir b_3, il a fallu calculer b_1 puis b_2.

Au tableur. Écris 3 dans la cellule A1. Dans A2, écris la formule « =2*A1-1 », puis recopie-la vers le bas.

Chaque cellule calcule le terme suivant à partir de celle du dessus : tu retrouves 5, 9, 17, puis 33.

Une calculatrice fait de même avec son mode « suite ».

Un piège, puis à toi

Attention : le terme suivant

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3n + 2$.

- ✗ « $v_{n+1} = v_n + 1 = 3n + 3$. »
- ✓ $v_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 5$.

Le terme v_{n+1} est le terme de rang $n + 1$: on remplace n par $n + 1$ dans la formule. Ajouter 1 au terme donne un autre nombre.

À toi : Deux suites, deux calculs

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$.

Calcule u_3 et v_3. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Repère d'abord le mode de définition de chaque suite.
Indice 2
Pour (v_n), remplace n par 3. Pour (u_n), calcule u_1 en premier.
Indice 3
Point délicat : u_3 demande u_1 puis u_2 ; on ne peut pas sauter d'étape.

Réponse
La suite (u_n) est récurrente. On part de $u_0 = 1$ et on applique la relation trois fois :

$$u_1 = 1^2 + 1 = 2,$$
$$u_2 = 2^2 + 1 = 5,$$
$$u_3 = 5^2 + 1 = 26.$$

La suite (v_n) est explicite. On remplace n par 3 :

$$v_3 = \frac{2 \times 3 + 1}{3 + 3} = \frac{7}{6}.$$

Conclusion. $u_3 = 26$ et $v_3 = \dfrac{7}{6}$.

Suites majorées, minorées, bornées

Un prix qui monte sans dépasser

Exemple fictif : une boutique lance un produit. Au mois de rang n, son prix en dirhams est

$$p_n = 50 - \frac{20}{n + 1}.$$

Le prix vaut $p_0 = 30$, puis $p_1 = 40$, puis $p_3 = 45$. Il monte, mais de moins en moins vite.

Devine : Une prédiction

Le prix p_n peut-il dépasser 50 dirhams ?

A. Oui, pour un rang n assez grand.

Faux.

Le prix monte, mais on retire toujours à 50 un nombre strictement positif.

B. Oui, dès le rang 20.

Faux.

Au rang 20, $p_{20} = 50 - \dfrac{20}{21}$, qui reste sous 50.

C. Non, jamais : $p_n < 50$ à chaque rang.

Juste.

Juste : on retire à 50 la fraction $\dfrac{20}{n + 1}$, toujours strictement positive.

D. On ne peut pas le savoir sans tout calculer.

Faux.

Un calcul de signe suffit : inutile de calculer tous les termes.

Correction

Pour tout entier naturel n,

$$p_n - 50 = -\frac{20}{n + 1}.$$

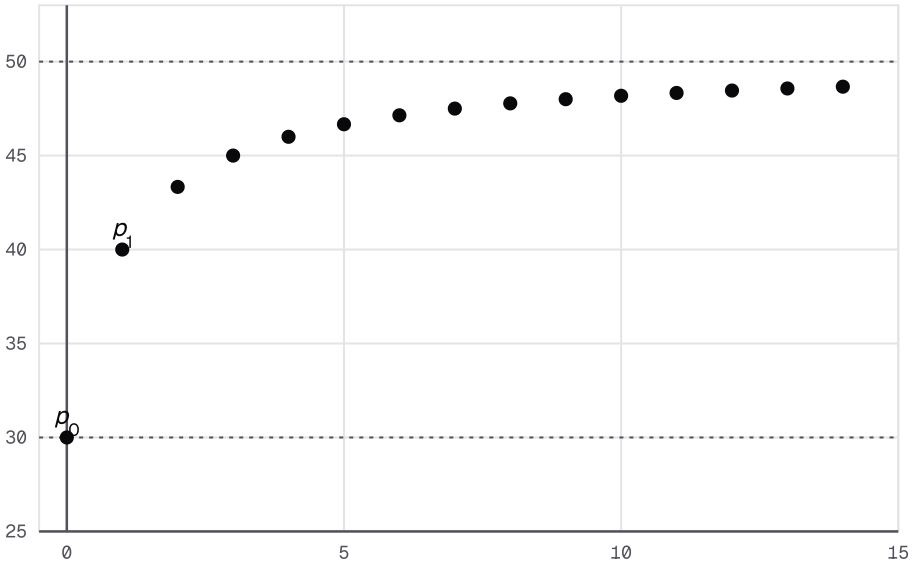
Ce nombre est strictement négatif, car $n + 1 > 0$.

Donc $p_n < 50$ à chaque rang : le prix ne dépasse jamais 50 dirhams.

Plafond et plancher

En clair. Un **majorant** est un plafond que les termes ne dépassent jamais. Un **minorant** est un plancher sous lequel ils ne descendent jamais.

Pour le prix, 50 est un plafond, et 30 un plancher.



Les prix p_n, du rang 0 au rang 14 : tous les points restent entre le plancher 30 et le plafond 50, et se serrent sous le plafond sans l'atteindre.

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$; le réel M est un **majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$; le réel m est un **minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : le prix est borné

Majorée. On vient de voir que $p_n < 50$ pour tout entier naturel n : 50 est un majorant.

Minorée. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} p_n - 30 &= 20 - \frac{20}{n+1} \\ &= \frac{20n}{n+1}. \end{aligned}$$

Ce quotient est positif ou nul, donc $p_n \geq 30$: 30 est un minorant.

Bornée. La suite est majorée et minorée : pour tout entier naturel n, $30 \leq p_n < 50$.

Contre-exemple. La suite (w_n) définie par $w_n = n^2$ est minorée par 0. Elle n'est pas majorée : pour tout réel M, un entier $n > M$ donne $w_n \geq n > M$.

Vérifie : Plafond ou plancher ?

Soit la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7 - 2n$. Que peut-on dire ?

A. Elle est majorée, mais pas minorée.
Juste.
Juste : 7 est un plafond, et aucun plancher ne tient.

B. Elle est bornée.
Faux.
Les termes descendent sous n'importe quel plancher : elle n'est pas minorée.

C. Elle est minorée par 7.
Faux.
C'est l'inverse : $u_n \leq 7$, car on retire $2n \geq 0$.

D. Elle n'est ni majorée ni minorée.
Faux.
Elle est majorée par 7, puisque $2n \geq 0$.

Correction
Majorée. Pour tout entier naturel n, $u_n - 7 = -2n$, et $-2n \leq 0$: la suite est majorée par 7.

Non minorée. Soit m un réel. Dès que $2n > 7 - m$, on a $u_n < m$: aucun réel n'est un minorant.

Par exemple, $u_{10} = -13$ et $u_{100} = -193$.

Démontrer une borne

Méthode : montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée

1. **Fixe le nombre candidat.** Il figure dans la question ; à défaut, les premiers termes le suggèrent.
2. **Formule explicite.** Calcule $u_n - M$ (ou $u_n - m$), réduis au même dénominateur, puis étudie son signe pour tout rang.
3. **Suite récurrente.** Démontre l'inégalité par récurrence : **Initialisation**, **Hérédité**, **Conclusion**.
4. **Conclus** : cite la borne obtenue, et précise à partir de quel rang elle vaut.

Exemple : Exemple guidé : une suite explicite

Soit (a_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $a_n = \dfrac{4n+1}{n+2}$.

Un majorant. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_n - 4 &= \frac{4n+1-4n-8}{n+2} \\ &= \frac{-7}{n+2}. \end{aligned}$$

Ce quotient est strictement négatif, donc $a_n < 4$.

Un minorant. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{2} &= \frac{8n+2-n-2}{2(n+2)} \\ &= \frac{7n}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Ce quotient est positif ou nul, donc $a_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leq a_n < 4$: la suite est bornée.

Une borne par récurrence

Pour une suite récurrente, on n'a pas de formule en n : on ne peut donc pas étudier un signe directement. Mais la borne se transmet d'un terme au suivant. C'est le **raisonnement par récurrence**, vu dans le chapitre Notions de logique.

Rappel. On vérifie la propriété au premier rang : c'est l'initialisation. On montre qu'elle passe d'un rang au suivant : c'est l'hérédité. On conclut qu'elle est vraie à tous les rangs.

Attention aux mots. Une suite récurrente se définit par une relation entre deux termes voisins ; le raisonnement par récurrence, lui, sert à démontrer.

Exemple : Exemple guidé : une borne transmise

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,u_n + 3$. Montrons que $u_n \leq 6$ pour tout entier naturel n.

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \leq 6$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $u_n \leq 6$. On multiplie par $\dfrac{1}{2}$, qui est positif, puis on ajoute 3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,u_n &\leq 3, \\ \frac{1}{2}\,u_n + 3 &\leq 6. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $u_{n+1} \leq 6$: la propriété passe au rang $n+1$.

Conclusion. Par récurrence, $u_n \leq 6$ pour tout entier naturel n : la suite est majorée par 6.

À toi

Vérifie : Le geste de l'hérédité

Dans l'exemple, on suppose $u_n \leq 6$. Quelle inégalité obtient-on en multipliant par $\frac{1}{2}$?

A. $\frac{1}{2}\,u_n \leq 6$
Faux.
Le second membre doit aussi être multiplié par $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}\,u_n \leq 12$
Faux.
On a multiplié 6 par 2 au lieu de le diviser par 2.

C. $\frac{1}{2}\,u_n \geq 3$
Faux.
Multiplier par un nombre strictement positif garde le sens de l'inégalité.

D. $\frac{1}{2}\,u_n \leq 3$
Juste.
Juste : $\frac{1}{2}$ est positif, le sens est gardé, et $\frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Correction
On multiplie les deux membres de $u_n \leq 6$ par $\frac{1}{2}$, qui est strictement positif : le sens de l'inégalité ne change pas. On obtient

$$\frac{1}{2}\,u_n \leq 3.$$

On ajoute ensuite 3 aux deux membres : $u_{n+1} \leq 6$.

À toi : Un encadrement par récurrence

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}8\,v_n + 2$.

Montre que $5 \leq v_n \leq 10$ pour tout entier naturel n. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Raisonne par récurrence, avec l'encadrement entier comme propriété.
Indice 2

Dans l'hérédité, multiplie l'encadrement $5 \leq v_n \leq 10$ par $0{,}8$, puis ajoute 2.

Indice 3

Point délicat : tu obtiens $6 \leq v_{n+1} \leq 10$; explique pourquoi cela donne bien $5 \leq v_{n+1}$.

Réponse

On démontre l'encadrement par récurrence.

Initialisation. $v_0 = 5$, et $5 \leq 5 \leq 10$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $5 \leq v_n \leq 10$. On multiplie par $0{,}8$, qui est positif : le sens des inégalités est conservé.

$$4 \leq 0{,}8\, v_n \leq 8.$$

On ajoute 2 :

$$6 \leq v_{n+1} \leq 10.$$

Comme $5 \leq 6$, on obtient $5 \leq v_{n+1} \leq 10$.

Conclusion. Par récurrence, $5 \leq v_n \leq 10$ pour tout entier naturel n : la suite (v_n) est bornée.

Sens de variation d'une suite

Des clients qui partent, puis reviennent

Exemple fictif : un café compte ses clients du matin. Le jour de rang n, il en reçoit

$$c_n = n^2 - 6n + 20.$$

Tu trouves $c_0 = 20$, $c_1 = 15$, $c_2 = 12$, $c_3 = 11$, $c_4 = 12$ et $c_5 = 15$.

Devine : Une prédiction

Comment évolue la suite (c_n) sur ces six jours ?

A. Elle est croissante.

Faux.

Dès le début, $c_1 = 15$ est plus petit que $c_0 = 20$.

B. Elle est décroissante.

Faux.

Elle remonte ensuite : $c_4 = 12$ dépasse $c_3 = 11$.

C. Elle n'est ni l'un ni l'autre.

Juste.

Juste : elle descend jusqu'au rang 3, puis elle remonte.

D. Elle est constante.

Faux.

Les termes changent d'un jour à l'autre.

Correction

Les termes baissent de c_0 à c_3, puis ils montent de c_3 à c_5.

Sur ces six jours, la suite ne garde donc pas un seul sens de variation.

Croissante, décroissante

En clair. Pour savoir si une suite monte, on compare chaque terme au **suivant**. Le plus simple est de calculer l'écart $u_{n+1} - u_n$.

Positif à chaque rang : la suite monte. Négatif à chaque rang : elle descend.

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$; **strictement croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$; **strictement décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Autrement dit, (u_n) est croissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$, et décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple : le signe de la différence

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n^2 + n$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1)^2 - 3n^2 \\ &\quad + (n+1) - n \\ &= (6n + 3) + 1 \\ &= 6n + 4. \end{aligned}$$

Or $6n + 4 > 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est strictement croissante.

Contrôle : $u_0 = 0$, $u_1 = 4$, $u_2 = 14$.

Le quotient, pour des termes positifs

Avec une puissance, comme $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$, la différence est pénible à calculer. Pour des termes strictement positifs, on compare plutôt le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Pourquoi est-ce vrai ? La différence s'écrit comme un produit, et u_n y apporte un signe connu.

Propriété : Monotonie d'une suite à termes strictement positifs

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**.

- Si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante.
- Si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

Avec des inégalités strictes, la suite est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Démonstration

Étape 1. Soit n un entier tel que $n \geq n_0$. Comme $u_n \neq 0$, on peut écrire

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right).$$

Étape 2. Par hypothèse, $u_n > 0$: la différence $u_{n+1} - u_n$ a donc le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Étape 3. Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$, alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq n_0$: par définition, la suite est croissante. De même, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$, alors $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite est décroissante. Avec $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (ou < 1), la différence est strictement positive (ou strictement négative) : la suite est strictement croissante (ou strictement décroissante).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **mettre u_n en facteur** dans la différence. Pour tout rang n,

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right).$$

Le premier facteur est strictement positif : le signe de la différence est celui du second facteur.

On revient ensuite à la définition d'une suite croissante ou décroissante.

Vérifie : Sans l'hypothèse

Supposons cette fois tous les termes strictement **négatifs**. Que devient la preuve ?

A. La factorisation par u_n devient fausse.

Faux.
Elle reste vraie dès que $u_n \neq 0$: c'est un simple calcul.

B. La différence a le signe contraire de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Juste.

Juste : multiplier par $u_n < 0$ change le signe.

C. Rien ne change, la conclusion reste vraie.

Faux.

Le signe du facteur u_n décide de tout : il a changé.

D. Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'existe plus.

Faux.

Il existe : u_n est négatif, mais pas nul.

Correction

L'égalité $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$ reste vraie.

Mais si $u_n < 0$, multiplier par u_n change le signe : un quotient plus grand que 1 donne alors une différence négative.

L'hypothèse $u_n > 0$ sert exactement à cette étape.

Exemple : une puissance divisée par un entier

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{3^n}{n+1}$. Tous ses termes sont strictement positifs. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} \\ &= \frac{3(n+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

Or $3(n+1) - (n+2) = 2n + 1 > 0$: le numérateur dépasse le dénominateur, qui est positif, donc le quotient est strictement supérieur à 1.

D'après la propriété du quotient, la suite est strictement croissante. Contrôle : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = 3$.

Méthode, piège et à toi

Méthode : étudier la monotonie d'une suite

1. **Calcule la différence** $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, puis simplifie-la.
2. **Étudie son signe** pour tout rang. Positive : la suite est croissante. Négative : elle est décroissante.
3. **Termes strictement positifs ?** Si la suite est faite de produits ou de puissances, compare plutôt $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

4. **Contrôle** ta conclusion sur les deux ou trois premiers termes.

Vérifie : Une différence à calculer

Soit (w_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = n^2 - 8n$. Que vaut $w_{n+1} - w_n$?

A. $2n + 1$

Faux.

Tu as oublié la partie $-8(n+1) + 8n$, qui vaut -8.

B. $2n - 7$

Juste.

Juste : $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, et $-8(n+1) + 8n = -8$.

C. $2n - 9$

Faux.

Erreur de signe : $(n+1)^2 - n^2$ vaut $2n + 1$, pas $2n - 1$.

D. -7

Faux.

Le terme $2n$ venu de $(n+1)^2 - n^2$ a disparu.

Correction

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &\quad - 8(n+1) + 8n \\ &= 2n + 1 - 8 \\ &= 2n - 7. \end{aligned}$$

Cette différence est négative pour $n \leq 3$, positive pour $n \geq 4$.

La suite descend jusqu'au rang 4, puis elle monte : elle n'est pas monotone.

Attention : le quotient et les termes négatifs

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = -5 \times 3^n$. Le quotient vaut $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3$.

- ✗ « Le quotient dépasse 1, donc la suite est croissante. »
- ✓ Les termes sont négatifs : $u_0 = -5$, $u_1 = -15$, $u_2 = -45$. La suite est strictement décroissante.

Le quotient ne sert que pour des termes **strictement positifs**. Sinon, étudie la différence.

À toi : Une fraction qui varie

Étudie la monotonie de la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{n+3}{n+1}$. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Calcule la différence $v_{n+1} - v_n$.
Indice 2
Réduis au même dénominateur $(n+1)(n+2)$, puis développe le numérateur.
Indice 3
Point délicat : le numérateur ne dépend plus de n ; regarde son signe et celui du dénominateur.

Réponse
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{n+4}{n+2}$. On réduit au même dénominateur $(n+1)(n+2)$.

Au numérateur, $(n+4)(n+1) = n^2 + 5n + 4$ et $(n+3)(n+2) = n^2 + 5n + 6$: leur différence vaut -2. Donc

$$\begin{aligned} & v_{n+1} - v_n \\ &= \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} \\ &= \frac{-2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif et le numérateur vaut -2 : la différence est strictement négative.

Conclusion. La suite (v_n) est strictement décroissante. Contrôle : $v_0 = 3$, $v_1 = 2$, $v_2 = \dfrac{5}{3}$.

Suites arithmétiques

Des embauches régulières

Données inventées : une entreprise compte 85 salariés au rang 0. Chaque année, elle embauche 6 personnes, et personne ne part.

Note s_n l'effectif au rang n : $s_0 = 85$, $s_1 = 91$, $s_2 = 97$. On ajoute toujours le même nombre.

Devine : Une prédiction

Quel est l'effectif s_{10} au rang 10 ?

A. 151 salariés.
Faux.
Tu as compté 11 embauches : du rang 0 au rang 10, il y en a 10.

B. 145 salariés.
Juste.
Juste : 10 années d'embauches de 6 personnes, après 85.

C. 139 salariés.

Faux.
Tu as compté 9 embauches : il en manque une.

Correction
Du rang 0 au rang 10, il y a 10 années d'embauche. Donc

$$\begin{aligned} s_{10} &= 85 + 10 \times 6 \\ &= 145. \end{aligned}$$

Au rang 10, l'entreprise compte 145 salariés.

Ajouter toujours le même nombre

Définition : Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite. On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r.

Exemple : reconnaître, ou pas

Une suite arithmétique. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 7 - 4n$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 7 - 4(n+1) \\ &\quad - 7 + 4n \\ &= -4. \end{aligned}$$

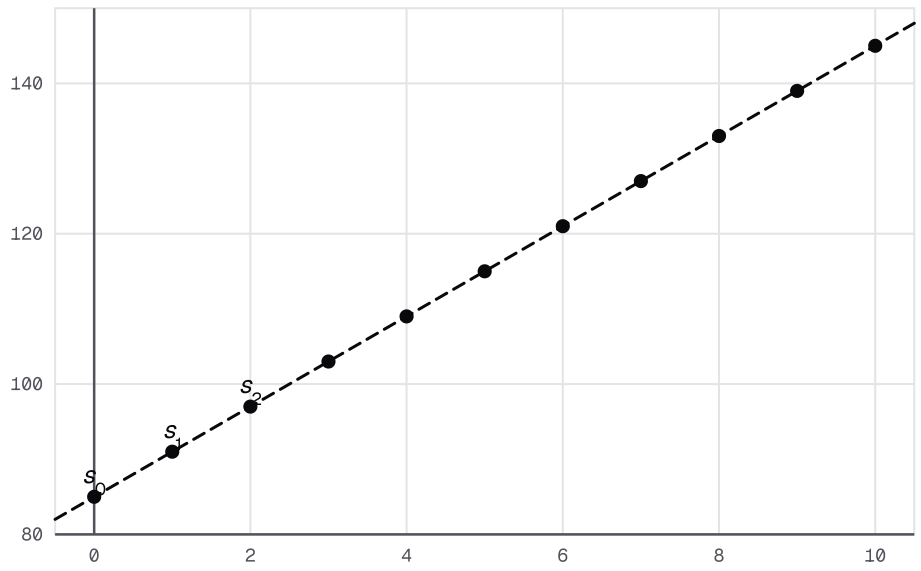
Cette différence ne dépend pas de n : la suite est arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 7$.

Une suite qui ne l'est pas. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n^2$. On a $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = 4$. Les écarts valent 1 puis 3 : ils ne sont pas égaux, la suite n'est pas arithmétique.

Le terme général

Pour s_{10}, tu n'as pas ajouté 6 dix fois à la main : tu as compté les ajouts.

Pourquoi est-ce vrai ? Du rang p au rang n, on fait $n - p$ passages, et chaque passage ajoute r. La récurrence rend ce comptage rigoureux.



$y = 85 + 6x$ ● Point du graphe ● Termes de la suite (s_n)

L'effectif s_n, du rang 0 au rang 10 : à chaque rang, le point monte de 6, et tous les points sont sur une même droite, de 85 au rang 0 à 145 au rang 10.

Propriété : Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$,

$$u_n = u_p + (n - p)\, r.$$

En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 + n\, r$ pour tout entier naturel n.

Démonstration

Étape 1. On fixe un entier $p \geq n_0$ et on démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p + (n - p)\, r$.

Étape 2. Initialisation. Pour $n = p$: $u_p + (p - p)\, r = u_p$. L'égalité est vraie.

Étape 3. Hérédité. Soit $n \geq p$ un entier tel que $u_n = u_p + (n - p)\, r$. Par définition d'une suite arithmétique, $u_{n+1} = u_n + r = u_p + (n - p)\, r + r = u_p + (n + 1 - p)\, r$. L'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Étape 4. Conclusion. D'après le principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier $n \geq p$. Lorsque la suite commence au rang 0 ($n_0 = 0$), le choix $p = 0$ donne $u_n = u_0 + n\, r$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve est une **récurrence** sur n, à partir du rang p.

L'initialisation est immédiate : $(p - p)\, r = 0$.

Dans l'hérédité, on ajoute r à l'égalité du rang n : le coefficient de r passe de $n - p$ à $n + 1 - p$.

> On retient : le coefficient de r compte les passages.

Vérifie : Un départ au rang 4

Une suite arithmétique de raison r est définie à partir du rang 4. Comment s'écrit u_{15} ?

A. $u_4 + 15\,r$

Faux.

Le départ n'est pas au rang 0 : on ne compte que les passages depuis le rang 4.

B. $u_4 + 11\,r$

Juste.

Juste : du rang 4 au rang 15, il y a $15 - 4 = 11$ passages.

C. $u_4 + 12\,r$

Faux.

Tu as compté les termes, pas les passages : il y en a un de moins.

D. $u_4 + 19\,r$

Faux.

On soustrait les rangs, on ne les additionne pas.

Correction

Ici $p = 4$ et $n = 15$: le coefficient de r vaut $n - p = 15 - 4 = 11$. Donc

$$u_{15} = u_4 + 11\,r.$$

Pour une suite qui commence au rang 4, le choix $p = 0$ n'a pas de sens.

Exemple : retrouver la suite à partir de deux termes

Une suite arithmétique (u_n) vérifie $u_5 = 17$ et $u_9 = 29$.

La raison. D'après le terme général, $u_9 = u_5 + 4r$, donc $29 = 17 + 4r$. Ainsi $4r = 12$ et $r = 3$.

Le terme général. $u_0 = u_5 - 5 \times 3 = 2$, donc $u_n = 2 + 3n$ pour tout entier naturel n. Ainsi $u_{20} = 62$.

L'hypothèse compte. La suite définie par $w_n = n^2$ n'est pas arithmétique. Le même calcul avec $w_1 = 1$ et $w_3 = 9$ prédirait $w_2 = 5$. Or $w_2 = 4$.

Monotonie

L'effectif de l'entreprise monte, car on ajoute 6, un nombre positif. Si on retirait 6 chaque année, il baisserait.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour une suite arithmétique, l'écart entre deux termes consécutifs vaut toujours r.

Propriété : Monotonie d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

Démonstration

Étape 1. Par définition d'une suite arithmétique, pour tout rang n, $u_{n+1} - u_n = r$: la différence de deux termes consécutifs ne dépend pas de n.

Étape 2. Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout rang n : par définition, la suite est strictement croissante. Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout rang n : elle est strictement décroissante. Si $r = 0$, alors $u_{n+1} = u_n$ pour tout rang n : elle est constante.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve tient en une remarque : pour tout rang n, $u_{n+1} - u_n = r$, la même valeur à chaque rang.

Le signe de la différence est donc **le signe de** r. On conclut avec la définition d'une suite croissante, décroissante ou constante, sans calculer aucun terme.

Vérifie : Lire le sens de variation

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 12 - 0{,}5\,n$. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

A. Strictement croissante.

Faux.
Le premier terme 12 est positif, mais c'est la raison qui décide.

B. Strictement décroissante.

Juste.
Juste : la suite est arithmétique de raison $-0{,}5$, négative.

C. Constante.

Faux.
Elle serait constante avec une raison nulle ; ici elle vaut $-0{,}5$.

D. Ni croissante ni décroissante.

Faux.
Une suite arithmétique est toujours monotone.

Correction

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 12 - 0{,}5\,(n+1) \\ &\quad - 12 + 0{,}5\,n \\ &= -0{,}5. \end{aligned}$$

La suite est arithmétique de raison $-0{,}5$, qui est négative. D'après la monotonie d'une suite arithmétique, elle est strictement décroissante.

Exemple : la raison, pas les termes

- La suite définie par $u_n = -50 + 2n$ a des termes négatifs au début : $u_0 = -50$. Pourtant sa raison vaut 2, qui est positive : elle est strictement croissante.
- La suite constante égale à 4 est arithmétique de raison 0 : pour tout rang n, $u_{n+1} - u_n = 0$.

Le signe des termes ne dit rien du sens de variation. Seul le signe de r compte.

Méthode, puis à toi

Méthode : montrer qu'une suite est arithmétique

1. **Calcule** $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, puis simplifie.
2. **Conclus.** Si le résultat est un réel r qui ne dépend pas de n, la suite est arithmétique de raison r.
3. **Précise le premier terme** : u_0, ou u_1 si la suite commence au rang 1.
4. **Pour montrer qu'elle ne l'est pas**, il suffit de trois termes consécutifs dont les deux écarts sont différents.

À toi : Un abonnement qui augmente

Exemple fictif : un abonnement coûte 180 dirhams en janvier. Chaque mois, son prix augmente de $7{,}5$ dirhams. Note u_n le prix au mois de rang n, avec u_0 en janvier.

Exprime u_n en fonction de n, calcule le prix en décembre, puis donne le sens de variation. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Reconnais une suite arithmétique : quelle est sa raison ?
Indice 2
Écris le terme général $u_n = u_0 + n\,r$.
Indice 3
Point délicat : décembre est le mois de rang 11, pas 12, puisque janvier a le rang 0.

Réponse

Nature de la suite. Chaque mois, on ajoute $7{,}5$ dirhams : la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 7{,}5$ et de premier terme $u_0 = 180$.

Terme général. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 180 + 7{,}5\,n.$$

Prix en décembre. Décembre a le rang 11 :

$$\begin{aligned} u_{11} &= 180 + 11 \times 7{,}5 \\ &= 262{,}5. \end{aligned}$$

Sens de variation. La raison $7{,}5$ est positive : la suite est strictement croissante.

Conclusion. En décembre, l'abonnement coûte $262{,}5$ dirhams, et son prix augmente chaque mois.

Suites géométriques

Multiplier toujours par le même nombre

Devine : Une prédiction

Exemple fictif : une coopérative vend 500 boîtes de miel la semaine de rang 0. Chaque semaine, ses ventes sont **multipliées** par $1{,}2$: elle en vend donc 600, puis 720.

Combien en vendra-t-elle la semaine de rang 3 ?

A. 820 boîtes.

Faux.

Tu as ajouté 100 comme au début : mais on multiplie, on n'ajoute pas.

B. 800 boîtes.

Faux.

Tu as ajouté trois fois 100, calculé sur les ventes du départ.

C. 864 boîtes.

Juste.

Juste : $720 \times 1{,}2 = 864$.

Correction

On multiplie les ventes de la semaine de rang 2 par $1{,}2$:

$$720 \times 1{,}2 = 864.$$

La coopérative vendra 864 boîtes. L'augmentation grandit chaque semaine : 100, puis 120, puis 144.

Définition : Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = q\,u_n.$$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite. On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q.

Exemple : reconnaître, ou pas

Une suite géométrique. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 5 \times 2^{n+1}$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times 2^{n+2} \\ &= 2 \times 5 \times 2^{n+1} \\ &= 2\,u_n. \end{aligned}$$

La suite est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 10$.

Une suite qui ne l'est pas. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 2^n + 1$. On a $w_0 = 2$, $w_1 = 3$, $w_2 = 5$. Les quotients valent $\dfrac{3}{2}$ puis $\dfrac{5}{3}$: ils sont différents, la suite n'est pas géométrique.

Méthode : montrer qu'une suite est géométrique

1. **Exprime** u_{n+1} en fonction de u_n, à partir de la définition de la suite.
2. **Conclus.** Si $u_{n+1} = q\,u_n$ avec un réel q qui ne dépend pas de n, la suite est géométrique de raison q.
3. **Précise le premier terme** et son rang.
4. **Pour montrer qu'elle ne l'est pas**, il suffit de trois termes consécutifs dont les deux quotients sont différents.

Le terme général

Pour aller du rang 0 au rang 3, la coopérative a multiplié trois fois par $1{,}2$: $500 \times 1{,}2^3 = 864$.

Pourquoi est-ce vrai ? Du rang p au rang n, il y a $n - p$ passages, et chacun multiplie par q. On compte les facteurs q.

Propriété : Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p \geq n_0$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout entier naturel n (avec la convention $q^0 = 1$).

Démonstration

Étape 1. On fixe un entier $p \geq n_0$ et on démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Étape 2. Initialisation. Pour $n = p$: $u_p \times q^0 = u_p$. L'égalité est vraie.

Étape 3. Hérédité. Soit $n \geq p$ un entier tel que $u_n = u_p \times q^{n-p}$. Par définition d'une suite géométrique, $u_{n+1} = q\,u_n = q \times u_p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n+1-p}$. L'égalité est vraie au rang $n+1$.

Étape 4. Conclusion. D'après le principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier $n \geq p$. Lorsque la suite commence au rang 0 ($n_0 = 0$), le choix $p = 0$ donne $u_n = u_0 \times q^n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve suit le même plan que pour une suite arithmétique : une **récurrence** à partir du rang p.

L'initialisation utilise $q^0 = 1$. Dans l'hérédité, on multiplie par q, et l'exposant passe de $n - p$ à $n + 1 - p$.

On retient : l'exposant compte les passages.

Vérifie : Un saut de six rangs

Une suite géométrique de raison q est connue au rang 4. Comment s'écrit u_{10} ?

A. $u_4 \times q^{10}$

Faux.

L'exposant compte les passages depuis le rang 4, pas depuis 0.

B. $u_4 \times q^{14}$

Faux.

On soustrait les rangs, on ne les additionne pas.

C. $u_4 + 6\,q$

Faux.

C'est le calcul d'une suite arithmétique : ici, on multiplie.

D. $u_4 \times q^6$

Juste.

Juste : du rang 4 au rang 10, il y a 6 multiplications par q.

Correction

Ici $p = 4$ et $n = 10$: l'exposant vaut $n - p = 6$. Donc

$$u_{10} = u_4 \times q^6.$$

Six passages, et chacun multiplie par q.

Exemple : retrouver la suite à partir de deux termes

Une suite géométrique (u_n) vérifie $u_2 = 18$ et $u_5 = 486$.

La raison. D'après le terme général, $u_5 = u_2 \times q^3$. Donc

$$q^3 = \frac{486}{18} = 27,$$

et $q = 3$.

Le terme général. $u_2 = u_0 \times 3^2$ donne $u_0 = 2$. Ainsi $u_n = 2 \times 3^n$ pour tout entier naturel n, et $u_6 = 1\,458$.

L'hypothèse compte. La suite définie par $w_n = 2^n + 1$ n'est pas géométrique. Le même calcul, fait avec $w_0 = 2$ et $w_1 = 3$, prédirait

$$w_2 = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4{,}5.$$

Or $w_2 = 5$.

Monotonie

Les ventes de la coopérative montent, car on multiplie par $1{,}2$, plus grand que 1. Multiplier par $0{,}9$ les ferait baisser.

Pourquoi est-ce vrai ? Avec des termes positifs, la différence de deux termes consécutifs a le signe de $q - 1$.

Propriété : Monotonie d'une suite géométrique de premier terme et de raison strictement positifs

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q, avec $q > 0$ et un premier terme $u_{n_0} > 0$.

- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

Démonstration

Étape 1. D'après le terme général d'une suite géométrique, $u_n = u_{n_0} \times q^{n - n_0}$ pour tout entier $n \geq n_0$. Comme $u_{n_0} > 0$ et $q > 0$, tous les termes sont strictement positifs.

Étape 2. Pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n = q\,u_n - u_n = u_n\,(q - 1)$. Comme $u_n > 0$, cette différence a le signe de $q - 1$.

Étape 3. Si $q > 1$, la différence est strictement positive pour tout rang : la suite est strictement croissante. Si $0 < q < 1$, elle est strictement négative : la suite est strictement décroissante. Si $q = 1$, elle est nulle : la suite est constante.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées.

D'abord, le terme général montre que **tous les termes sont strictement positifs**, car $u_{n_0} > 0$ et $q > 0$.

Ensuite, on factorise : pour tout rang n,

$$u_{n+1} - u_n = u_n\,(q - 1).$$

Comme $u_n > 0$, le signe vient de $q - 1$: on compare donc q à 1.

Vérifie : Lire le sens de variation

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 200 \times 0{,}9^n$. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

A. Strictement décroissante.

Juste.

Juste : premier terme positif, et $0 < 0{,}9 < 1$.

B. Constante.

Faux.

Elle serait constante avec une raison égale à 1.

C. Strictement croissante.

Faux.

Le premier terme est grand, mais la raison $0{,}9$ est plus petite que 1.

D. Ni croissante ni décroissante.

Faux.

Avec un premier terme et une raison positifs, la suite est monotone.

Correction

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n$: la suite est géométrique de raison $q = 0{,}9$, avec $u_0 = 200 > 0$ et $0 < q < 1$.

D'après la monotonie d'une suite géométrique, elle est strictement décroissante : 200, 180, 162, …

Exemple : Contre-exemples : les hypothèses comptent

Raison négative. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3 \times (-2)^n$: $3, -6, 12, -24$. Le signe alterne d'un terme au suivant : les termes descendent, remontent, puis redescendent. La suite n'a pas de sens de variation.

Premier terme négatif. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = -4 \times 2^n$: $-4, -8, -16$. La raison 2 dépasse 1, et pourtant la suite est strictement décroissante.

La propriété exige un premier terme **et** une raison strictement positifs.

Un piège, puis à toi

Attention : le rang du premier terme

Une suite géométrique (u_n) commence au rang 1, avec $u_1 = 3$ et $q = 4$.

- ✗ « $u_4 = 3 \times 4^4 = 768$. »
- ✓ $u_4 = u_1 \times 4^{4-1} = 3 \times 4^3 = 192$.

L'exposant compte les passages depuis le **premier terme**. Du rang 1 au rang 4, il y en a 3.

À toi : Des abonnés qui se multiplient

Exemple fictif : la page d'une boutique compte 800 abonnés le premier mois, de rang 1. Chaque mois, ce nombre est multiplié par $1{,}5$. Note v_n le nombre d'abonnés au mois de rang n.

Exprime v_n en fonction de n, calcule v_5, puis donne le sens de variation. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Reconnais une suite géométrique : quels sont sa raison et son premier terme ?
Indice 2
Écris le terme général à partir de v_1, avec l'exposant $n - 1$.
Indice 3
Point délicat : le premier terme est v_1, pas v_0 ; l'exposant de v_5 vaut donc 4.

Réponse
Nature de la suite. Chaque mois, on multiplie par $1{,}5$: la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}5$ et de premier terme $v_1 = 800$.

Terme général. Le premier terme a le rang 1. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = 800 \times 1{,}5^{n-1}.$$

Calcul de v_5.

$$\begin{aligned} v_5 &= 800 \times 1{,}5^4 \\ &= 800 \times 5{,}0625 \\ &= 4\,050. \end{aligned}$$

Sens de variation. Le premier terme est positif et $q > 1$: la suite est strictement croissante.

Conclusion. Au mois de rang 5, la page compte $4\,050$ abonnés, et ce nombre augmente chaque mois.

Somme de termes consécutifs

Compter avant d'additionner

Devine : Une prédiction

Exemple fictif : Inès verse une somme sur son compte chaque mois, du mois numéro 3 au mois numéro 17 inclus. Note u_k le versement du mois k.

Avant d'additionner, il faut savoir **combien** de versements on additionne. Combien la somme $u_3 + u_4 + \cdots + u_{17}$ compte-t-elle de termes ?

A. 14 termes.

Faux.

$17 - 3 = 14$ compte les écarts entre les rangs, pas les termes.

B. 17 termes.

Faux.

La somme ne commence pas au rang 1, mais au rang 3.

C. 16 termes.

Faux.

Il n'y a pas de terme u_2 dans cette somme : un de trop.

D. 15 termes.

Juste.

Juste : $17 - 3 + 1 = 15$.

Correction

Les rangs vont de 3 à 17. Il y en a

$$17 - 3 + 1 = 15.$$

On ajoute 1, car le premier rang compte aussi.

Attention : compter les termes

- ✗ « De u_5 à u_{20}, il y a $20 - 5 = 15$ termes. »
- ✓ De u_5 à u_{20}, il y a $20 - 5 + 1 = 16$ termes.

De u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes. Contrôle sur un cas simple : de u_1 à u_{12}, il y a bien 12 termes.

Somme arithmétique

Exemple fictif : Karim épargne 100 dirhams le premier mois, puis 20 dirhams de plus chaque mois. Le douzième mois, il épargne 320 dirhams.

Associe le premier et le dernier mois : $100 + 320 = 420$. Puis le deuxième et l'avant-dernier : $120 + 300 = 420$.

Pourquoi est-ce vrai ? Ce que l'on gagne d'un côté, on le perd de l'autre.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique, et n, p deux entiers tels que $n \geq p \geq n_0$. La somme des termes consécutifs de u_p à u_n vaut

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Autrement dit : **nombre de termes** multiplié par la demi-somme du **premier** et du **dernier** terme.

En particulier, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

Étape 1. On note $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ et r la raison. La somme compte $n-p+1$ termes. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-p$, le terme général d'une suite arithmétique donne $u_{p+k} = u_p + k\,r$ et $u_{n-k} = u_n - k\,r$, donc $u_{p+k} + u_{n-k} = u_p + u_n$.

Étape 2. On écrit S dans l'ordre croissant des rangs, puis dans l'ordre décroissant, et on additionne terme à terme :

$$2S = (u_p + u_n) + (u_{p+1} + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_p).$$

Étape 3. D'après l'étape 1, chacune des $n-p+1$ parenthèses vaut $u_p + u_n$. Donc $2S = (n-p+1)(u_p + u_n)$, d'où la formule. La suite définie par $u_k = k$ est arithmétique de raison 1 : avec $p = 1$, on obtient $1 + 2 + \cdots + n = n \times \dfrac{1+n}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'astuce : écrire la somme S **deux fois**, une fois à l'endroit, une fois à l'envers, puis additionner terme à terme.

Chaque paire vaut $u_p + u_n$, grâce au terme général. Il y a autant de paires que de termes.

On obtient $2S$, puis on divise par 2.

Vérifie : Les paires, sur un cas neuf

On applique la même idée à $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{10}$. Combien de parenthèses égales à $u_3 + u_{10}$ trouve-t-on dans $2S$?

A. 7

Faux.
$10 - 3 = 7$ compte les écarts entre les rangs : il manque une parenthèse.

B. 8

Juste.
Juste : une parenthèse par terme, et $10 - 3 + 1 = 8$.

C. 4

Faux.
On n'a pas regroupé les termes deux par deux dans S, mais additionné deux copies de S.

D. 10

Faux.
Ce serait vrai seulement si la somme commençait au rang 1.

Correction
On additionne S écrite à l'endroit et S écrite à l'envers. On obtient une parenthèse par terme, soit $10 - 3 + 1 = 8$ parenthèses, chacune égale à $u_3 + u_{10}$. Donc

$$\begin{aligned} 2S &= 8\,(u_3 + u_{10}), \\ S &= 4\,(u_3 + u_{10}). \end{aligned}$$

Exemple **: deux sommes, et un contre-exemple**

Les entiers de 1 à 50.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 50 &= \frac{50 \times 51}{2} \\ &= 1\,275. \end{aligned}$$

L'épargne de Karim. La somme compte 12 termes, de 100 à 320. Le total vaut $12 \times \dfrac{100 + 320}{2} = 2\,520$ dirhams.

L'hypothèse compte. La somme $1 + 4 + 9 + 16$ vaut 30. Ses termes ne forment pas une suite arithmétique : la formule donnerait $4 \times \dfrac{1 + 16}{2} = 34$, ce qui est faux.

Somme géométrique

Calcule $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$, puis double-la : $2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.

Dans $2S - S$, presque tout se compense : $2S - S = 32 - 1$. Donc $S = 31$.

Pourquoi est-ce vrai ? Multiplier par la raison décale tous les termes d'un rang.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q, et n, p deux entiers tels que $n \geq p \geq n_0$.

- Si $q \neq 1$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{\,n-p+1}}{1-q}.$$

  Autrement dit : **premier terme** multiplié par $\dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$. En particulier, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{\,n+1}}{1-q}$.

- Si $q = 1$: $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1)\, u_p$.

Démonstration

Étape 1. On note $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$; elle compte $n - p + 1$ termes. Par définition d'une suite géométrique, $u_{k+1} = q\, u_k$ pour tout rang k, donc

$$q\, S = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{n+1}.$$

Étape 2. Dans la différence $S - q\, S$, les termes de u_{p+1} à u_n se compensent : $S - q\, S = u_p - u_{n+1}$. D'après le terme général d'une suite géométrique, $u_{n+1} = u_p \times q^{\,n+1-p}$, donc $(1-q)\, S = u_p \left(1 - q^{\,n-p+1}\right)$.

Étape 3. Si $q \neq 1$, on divise par $1 - q$, qui n'est pas nul. Si $q = 1$, tous les termes sont égaux à u_p, et la somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$. Avec la suite $u_k = q^k$, $p = 0$, on obtient la formule particulière.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **multiplier la somme par** q. La somme $q\, S$ contient les mêmes termes que S, décalés d'un rang.

Dans $S - q\, S$, il ne reste que le premier terme de S et le dernier terme de $q\, S$.

Il faut ensuite diviser par $1 - q$: d'où la condition $q \neq 1$.

Vérifie : Le décalage, sur un cas neuf

Soit $S = 5 + 10 + 20 + 40$, de raison $q = 2$. Que vaut $S - 2S$?

A. 0

Faux.
Les termes ne se compensent pas tous : deux restent.

B. 75

Faux.
C'est l'opposé : 5 vient de S, avec le signe plus, et 80 de $2S$, avec le signe moins.

C. -35

Faux.
Le terme 40 figure dans S et dans $2S$: il se compense. Le dernier terme de $2S$ est 80.

D. -75

Juste.
Juste : il reste $5 - 80$.

Correction
On a $2S = 10 + 20 + 40 + 80$. Dans $S - 2S$, les termes 10, 20 et 40 se compensent. Il reste

$$S - 2S = 5 - 80 = -75,$$

donc $S = 75$. Contrôle : $5 + 10 + 20 + 40 = 75$.

Exemple : une somme géométrique, et le cas q = 1

Une somme géométrique. Dans $3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \times 2^9$, le premier terme est 3, la raison 2, et il y a 10 termes. La somme vaut

$$\begin{aligned} 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} &= 3 \times 1\,023 \\ &= 3\,069. \end{aligned}$$

L'hypothèse compte. Avec $q = 1$, la formule divise par $1 - q = 0$. Il faut alors compter : la somme $5 + 5 + \cdots + 5$, avec 8 termes, vaut $8 \times 5 = 40$.

Méthode, puis à toi

Méthode : calculer une somme de termes consécutifs

1. **Identifie la suite** : arithmétique ou géométrique, son premier terme u_p dans la somme, et sa raison.
2. **Compte les termes** : de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.
3. **Arithmétique** : multiplie le nombre de termes par $\dfrac{u_p + u_n}{2}$.
4. **Géométrique**, avec $q \neq 1$: calcule $u_p \times \dfrac{1 - q^N}{1 - q}$, où N est le nombre de termes.

À toi : Deux sommes

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 4n + 1$.

Calcule $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{24}$. Calcule ensuite $T = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \times 3^7$. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Pour chaque somme, reconnais la suite, puis compte les termes.
Indice 2
Pour S, calcule u_5 et u_{24}. Pour T, repère le premier terme et la raison.
Indice 3
Point délicat : T va de 2×3^0 à 2×3^7 ; elle compte donc 8 termes, pas 7.

Réponse
Somme S. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4$: la suite (u_n) est arithmétique de raison 4. De u_5 à u_{24}, il y a $24 - 5 + 1 = 20$ termes, avec $u_5 = 21$ et $u_{24} = 97$. Donc

$$\begin{aligned} S &= 20 \times \frac{21 + 97}{2} \\ &= 1\,180. \end{aligned}$$

Somme T. C'est une somme géométrique de premier terme 2 et de raison 3. Elle va de 2×3^0 à 2×3^7 : elle compte 8 termes. Donc

$$\begin{aligned} T &= 2 \times \frac{1 - 3^8}{1 - 3} \\ &= 2 \times \frac{-6\,560}{-2} \\ &= 6\,560. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = 1\,180$ et $T = 6\,560$.

Suites et économie

Deux placements, deux sortes d'intérêts

Devine : Une prédiction

Exemple fictif : tu places $10\,000$ dirhams pendant 20 ans.

- Le placement A rapporte 5 pour cent par an, toujours calculés sur les $10\,000$ dirhams du départ.
- Le placement B rapporte 4 pour cent par an, calculés sur le capital de l'année.

Lequel donne le plus gros capital au bout de 20 ans ?

A. Le placement A.
Faux.
A gagne au début, mais B rapporte des intérêts sur ses intérêts : à 20 ans, il passe devant.

B. Le placement B.
Juste.
Juste : avec B, les intérêts produisent à leur tour des intérêts.

C. Ils donnent le même capital.

Faux.

Les deux capitaux ne grandissent pas de la même façon : l'un ajoute, l'autre multiplie.

Correction

Placement A. On gagne 500 dirhams chaque année. Au bout de 20 ans :

$$10\,000 + 20 \times 500 = 20\,000.$$

Placement B. On multiplie chaque année par $1{,}04$. Au bout de 20 ans :

$$10\,000 \times 1{,}04^{20}$$
$$\approx 21\,911{,}23.$$

Conclusion. Au bout de 20 ans, le placement B l'emporte : environ $21\,911{,}23$ dirhams contre $20\,000$ dirhams.

Définition : Intérêts simples, intérêts composés

Un capital C_0 (en dirhams) est placé au **taux annuel** t, où t est un réel strictement positif : un taux de 4 pour cent s'écrit $t = 0{,}04$. On note C_n le capital disponible au bout de n années.

- **Intérêts simples** : chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital **initial** C_0 ; il vaut $C_0\,t$ et s'ajoute au capital. Pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = C_n + C_0\,t$.
- **Intérêts composés** : chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital **disponible** C_n ; il vaut $C_n\,t$ et s'ajoute au capital, puis produit à son tour des intérêts. Pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = C_n + C_n\,t = (1+t)\,C_n$.

Exemple : les premières années

Les deux placements fictifs, au départ de $C_0 = 10\,000$ dirhams : A à intérêts simples au taux $t = 0{,}05$, B à intérêts composés au taux $t = 0{,}04$.

Année	A	B
0	$10\,000$	$10\,000$
1	$10\,500$	$10\,400$
2	$11\,000$	$10\,816$
3	$11\,500$	$11\,248{,}64$

Avec A, l'intérêt vaut toujours 500 dirhams. Avec B, il vaut 400, puis 416, puis $432{,}64$ dirhams.

Le capital au bout de n années

Le tableau suggère deux sortes de suites : A ajoute chaque année la même somme, B multiplie chaque année par le même nombre.

Pourquoi est-ce vrai ? Il suffit de relire les deux relations de récurrence de la définition.

Propriété : Capital à intérêts simples, capital à intérêts composés

Avec les notations de la définition des intérêts simples et composés, pour tout entier naturel n :

- à **intérêts simples**, la suite (C_n) est arithmétique de raison $C_0\,t$, et $C_n = C_0\,(1 + n\,t)$;
- à **intérêts composés**, la suite (C_n) est géométrique de raison $1 + t$, et $C_n = C_0\,(1 + t)^n$.

Démonstration

Étape 1. Intérêts simples. Par définition, $C_{n+1} = C_n + C_0\,t$ pour tout entier naturel n, et $C_0\,t$ ne dépend pas de n : la suite (C_n) est arithmétique de raison $C_0\,t$. D'après le terme général d'une suite arithmétique, $C_n = C_0 + n\,C_0\,t = C_0\,(1 + n\,t)$.

Étape 2. Intérêts composés. Par définition, $C_{n+1} = (1 + t)\,C_n$ pour tout entier naturel n, et $1 + t$ ne dépend pas de n : la suite (C_n) est géométrique de raison $1 + t$. D'après le terme général d'une suite géométrique, $C_n = C_0\,(1 + t)^n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **reconnaît** deux suites déjà connues.

À intérêts simples, on ajoute $C_0\,t$, qui ne dépend pas de n : la suite est arithmétique. À intérêts composés, on multiplie par $1 + t$: la suite est géométrique.

Le terme général de chaque suite donne ensuite C_n. Rien de nouveau : on réutilise les sections précédentes.

Vérifie : Le capital du placement B

Pour le placement B, quelle formule donne le capital C_n au bout de n années ?

A. $C_n = 10\,000\,(1 + 0{,}04\,n)$

Faux.

C'est la formule des intérêts simples : B est à intérêts composés.

B. $C_n = 10\,000 \times 1{,}04^n$

Juste.

Juste : suite géométrique de raison $1{,}04$.

C. $C_n = 10\,000 \times 1{,}4^n$

Faux.

Un taux de 4 pour cent donne le coefficient $1{,}04$, pas $1{,}4$.

D. $C_n = 10\,000 + 1{,}04^n$

Faux.

Le capital initial multiplie la puissance ; il ne s'y ajoute pas.

Correction

Le placement B est à intérêts composés, au taux $t = 0{,}04$. D'après le capital à intérêts composés, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} C_n &= C_0\,(1+t)^n \\ &= 10\,000 \times 1{,}04^n. \end{aligned}$$

Exemple : la durée change le gagnant

Au bout de 10 ans. Le placement A donne $10\,000\,(1 + 10 \times 0{,}05)$, soit $10\,000 \times 1{,}5 = 15\,000$ dirhams. Le placement B donne $10\,000 \times 1{,}04^{10} \approx 14\,802{,}44$ dirhams. A est devant.

Au bout de 20 ans. A donne $20\,000$ dirhams, et B environ $21\,911{,}23$ dirhams. B est devant.

L'hypothèse compte. Si l'on retire $1\,000$ dirhams du placement B au bout d'un an, on ne multiplie plus seulement par $1 + t$: la suite des capitaux n'est plus géométrique, et la formule $C_n = C_0\,(1+t)^n$ ne s'applique plus.

Comparer deux placements exige de fixer la durée.

Pourcentage et coefficient multiplicateur

Exemple fictif : un article coûte 250 dirhams, et son prix augmente de 8 pour cent.

La hausse vaut $250 \times 0{,}08 = 20$ dirhams : le nouveau prix est 270 dirhams. Or $250 \times 1{,}08 = 270$ aussi.

Pourquoi est-ce vrai ? Ajouter 8 pour cent d'une quantité, c'est ajouter $0{,}08$ fois cette quantité.

Propriété : Évolution en pourcentage et coefficient multiplicateur

Soit t un **taux** écrit en décimal, $t > 0$: une évolution de 4 pour cent correspond à $t = 0{,}04$.

- **Augmenter** une quantité au taux t revient à la **multiplier** par $1 + t$.
- **Diminuer** une quantité au taux t (avec $t < 1$) revient à la **multiplier** par $1 - t$.

Le nombre $1 + t$ (ou $1 - t$) est le **coefficient multiplicateur** de l'évolution : une hausse de 4 pour cent a pour coefficient $1{,}04$, une baisse de 4 pour cent a pour coefficient $0{,}96$. Si une quantité u_n évolue chaque année au **même** taux, la suite (u_n) est géométrique de raison ce coefficient : en cas de hausse annuelle au taux t, $u_n = u_0\,(1+t)^n$.

Démonstration

Étape 1. Une hausse au taux t d'une quantité Q lui ajoute $t\,Q$; la nouvelle valeur est $Q + t\,Q = (1 + t)\,Q$. Une baisse au taux t donne de même $Q - t\,Q = (1 - t)\,Q$.

Étape 2. Si chaque année $u_{n+1} = (1 + t)\,u_n$, avec le même t, la suite (u_n) est géométrique de raison $1 + t$ par définition, et le terme général d'une suite géométrique donne $u_n = u_0\,(1 + t)^n$. Le cas d'une baisse est identique, avec la raison $1 - t$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **factorise** :

$$Q + t\,Q = (1 + t)\,Q.$$

Une évolution en pourcentage est donc une multiplication. Si le même taux revient à chaque période, on multiplie toujours par le même coefficient : c'est une suite géométrique.

Le taux t s'écrit toujours en décimal : 8 pour cent, c'est $t = 0{,}08$.

Vérifie : Une baisse

Un prix baisse de 15 pour cent. Par quel coefficient le multiplie-t-on ?

A. Par $1{,}15$.
Faux.
Ce coefficient correspond à une hausse de 15 pour cent.

B. Par $0{,}15$.
Faux.
Multiplier par $0{,}15$ ne garde que 15 pour cent du prix.

C. Par $0{,}85$.
Juste.
Juste : $t = 0{,}15$ et $1 - t = 0{,}85$.

D. Par $-0{,}15$.
Faux.
Un prix multiplié par un nombre négatif deviendrait négatif.

Correction
Le taux s'écrit $t = 0{,}15$. Une baisse au taux t revient à multiplier par $1 - t = 0{,}85$.

Par exemple, un prix de 200 dirhams devient $200 \times 0{,}85 = 170$ dirhams.

Exemple : une population qui baisse

Une baisse régulière. Données inventées : une ville compte $52\,000$ habitants au rang 0, et sa population baisse de $1{,}5$ pour cent par an. Le taux vaut $t = 0{,}015$ et le coefficient $1 - t = 0{,}985$. Pour tout entier naturel n,

$$P_n = 52\,000 \times 0{,}985^n.$$

Au rang 3, $P_3 \approx 49\,694{,}92$: environ $49\,695$ habitants.

L'hypothèse compte. Une hausse de 2 pour cent, puis de 5 pour cent, donne les coefficients $1{,}02$ puis $1{,}05$. Ils sont différents : la suite n'est pas géométrique.

Modéliser, éviter le piège, à toi

Méthode : modéliser une situation économique par une suite

1. **Nomme la suite.** u_n est la quantité au bout de n périodes : capital, prix ou population. Précise u_0.
2. **Repère le type d'évolution.** On ajoute la même quantité : suite arithmétique. On multiplie par le même coefficient : suite géométrique.
3. **Traduis le pourcentage.** Écris le taux en décimal : 8 pour cent donne $t = 0{,}08$. Hausse : coefficient $1 + t = 1{,}08$. Baisse : coefficient $1 - t$.
4. **Écris le terme général**, puis réponds avec l'unité et un arrondi adapté.

Attention : les pourcentages ne s'additionnent pas

Un prix augmente de 20 pour cent, puis baisse de 20 pour cent.

- ✗ « Il revient à sa valeur de départ. »
- ✓ Les coefficients se multiplient : $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$. Le prix baisse de 4 pour cent au total.

Pour enchaîner deux évolutions, on multiplie les coefficients. On n'additionne jamais les pourcentages.

À toi : Deux façons d'augmenter un prix

Exemple fictif : un kilogramme d'épices coûte 40 dirhams au rang 0.

- Hypothèse 1 : son prix augmente de 5 pour cent par an.
- Hypothèse 2 : il augmente de 2 dirhams par an.

Compare les prix au rang 4. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1

Pour chaque hypothèse, dis si la suite des prix est arithmétique ou géométrique.

Indice 2

Hypothèse 1 : coefficient $1{,}05$; hypothèse 2 : raison 2. Écris les deux termes généraux.

Indice 3

Point délicat : arrondis le résultat au centime, et seulement à la fin du calcul.

Réponse

Hypothèse 1. On multiplie le prix par $1{,}05$ chaque année : la suite des prix est géométrique, et $p_n = 40 \times 1{,}05^n$ pour tout entier naturel n. Au rang 4,

$$p_4 = 40 \times 1{,}05^4 \approx 48{,}62.$$

Hypothèse 2. On ajoute 2 dirhams chaque année : la suite des prix est arithmétique, et $a_n = 40 + 2n$ pour tout entier naturel n. Au rang 4, $a_4 = 48$ dirhams.

Conclusion. Au rang 4, l'hypothèse 1 donne un prix un peu plus élevé : environ $48{,}62$ dirhams contre 48 dirhams.

Suites récurrentes et suite auxiliaire

Des clients qui partent et qui arrivent

Devine : Une prédiction

Exemple fictif : une salle de sport compte $1\,000$ clients au rang 0. Chaque année, elle garde 80 pour cent de ses clients et en gagne 300 nouveaux.

Ainsi $u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 300$. On trouve $u_1 = 1\,100$, $u_2 = 1\,180$, $u_3 = 1\,244$.

De quel type est la suite (u_n) ?

A. Arithmétique de raison 100.

Faux.

Le deuxième écart vaut 80, pas 100.

B. Géométrique de raison $1{,}1$.

Faux.

Le quotient $\dfrac{u_2}{u_1}$ ne vaut pas $1{,}1$.

C. Ni arithmétique ni géométrique.

Juste.

Juste : les écarts et les quotients changent d'un rang à l'autre.

Correction

Les écarts valent 100, puis 80 : la suite n'est pas arithmétique.

Les quotients valent $1{,}1$, puis $\dfrac{1\,180}{1\,100} \approx 1{,}073$: elle n'est pas géométrique non plus.

Attention : ni arithmétique, ni géométrique

- ✗ « La raison vaut 100, donc $u_2 = 1\,000 + 2 \times 100 = 1\,200$. »
- ✓ On applique la relation : $u_2 = 0{,}8 \times 1\,100 + 300 = 1\,180$.

En général, une suite définie par $u_{n+1} = a\,u_n + b$, avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$, n'est ni arithmétique ni géométrique.

Seule exception : un premier terme égal au nombre fixe ℓ vu plus bas, qui donne une suite constante. Hors ce cas, aucune formule de terme général ou de somme ne s'applique directement à (u_n).

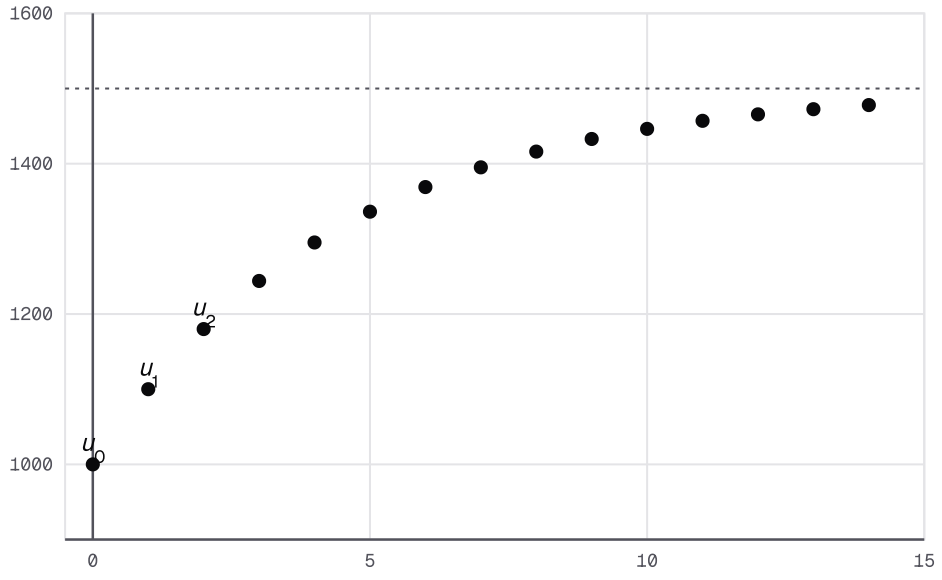
La suite auxiliaire

Cherche le nombre qui ne bouge pas : l'équation $\ell = 0{,}8\,\ell + 300$ donne $\ell = 1\,500$.

Regarde les écarts à ce nombre : $u_0 - 1\,500 = -500$, $u_1 - 1\,500 = -400$, $u_2 - 1\,500 = -320$. Chaque écart est multiplié par $0{,}8$.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux relations ont le même nombre 300 : il disparaît par différence.

À savoir. Trouver ℓ est un calcul montré ici pour comprendre, il n'est pas exigé : en exercice, la suite auxiliaire est toujours donnée.



Les clients u_n de la salle, du rang 0 au rang 14 : partis de 1 000, ils montent vers 1 500 sans l'atteindre, et l'écart à 1 500 est multiplié par 0,8 à chaque rang.

Propriété : Suite récurrente affine et suite auxiliaire géométrique

Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$, et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

On note ℓ le réel tel que $\ell = a\,\ell + b$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est **géométrique de raison** a, et, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n.$$

Démonstration

Étape 1. Comme $a \neq 1$, l'équation $\ell = a\,\ell + b$ s'écrit $(1-a)\,\ell = b$ et a pour unique solution $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Étape 2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (a\,u_n + b) - (a\,\ell + b) = a\,(u_n - \ell) = a\,v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison a, de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$.

Étape 3. D'après le terme général d'une suite géométrique, $v_n = (u_0 - \ell)\,a^n$. Comme $u_n = v_n + \ell$, on obtient $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **soustraire** l'égalité $\ell = a\,\ell + b$ de la relation $u_{n+1} = a\,u_n + b$. Le nombre b disparaît, et il reste

$$u_{n+1} - \ell = a\,(u_n - \ell).$$

L'écart à ℓ forme donc une suite géométrique de raison a. On revient ensuite à u_n en ajoutant ℓ.

Vérifie : Le geste clé, sur un cas neuf

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$. Le nombre fixe vaut $\ell = -5$, et l'on pose $v_n = u_n + 5$. Que vaut v_{n+1} ?

A. $2\,v_n + 5$
Faux.
Le nombre 5 disparaît : $2\,u_n + 5 + 5 = 2\,(u_n + 5)$.

B. $v_n + 5$
Faux.
La relation multiplie par 2 : la suite auxiliaire aussi.

C. $2\,v_n$
Juste.
Juste : $v_{n+1} = 2\,u_n + 10 = 2\,(u_n + 5)$.

D. $2\,v_n - 5$
Faux.

Aucun nombre ne reste : la factorisation par 2 est exacte.

Correction
D'abord, $\ell = 2\,\ell + 5$ donne bien $\ell = -5$.

Ensuite, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 5 \\ &= 2\,u_n + 10 \\ &= 2\,(u_n + 5) \\ &= 2\,v_n. \end{aligned}$$

C'est le calcul de la preuve, avec $a = 2$ et $b = 5$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= (a\,u_n + b) - (a\,\ell + b) \\ &= a\,(u_n - \ell) \\ &= a\,v_n. \end{aligned}$$

Exemple : les clients de la salle

La salle de sport. Ici $a = 0{,}8$ et $b = 300$, donc

$$\ell = \frac{300}{1 - 0{,}8} = 1\,500.$$

La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1\,500$ est géométrique de raison $0{,}8$, avec $v_0 = -500$. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1\,500 - 500 \times 0{,}8^n.$$

Contrôle : $u_3 = 1\,500 - 500 \times 0{,}512 = 1\,244$.

L'hypothèse compte. Avec $u_{n+1} = u_n + 300$, on a $a = 1$. L'équation $\ell = \ell + 300$ n'a aucune solution : la suite est arithmétique, on la traite directement.

Quand l'énoncé donne la suite auxiliaire

Méthode : étudier une suite récurrente avec une suite auxiliaire donnée

1. **Écris** v_{n+1} avec la définition de (v_n), puis remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n.
2. **Simplifie** jusqu'à $v_{n+1} = q\,v_n$ ou $v_{n+1} = v_n + r$, avec q ou r indépendant de n.
3. **Exprime** v_n en fonction de n, avec le terme général et le premier terme v_0.
4. **Reviens à** u_n**.** Isole u_n dans la définition de v_n, puis remplace v_n.

Exemple : Exemple guidé : une suite affine

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3\,u_n - 4$. L'énoncé donne $v_n = u_n - 2$.

Nature de (v_n). Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 3\,u_n - 6 \\ &= 3\,(u_n - 2) \\ &= 3\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3.

Terme général. $v_0 = 5 - 2 = 3$, donc $v_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Retour à u_n. $u_n = v_n + 2 = 2 + 3^{n+1}$. Contrôle : $u_1 = 11$ et $u_2 = 29$, comme avec la relation.

Une suite homographique

Une suite **homographique** est définie par une relation de la forme $u_{n+1} = \dfrac{a\,u_n + b}{c\,u_n + d}$.

Deux précautions. D'abord, il faut prouver que le dénominateur ne s'annule jamais : sinon, un terme n'existerait pas. Ensuite, l'énoncé te donne toujours la suite auxiliaire à étudier.

Exemple : Exemple guidé, partie 1 : les termes existent

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n}{u_n + 2}$. Montrons que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.

Initialisation. $u_0 = 3$ et $3 > 0$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $u_n > 0$. Alors $u_n + 2 > 0$: le dénominateur n'est pas nul, et u_{n+1} existe. De plus $2\,u_n > 0$: quotient de deux nombres strictement positifs, u_{n+1} est strictement positif.

Conclusion. Par récurrence, chaque terme existe et $u_n > 0$ pour tout entier naturel n. En particulier, $u_n \neq 0$.

Exemple : Exemple guidé, partie 2 : la suite auxiliaire

L'énoncé donne $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, qui existe car $u_n \neq 0$.

Nature de (v_n). Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 2}{2\,u_n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n} \\ &= v_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Terme général. $v_0 = \dfrac{1}{3}$, donc, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{3} + \frac{n}{2} = \frac{3n + 2}{6}.$$

Retour à u_n. $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{6}{3n + 2}$. Contrôle : $u_1 = \dfrac{6}{5}$ et $u_2 = \dfrac{3}{4}$, comme avec la relation.

Exemple **: Exemple court : une suite auxiliaire en quotient**

L'énoncé peut donner un quotient de deux écarts. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3\,u_n + 2}{u_n + 2}$.

Les termes existent. On montre par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.

- **Initialisation** : $u_0 = 0$, et $0 \geq 0$.
- **Hérédité** : soit n un entier naturel tel que $u_n \geq 0$. Alors $u_n + 2 > 0$ et $3\,u_n + 2 > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.
- **Conclusion** : $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n ; ainsi $u_n + 2$ et $u_n + 1$ ne s'annulent jamais.

On donne $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

Les deux écarts. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

et

$$u_{n+1} + 1 = \frac{4\,(u_n + 1)}{u_n + 2}.$$

Le quotient. Le facteur $u_n + 2$ disparaît :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \\ &= \frac{1}{4}\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$, avec $v_0 = -2$. Contrôle : $u_1 = 1$ donne $v_1 = -\dfrac{1}{2}$.

À toi

Vérifie : Un terme lointain

Avec l'expression $u_n = \dfrac{6}{3n+2}$ trouvée dans l'exemple guidé (partie 2), que vaut u_4 ?

A. $\dfrac{1}{2}$

Faux.

Le dénominateur vaut $3 \times 4 + 2 = 14$, pas 12.

B. $\dfrac{3}{7}$

Juste.

Juste : $\dfrac{6}{3 \times 4 + 2} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$.

C. $\dfrac{6}{11}$

Faux.

C'est la valeur de u_3 : tu as pris le rang 3.

D. $\dfrac{7}{3}$

Faux.

C'est v_4 : il faut encore prendre l'inverse.

Correction

Avec la formule :

$$u_4 = \frac{6}{3 \times 4 + 2} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Contrôle avec la relation : $u_3 = \dfrac{6}{11}$, puis

$$u_4 = \frac{12/11}{6/11 + 2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}.$$

À toi : Une suite homographique guidée

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{5\,u_n}{2\,u_n + 5}$.

Montre d'abord que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n. On pose ensuite $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montre que (v_n) est arithmétique, puis exprime u_n en fonction de n. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1

Pour $u_n > 0$, raisonne par récurrence comme dans l'exemple.

Indice 2

Écris $v_{n+1} = \dfrac{2\,u_n + 5}{5\,u_n}$, puis sépare la fraction en deux.

Indice 3

Point délicat : la raison ne doit pas contenir n ; calcule v_0, et n'inverse v_n qu'à la fin.

Réponse

On montre d'abord, par récurrence, que les termes sont strictement positifs.

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 > 0$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $u_n > 0$. Alors $2\,u_n + 5 > 0$: le dénominateur n'est pas nul. De plus $5\,u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

Conclusion. Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout entier naturel n : les termes existent et v_n est défini.

Suite auxiliaire. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2\,u_n + 5}{5\,u_n} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{u_n} \\ &= v_n + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{2}{5}$, avec $v_0 = 1$.

Terme général. Pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{2n}{5} = \frac{2n+5}{5},$$

donc $u_n = \dfrac{5}{2n+5}$. Contrôle : $u_1 = \dfrac{5}{7}$.

Bilan et coin devoir

Quelle méthode pour quelle question

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Calculer des termes** : formule en n, ou relation appliquée pas à pas.
- **Borner** : signe de $u_n - M$ pour une formule explicite ; récurrence pour une suite récurrente.
- **Sens de variation** : signe de $u_{n+1} - u_n$; quotient comparé à 1 si les termes sont strictement positifs.
- **Reconnaître** : différence constante, suite arithmétique ; $u_{n+1} = q\,u_n$, suite géométrique.
- **Sommer** : compter $n - p + 1$ termes, puis la formule adaptée.
- **Modéliser** : ajout constant ou coefficient multiplicateur constant.
- **Suite récurrente** : étudier la suite auxiliaire, puis revenir à u_n.

Vérifie : Par où commencer ?

Un énoncé te donne $w_n = u_n - 7$ et te demande de montrer que (w_n) est géométrique. Par quoi commences-tu ?

A. Calculer w_0, w_1, w_2 et conclure.

Faux.

Trois termes peuvent montrer qu'une suite n'est pas géométrique, jamais qu'elle l'est.

B. Appliquer la formule de la somme.

Faux.

La somme vient après : il faut d'abord connaître la nature de la suite.

C. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

Juste.

Juste : on cherche une égalité $w_{n+1} = q\,w_n$ valable à chaque rang.

D. Montrer que $w_n \leq 7$.

Faux.

Une borne ne dit rien de la nature de la suite.

Correction

On écrit $w_{n+1} = u_{n+1} - 7$, on remplace u_{n+1} par son expression, puis on simplifie jusqu'à $w_{n+1} = q\,w_n$, avec q indépendant de n.

Trois termes calculés ne suffisent pas : l'égalité doit valoir à chaque rang.

Un exercice de devoir surveillé, pas à pas

Énoncé (exemple fictif). Une plateforme compte $2\,000$ abonnés au mois de rang 0. Chaque mois, elle garde 90 pour cent de ses abonnés et en gagne 400. On pose $u_0 = 2\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 400$.

1. Montrer que $u_n \leq 4\,000$ pour tout entier naturel n.
2. On pose $v_n = u_n - 4\,000$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. Montrer que $u_n = 4\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^n$, puis que (u_n) est croissante.
4. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

À toi : Question 1 : une borne

Rédige la réponse à la question 1. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1

Raisonne par récurrence, avec les trois parties titrées.

Indice 2

Dans l'hérédité, multiplie $u_n \leq 4\,000$ par $0{,}9$, puis ajoute 400.

Réponse

Initialisation. $u_0 = 2\,000$ et $2\,000 \leq 4\,000$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $u_n \leq 4\,000$. On multiplie par $0{,}9$, qui est positif, puis on ajoute 400 :

$$0{,}9\,u_n \leq 3\,600,$$
$$0{,}9\,u_n + 400 \leq 4\,000.$$

C'est-à-dire $u_{n+1} \leq 4\,000$.

Conclusion. Par récurrence, $u_n \leq 4\,000$ pour tout entier naturel n.

À toi : Question 2 : la suite auxiliaire

Rédige la réponse à la question 2. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000$, puis remplace u_{n+1}.
Indice 2
Factorise $0{,}9$ pour faire apparaître v_n.

Réponse
Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4\,000 \\ &= 0{,}9\,u_n + 400 - 4\,000 \\ &= 0{,}9\,u_n - 3\,600 \\ &= 0{,}9\,(u_n - 4\,000) \\ &= 0{,}9\,v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. La suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}9$, de premier terme $v_0 = 2\,000 - 4\,000 = -2\,000$.

Terme général, sens de variation, somme

À toi : Question 3 : terme général et sens de variation

Rédige la réponse à la question 3. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Écris le terme général de (v_n), puis reviens à $u_n = v_n + 4\,000$.
Indice 2
Pour le sens de variation, factorise $u_{n+1} - u_n$ par $0{,}1$ et utilise la question 1.

Réponse
Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, $v_n = -2\,000 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel n. Donc

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 4\,000 \\ &= 4\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^n. \end{aligned}$$

Sens de variation. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= 0{,}9\,u_n + 400 - u_n \\ &= 0{,}1\,(4\,000 - u_n). \end{aligned}$$

D'après la question 1, $4\,000 - u_n \geq 0$: la différence est positive ou nulle.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_n = 4\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^n$, et la suite (u_n) est croissante.

À toi : Question 4 : la somme

Rédige la réponse à la question 4. Arrondis au centième. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis ouvre la correction.

Indice 1
Écris chaque u_k comme $4\,000 + v_k$, puis sépare la somme en deux.
Indice 2
La somme compte 10 termes ; celle des v_k est géométrique.

Réponse
Découpage. Pour tout entier naturel k, $u_k = 4\,000 + v_k$. La somme compte $9 - 0 + 1 = 10$ termes, donc

$$\begin{aligned} S &= 10 \times 4\,000 \\ &\quad + (v_0 + v_1 + \cdots + v_9). \end{aligned}$$

Somme géométrique. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, avec 10 termes et la raison $0{,}9$:

$$\begin{aligned} &v_0 + \cdots + v_9 \\ &= -2\,000 \times \frac{1 - 0{,}9^{10}}{1 - 0{,}9} \\ &= -20\,000\,(1 - 0{,}9^{10}). \end{aligned}$$

Conclusion. On assemble les deux parties :

$$\begin{aligned} S &= 40\,000 \\ &\quad - 20\,000\,(1 - 0{,}9^{10}) \\ &\approx 26\,973{,}57. \end{aligned}$$

Arrondie au centième, la somme vaut environ $26\,973{,}57$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une suite auxiliaire

En devoir, chaque question donne son résultat : tu dois le **justifier**, pas le trouver.

Pour une suite auxiliaire, écris : « Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9\,v_n$; la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}9$ et de premier terme $v_0 = -2\,000$. »

Nomme la raison, le premier terme, puis la propriété employée.

Le mot du prof. Tu sais maintenant reconnaître une suite, la borner, étudier ses variations et additionner ses termes. Tu sais aussi traduire une épargne, un prix ou une population en suite.

Ces outils reviennent dans tes cours d'économie : garde-les à portée de main.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Suites numériques » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)