BURHAN

Résumé : Notions de logique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/resume

Chapitre	Semestre
Notions de logique	Semestre 1

Propositions et connecteurs

À retenir : Vrai, faux, ou ni l'un ni l'autre

Sur l'étiquette d'un magasin imaginaire, tu lis : « ce pantalon coûte 240 DH ». Cette phrase est vraie ou fausse : on la traite comme une proposition.

La phrase « ce pantalon est joli » n'en est pas une, car chacun en juge à sa façon.

Les connecteurs fabriquent ensuite des propositions composées à partir de propositions simples.

Définition : Proposition et valeur de vérité

Une **proposition** est un énoncé (mathématique, ou issu d'une situation précise) qui est soit vrai, soit faux, sans pouvoir être les deux à la fois. On dit qu'une proposition vraie a la **valeur de vérité** V (vrai) et qu'une proposition fausse a la valeur de vérité F (faux).

Par exemple, « 15 est un multiple de 5 » est une proposition vraie, et « $\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ » est une proposition fausse. L'énoncé « $2x - 1 = 5$ » n'est pas une proposition tant que le réel x n'est pas précisé.

Définition : Négation, conjonction et disjonction

Soit P et Q deux propositions.

- La **négation** de P, notée $\overline{P}$ (lue « non P »), est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.
- La **conjonction** « P et Q » est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux ; elle est fausse dans les trois autres cas.
- La **disjonction** « P ou Q » est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ; elle est fausse seulement lorsque P et Q sont fausses toutes les deux.

Définition : Implication et équivalence

Soit P et Q deux propositions.

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ (lue « P implique Q », ou « si P, alors Q ») est fausse seulement lorsque P est vraie et Q est fausse ; elle est vraie dans les trois autres cas.

- La proposition $Q \Rightarrow P$ s'appelle la **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ (lue « P équivaut à Q », ou « P si et seulement si Q ») est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Méthode : trouver la valeur de vérité d'une proposition composée

1. **Évalue** d'abord chaque proposition simple : V ou F.
2. **Cherche** le connecteur qui s'applique en dernier ; les parenthèses le montrent.
3. **Applique** sa règle : « et » veut deux V ; « ou » se contente d'un V ; une implication n'est fausse que dans le cas « V puis F ».
4. **Écris** la valeur obtenue, sans dresser de table complète.

Exemple

Énoncé. On pose P : « 35 est un multiple de 7 » et Q : « $3^2 = 6$ ». Donne la valeur de vérité de « $\overline{P}$ ou Q » et de $Q \Rightarrow P$.

Propositions simples. $35 = 5 \times 7$, donc P est vraie. $3^2 = 9$, donc Q est fausse.

Première proposition. $\overline{P}$ est fausse et Q est fausse : la disjonction est fausse.

Seconde proposition. Q est fausse : l'implication $Q \Rightarrow P$ est vraie.

Attention : Le « ou » des mathématiques accepte les deux

Au restaurant, « thé ou café » laisse un seul choix. En mathématiques, « P ou Q » reste vraie quand P et Q sont vraies ensemble. Ainsi « 12 est pair ou 12 est multiple de 3 » est vraie : ses deux parties sont vraies.

Attention : Réciproque ou contraposée ?

L'implication « si n est multiple de 10, alors n est pair » est vraie pour tout entier n.

Sa réciproque est fausse : 4 est pair sans être multiple de 10. Sa contraposée, « si n est impair, alors n n'est pas multiple de 10 », est vraie.

Seule la contraposée garde toujours la valeur de l'implication.

Lois logiques : nier et contraposer

Définition : Loi logique

Une **loi logique** est une proposition construite à partir de propositions P, Q, R, … à l'aide des connecteurs (négation, « et », « ou », $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$), qui est **vraie quelles que soient** les valeurs de vérité de P, Q, R, …

Par exemple, « P ou $\overline{P}$ » est une loi logique : l'une des deux propositions P et $\overline{P}$ est toujours vraie.

Propriété : Double négation et lois de Morgan

Soit P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$;
- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$;
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

Propriété : Lois de l'implication et de l'équivalence

Soit P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$;
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$; l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$;
- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$;
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$.

Méthode : nier une proposition composée

1. **Échange** « et » et « ou », puis nie chaque morceau : ce sont les lois de Morgan.
2. **Remplace** la négation de $P \Rightarrow Q$ par « P et $\overline{Q}$ » : il ne reste aucune flèche.
3. **Retourne** les inégalités avec soin : la négation de $a \leq b$ est $a > b$.
4. **Contrôle** : ta négation est vraie exactement quand la phrase de départ est fausse.

Exemple

Énoncé. Dans une situation fictive, nie la phrase : « le prix baisse et les ventes augmentent ».

Loi de Morgan. La négation d'un « et » est le « ou » des deux négations.

Réponse. « Le prix ne baisse pas ou les ventes n'augmentent pas. » Il suffit qu'une des deux annonces échoue pour que la phrase de départ soit fausse.

Exemple

Énoncé. Une boutique imaginaire affiche : « si tu paies par carte, alors tu cumules des points ». Écris la contraposée et la négation de cette règle.

Contraposée. « Si tu ne cumules pas de points, alors tu n'as pas payé par carte. » Elle a la même valeur de vérité que la règle.

Négation. « Tu paies par carte et tu ne cumules pas de points. » C'est le seul cas où la règle est rompue.

Quantificateurs

> **À retenir : « Tous » ou « au moins un » ?**
>
> « Tous les articles du rayon sont soldés » et « au moins un article du rayon est soldé » ne disent pas la même chose.
>
> La première phrase exige chaque article ; la seconde se contente d'un seul. Les symboles $\forall$ et $\exists$ écrivent ces deux idées.

Définition : Fonction propositionnelle et quantificateurs

Soit E un ensemble. Une **fonction propositionnelle** sur E est un énoncé $P(x)$ qui contient une variable x et qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace x par un élément de E.

- La proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » (lue « pour tout x de E, $P(x)$ ») est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **chaque** élément x de E. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- La proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » (lue « il existe x dans E tel que $P(x)$ ») est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément x de E. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.
- La proposition « $\exists! x \in E,\ P(x)$ » est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **un et un seul** élément x de E.

Exemple

Énoncé. Donne la valeur de vérité de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geq 2$ » et de « $\exists n \in \mathbb{N},\ 3n = 14$ ».

Première. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 2 \geq 2$: elle est vraie.

Seconde. L'égalité $3n = 14$ donne $n = \dfrac{14}{3}$, qui n'est pas entier. Aucun entier naturel ne convient : elle est fausse.

Exemple

Énoncé. La proposition « $\exists! x \in \mathbb{R},\ 5x + 4 = 19$ » est-elle vraie ?

Existence. Le réel 3 convient : $5 \times 3 + 4 = 19$.

Unicité. Si $5x + 4 = 19$, alors $5x = 15$, donc $x = 3$: il n'y a pas d'autre solution.

Conclusion. La proposition est vraie.

Attention : Attention à l'ordre des quantificateurs

La proposition

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > 2n$$

est vraie : pour chaque n, l'entier $m = 2n + 1$ convient.

Échange les quantificateurs :

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m > 2n$$

Cette proposition est fausse, car $n = m$ donnerait $m > 2m$. Ici, m dépend de n : on ne peut pas le choisir avant.

Nier une proposition quantifiée ; le contre-exemple

Propriété : Négation d'une proposition quantifiée

Soit E un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle sur E.

- La négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».
- La négation de « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».

Méthode : nier une proposition quantifiée

1. **Change** chaque $\forall$ en $\exists$ et chaque $\exists$ en $\forall$; garde l'ordre et les ensembles.
2. **Nie** la propriété finale, avec les lois de Morgan si elle contient « et » ou « ou ».
3. **Vérifie** : des deux propositions, exactement une est vraie.

Exemple

Énoncé. Nie la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + 2y = 1$ », puis dis laquelle des deux est vraie.

Quantificateurs. Le $\forall$ devient $\exists$, puis le $\exists$ devient $\forall$.

Propriété. La négation de $x + 2y = 1$ est $x + 2y \neq 1$.

Réponse. « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + 2y \neq 1$ ». Elle est fausse : pour chaque réel x, le réel $y = \dfrac{1 - x}{2}$ donne $x + 2y = 1$. C'est la proposition de départ qui est vraie.

Attention : Nier, ce n'est pas tout retourner

La négation de « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \geq n+1$ » n'est pas « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 < n+1$ ».

C'est « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 < n+1$ » : un seul entier suffit, par exemple $n = 1$.

L'inégalité large $\geq$ se nie par l'inégalité stricte $<$.

Méthode : réfuter par un contre-exemple

1. **Repère** une proposition de la forme « pour tout x de E, $P(x)$ ».
2. **Teste** quelques éléments de E, en pensant aux cas extrêmes : 0, 1, un négatif, une fraction.
3. **Exhibe** un élément a précis, et montre par un calcul que $P(a)$ est fausse.
4. **Conclus** : la proposition universelle est fausse. Un seul contre-exemple suffit, alors que mille exemples ne prouvent rien.

Exemple

Énoncé. Un camarade affirme : « pour tout réel x, $(x-2)^2 \geq x$ ». Vrai ou faux ?

Recherche. Pour $x = 0$: $4 \geq 0$, rien ne cloche. Pour $x = 2$: $0 \geq 2$ est faux.

Conclusion. Le réel 2 est un contre-exemple : l'affirmation est fausse.

Raisonner par contraposée ou par l'absurde

Propriété : Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux propositions. Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Méthode : raisonner par contraposée

1. **Repère** l'hypothèse P et la conclusion Q.
2. **Écris** la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, en niant les deux avec soin.
3. **Rédige** : pars de $\overline{Q}$, puis enchaîne les calculs jusqu'à $\overline{P}$.
4. **Termine** par : « par contraposée, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie ».

Exemple

Énoncé. Soit n un entier. Montre que si $5n+3$ est pair, alors n est impair.

Contraposée. Si n est pair, alors $5n+3$ est impair.

Calcul. Prenons n pair : $n = 2k$ avec k entier. Alors $5n + 3 = 10k + 3 = 2(5k + 1) + 1$, qui est impair.

Conclusion. Par contraposée, si $5n + 3$ est pair, alors n est impair.

Propriété : Raisonnement par l'absurde

Soit P une proposition. Si, en supposant que $\overline{P}$ est vraie, on aboutit à une **contradiction**, c'est-à-dire à une proposition de la forme « R et $\overline{R}$ », où R est une proposition, alors P est vraie.

Méthode : raisonner par l'absurde

1. **Suppose** le contraire de ce que tu veux prouver, et annonce-le : « supposons par l'absurde que… ».
2. **Calcule** avec cette supposition et les données.
3. **Arrive** à une contradiction que tu nommes, par exemple $0 = 1$.
4. **Conclus** : la supposition est fausse, donc la proposition voulue est vraie.

Exemple

Énoncé. Montre que pour tout réel $x \geq 0$, $\dfrac{x+2}{x+1} \neq 1$.

Supposition. Soit $x \geq 0$; alors $x + 1 > 0$. Supposons par l'absurde que $\dfrac{x+2}{x+1} = 1$.

Calcul. On multiplie par $x + 1$, qui n'est pas nul : $x + 2 = x + 1$, donc $2 = 1$.

Conclusion. C'est une contradiction, donc $\dfrac{x+2}{x+1} \neq 1$.

Disjonction des cas ; équivalences successives

Propriété : Raisonnement par disjonction des cas

Soit P, Q et R trois propositions. Si « P ou Q » est vraie, si $P \Rightarrow R$ est vraie et si $Q \Rightarrow R$ est vraie, alors R est vraie.

En pratique, pour démontrer R, on sépare la situation en cas qui couvrent **toutes** les possibilités (par exemple $x \geq 0$ ou $x < 0$), puis on démontre R dans chacun des cas.

Méthode : raisonner par disjonction des cas

1. **Choisis** des cas qui ne laissent rien de côté : $x \geq a$ ou $x < a$; n pair ou n impair.
2. **Traite** chaque cas avec son hypothèse propre.
3. **Rassemble** : la propriété tient dans chaque cas, donc toujours.

Exemple

Énoncé. Montre que pour tout entier n, n^2+n+2 est pair.

Premier cas, n pair. On écrit $n=2k$, avec k entier. Alors :

$$\begin{aligned} & n^2+n+2 \\ &= 4k^2+2k+2 \\ &= 2(2k^2+k+1). \end{aligned}$$

Second cas, n impair. On écrit $n=2k+1$, avec k entier. Alors :

$$\begin{aligned} & n^2+n+2 \\ &= 4k^2+4k+1+2k+1+2 \\ &= 4k^2+6k+4 \\ &= 2(2k^2+3k+2). \end{aligned}$$

Conclusion. Un entier est soit pair, soit impair : dans les deux cas, n^2+n+2 est le double d'un entier, donc il est pair.

Propriété : Raisonnement par équivalences successives

Soit P, Q et R trois propositions. Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ sont vraies, alors $P \Leftrightarrow R$ est vraie.

Ainsi, une chaîne d'équivalences $P \Leftrightarrow Q_1$, $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$, ..., $Q_k \Leftrightarrow R$, toutes vraies, démontre $P \Leftrightarrow R$: **chaque** étape doit être une équivalence, et non une simple implication.

Méthode : résoudre par équivalences successives

1. **Écris** chaque ligne sous la forme « $A \Leftrightarrow B$ », une seule transformation à la fois.
2. **Contrôle** chaque transformation : ajouter un même réel aux deux membres, ou les multiplier par un réel non nul, se défait. Multiplier une inégalité par un négatif en retourne le sens.
3. **Repère** une transformation qui ne se défait pas, comme élever au carré : vérifie alors chaque solution trouvée.
4. **Conclus** par l'ensemble des solutions.

Exemple

Énoncé. Données fictives : une boutique imaginaire vend des lampes à 75 DH pièce ; fabriquer q lampes coûte $45q+2\,400$ DH. Pour quelles quantités la recette couvre-t-elle le coût ?

Équivalences.

$$\begin{aligned} & 75q \geq 45q+2\,400 \\ \Leftrightarrow\ & 30q \geq 2\,400 \\ \Leftrightarrow\ & q \geq 80. \end{aligned}$$

Justification. On retranche $45q$, puis on divise par 30, qui est positif : chaque étape se défait.

Conclusion. La recette couvre le coût exactement lorsque la boutique vend au moins 80 lampes.

Attention : Élever au carré n'est pas une équivalence

Pour résoudre $\sqrt{x+2} = x$, on élève au carré : $x + 2 = x^2$, d'où $x = 2$ ou $x = -1$. Cette étape n'est qu'une implication.

Vérifie : $\sqrt{4} = 2$ convient, mais $\sqrt{1} = 1 \neq -1$. La seule solution est 2.

Le raisonnement par récurrence

À retenir : L'idée de l'escalier

Pour monter tout un escalier, deux choses suffisent : atteindre la première marche, et savoir passer de n'importe quelle marche à la suivante. La récurrence suit le même plan : un départ vérifié, puis un passage d'un entier au suivant.

Théorème : Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour les entiers naturels $n \geq n_0$. Si

- $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**),
- et, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie (**hérédité**),

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Remarque : Un principe admis

Ce principe est admis : on l'applique sans le démontrer.

Méthode : rédiger une récurrence

1. **Nomme** la propriété $P(n)$ et le premier entier n_0.
2. **Initialisation** : calcule les deux membres pour $n = n_0$.
3. **Hérédité** : fixe un entier $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ est vraie, puis établis $P(n+1)$ en t'appuyant sur $P(n)$.
4. **Conclusion** : cite le principe de récurrence et les entiers concernés.

Exemple

Énoncé. Montre que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1).$$

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1, et $1 \times (2 - 1) = 1$.

Hérédité. Supposons l'égalité vraie pour un entier $n \geq 1$. Le terme suivant est $4(n + 1) - 3 = 4n + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} &1 + 5 + \cdots + (4n - 3) + (4n + 1) \\ &= n(2n - 1) + 4n + 1 \\ &= 2n^2 + 3n + 1 \\ &= (n + 1)(2n + 1). \end{aligned}$$

Or $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$: c'est l'égalité au rang $n + 1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, cette formule vaut pour tout entier $n \geq 1$.

Exemple

Énoncé. Montre que pour tout entier naturel n, $5^n \geq 1 + 4n$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $5^0 = 1$ et $1 + 4 \times 0 = 1$.

Hérédité. Supposons $5^n \geq 1 + 4n$ pour un entier naturel n. On multiplie par 5, qui est positif :

$$\begin{aligned} 5^{n+1} &= 5 \times 5^n \\ &\geq 5(1 + 4n) \\ &= 5 + 20n. \end{aligned}$$

Or $5 + 20n \geq 5 + 4n = 1 + 4(n + 1)$, car $16n \geq 0$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $5^n \geq 1 + 4n$ pour tout entier naturel n.

Attention **: Ne saute pas l'initialisation**

Prends $P(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ». L'hérédité marche, car $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$.

Pourtant $P(n)$ est fausse pour tout entier naturel n : $4^n + 1$ a pour reste 2 dans la division par 3.

Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

Quel raisonnement pour quelle question ?

Méthode **: Quel raisonnement pour quelle question ?**

- **Valeur de vérité** d'une proposition composée : les définitions des connecteurs.
- **Nier** une phrase avec « et », « ou », « si… alors » : les lois de Morgan et la négation d'une implication.
- **Nier** une phrase avec « pour tout » ou « il existe » : échanger les quantificateurs, puis nier la fin.

- **Prouver qu'un « pour tout » est faux** : un contre-exemple.
- **Prouver une implication** dont la conclusion se nie bien : la contraposée.
- **Prouver une impossibilité** : l'absurde.
- **Plusieurs situations possibles** : la disjonction des cas.
- **Résoudre** une équation ou une inéquation : les équivalences successives.
- **Propriété d'un entier** qui se transmet de n à $n+1$: la récurrence.

Double négation

$$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$$

Loi de Morgan pour « et »

$$\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$$

Loi de Morgan pour « ou »

$$\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$$

Négation d'une implication

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$$

Contraposée

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Négation de « pour tout »

$$\overline{(\forall x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \overline{P(x)})$$

Négation de « il existe »

$$\overline{(\exists x \in E,\ P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \overline{P(x)})$$

À retenir : Rédiger en devoir

Annonce toujours le raisonnement choisi : « par contraposée », « supposons par l'absurde », « premier cas ». Écris « donc » en toutes lettres et garde les flèches pour les formules. En récurrence, titre les trois parties. Termine chaque question par une phrase de conclusion.