BURHAN

Notions de logique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Le bon d'achat d'une boutique imaginaire

Une boutique imaginaire affiche la règle : « pour tout achat d'au moins 300 DH, un bon d'achat est offert ». Voici les cinq clients d'une journée (données fictives) :

- Amine : achat de 320 DH, bon reçu ;
- Salma : achat de 280 DH, aucun bon ;
- Youssef : achat de 450 DH, aucun bon ;
- Nora : achat de 150 DH, bon reçu ;
- Karim : achat de 300 DH, bon reçu.

On note E l'ensemble de ces cinq clients. Pour un client x de E, $P(x)$ est la proposition « x a acheté pour au moins 300 DH » et $Q(x)$ la proposition « x a reçu un bon ». La règle s'écrit « $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ ».

1. 1 pts

Montrer que la négation de la règle s'écrit « $\exists x \in E,\ P(x)$ et $\overline{Q(x)}$ ».

INDICE

Outil : nie d'abord le quantificateur, puis l'implication.

2. 1 pts

Montrer que la règle n'a pas été respectée ce jour-là.

INDICE

Outil : cherche dans la liste un client qui rend vraie la négation obtenue à la question 1.

3. 1 pts

Montrer que le cas de Nora ne contredit pas la règle, mais qu'il prouve que la réciproque « $\forall x \in E,\ Q(x) \Rightarrow P(x)$ » est fausse.

INDICE

Outil : une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie. **Ensuite :** dans la réciproque, l'hypothèse est $Q(x)$.

4. 1 pts

(a) Montrer que la contraposée de la règle s'écrit « $\forall x \in E,\ \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ ».

(b) La traduire en français.

(c) Montrer qu'elle est fausse elle aussi.

INDICE

Outil : pour chaque client x, la contraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$, de même valeur de vérité.

Exercice 2 5 pts

Carrés et restes dans la division par quatre

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel. On rappelle que, dans la division par 4, le reste est un entier r tel que $0 \leq r < 4$.

1. 1,5 pts

Montrer que, si $n = 2k$ avec k entier naturel, alors $n^2 = 4k^2$, et que, si $n = 2k + 1$, alors $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$. En déduire que n^2 a pour reste 0 ou 1 dans la division par 4.

INDICE

Outil : une disjonction des cas, n pair ou n impair ; développe $(2k + 1)^2$.

2. 1 pts

On remarque que $2\,027 = 4 \times 506 + 3$. Montrer par l'absurde que $2\,027$ n'est le carré d'aucun entier naturel, en utilisant la question 1.

INDICE

Outil : suppose $2\,027 = n^2$, puis compare les restes dans la division par 4.

3. 1,5 pts

Montrer par l'absurde que, pour tout entier naturel n, $n^2 + 2$ n'est pas divisible par 4, en utilisant la question 1.

INDICE

Outil : suppose $n^2 + 2 = 4m$ avec m entier, puis écris n^2 sous la forme $4 \times (\ldots) + r$.

4. 1 pts

On considère la proposition (E) : « $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ n^2 + 2 = 4m$ ». Montrer que (E) est fausse, en écrivant d'abord sa négation.

INDICE

Outil : change chaque $\exists$ en $\forall$ et nie l'égalité ; la question 3 décide.

Exercice 3 — 4 pts

Le seuil de rentabilité d'un atelier imaginaire

Données fictives : un atelier imaginaire fabrique et vend des chaises. Pour q chaises, où q est un entier naturel, le coût total vaut $40q + 3\,000$ DH, et chaque chaise est vendue 55 DH. On note $B(q) = 55q - (40q + 3\,000)$ le bénéfice, en DH.

1. — 1 pts

Montrer que $B(q) = 15q - 3\,000$, puis que $B(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 200$.

INDICE

Outil : des équivalences successives ; diviser par 15, nombre positif, conserve le sens de l'inégalité.

2. — 1 pts

Montrer que $B(100) = -1\,500$, puis que la proposition « $\forall q \in \mathbb{N},\ B(q) \geq 0$ » est fausse.

INDICE

Outil : la forme de $B(q)$ obtenue à la question 1 ; un contre-exemple suffit pour réfuter un « pour tout ».

3. — 0,75 pts

Montrer que la proposition « $\exists! q \in \mathbb{N},\ B(q) = 0$ » est vraie.

INDICE

Début : résous $15q - 3\,000 = 0$ par équivalences, puis vérifie que la solution est un entier naturel.

4. — 1,25 pts

Le prix de vente devient p DH par chaise, avec $p > 40$. Montrer que le bénéfice est positif ou nul si et seulement si $q \geq \dfrac{3\,000}{p - 40}$, puis montrer que le seuil vaut 300 chaises pour $p = 50$.

INDICE

Point délicat : on divise par $p - 40$; vérifie d'abord son signe.

Exercice 4 5 pts

Une somme de produits, puis une inégalité

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$.

1. 0,75 pts

Montrer que $S_1 = 2$, $S_2 = 8$ et $S_3 = 20$, et que ces valeurs vérifient $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

INDICE

Outil : ajoute un terme à la fois, par exemple $S_2 = S_1 + 2 \times 3$.

2. 1,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pour l'hérédité, on remarquera que $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)$.

INDICE

Outil : dans l'écriture de S_{n+1}, remplace S_n grâce à l'hypothèse de récurrence.

3. 0,5 pts

Montrer que $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 20 \times 21 = 3\,080$.

INDICE

Outil : la formule de la question 2 avec $n = 20$.

4. 1,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $4^n \geq 1 + 3n$.

INDICE

Outil : dans l'hérédité, écris $4^{n+1} = 4 \times 4^n$ et utilise l'hypothèse de récurrence.

5. 0,75 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $4^n > 3n$, puis que $4^{10} > 30$.

INDICE

Outil : la question 4, et $1 + 3n > 3n$.

Exercice 5 4 pts

Une divisibilité par trois, par récurrence

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ».

1. 1,75 pts

Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : dans l'hérédité, fais apparaître l'hypothèse $n^3 + 2n = 3k$, avec k entier ; on rappelle que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

2. 0,5 pts

Montrer que $1^3 + 2 \times 1 = 3$, puis que la proposition « pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n$ est divisible par 9 » est fausse.

INDICE

Outil : un seul contre-exemple suffit pour réfuter un « pour tout ».

3. 1 pts

Montrer par l'absurde que pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n + 1$ n'est pas divisible par 3.

INDICE

Début : suppose que $n^3 + 2n + 1 = 3m$ pour un entier naturel n, puis utilise la question 1.

4. 0,75 pts

Données fictives : un grossiste imaginaire reçoit $n^3 + 2n$ boîtes, avec $n = 10$, et les range par lots de 3. Montrer qu'il remplit exactement 340 lots, sans boîte restante.

INDICE

Outil : la question 1 avec $n = 10$, puis une division par 3.