BURHAN

Notions de logique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Le bon d'achat d'une boutique imaginaire

Une boutique imaginaire affiche la règle : « pour tout achat d'au moins 300 DH, un bon d'achat est offert ». Voici les cinq clients d'une journée (données fictives) :

- Amine : achat de 320 DH, bon reçu ;
- Salma : achat de 280 DH, aucun bon ;
- Youssef : achat de 450 DH, aucun bon ;
- Nora : achat de 150 DH, bon reçu ;
- Karim : achat de 300 DH, bon reçu.

On note E l'ensemble de ces cinq clients. Pour un client x de E, $P(x)$ est la proposition « x a acheté pour au moins 300 DH » et $Q(x)$ la proposition « x a reçu un bon ». La règle s'écrit « $\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ ».

1. 1 pts

Montrer que la négation de la règle s'écrit « $\exists x \in E,\ P(x)$ et $\overline{Q(x)}$ ».

INDICE

Outil : nie d'abord le quantificateur, puis l'implication.

CORRIGÉ

Quantificateur. Nier « pour tout client x de E, … » revient à affirmer qu'un client au moins ne vérifie pas la propriété. La négation de la règle est « $\exists x \in E,\ \overline{(P(x) \Rightarrow Q(x))}$ ».

Implication. D'après les lois de l'implication, la négation de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est « $P(x)$ et $\overline{Q(x)}$ ».

Conclusion. La négation de la règle s'écrit « $\exists x \in E,\ P(x)$ et $\overline{Q(x)}$ » : un client au moins a acheté pour 300 DH ou plus sans recevoir de bon.

2. 1 pts

Montrer que la règle n'a pas été respectée ce jour-là.

INDICE

Outil : cherche dans la liste un client qui rend vraie la négation obtenue à la question 1.

CORRIGÉ

D'après la question 1, il suffit de trouver un client x pour lequel $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse.

Youssef a acheté pour 450 DH, et $450 \geq 300$: $P(\text{Youssef})$ est vraie. Il n'a reçu aucun bon : $Q(\text{Youssef})$ est fausse.

Conclusion. La négation de la règle est vraie : la règle n'a pas été respectée ce jour-là, et Youssef en est un contre-exemple.

3. 1 pts

Montrer que le cas de Nora ne contredit pas la règle, mais qu'il prouve que la réciproque « $\forall x \in E,\ Q(x) \Rightarrow P(x)$ » est fausse.

INDICE

Outil : une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie. **Ensuite :** dans la réciproque, l'hypothèse est $Q(x)$.

CORRIGÉ

Nora et la règle. Nora a acheté pour 150 DH, et $150 < 300$: $P(\text{Nora})$ est fausse. Une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie, donc $P(\text{Nora}) \Rightarrow Q(\text{Nora})$ est vraie. La règle ne promet rien pour un achat de moins de 300 DH.

Nora et la réciproque. $Q(\text{Nora})$ est vraie et $P(\text{Nora})$ est fausse : l'implication $Q(\text{Nora}) \Rightarrow P(\text{Nora})$ est fausse.

Conclusion. Le cas de Nora ne contredit pas la règle, mais il fournit un contre-exemple à la réciproque « $\forall x \in E,\ Q(x) \Rightarrow P(x)$ », qui est donc fausse.

4. 1 pts

(a) Montrer que la contraposée de la règle s'écrit « $\forall x \in E,\ \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ ».

(b) La traduire en français.

(c) Montrer qu'elle est fausse elle aussi.

INDICE

Outil : pour chaque client x, la contraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$, de même valeur de vérité.

CORRIGÉ

(a) Écriture. Pour chaque client x, la contraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$. En remplaçant l'implication par sa contraposée sous le quantificateur, on obtient la contraposée de la règle : « $\forall x \in E,\ \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ ».

Pour chaque client, l'implication et sa contraposée sont vraies ou fausses ensemble (lois de l'implication) : la contraposée de la règle a donc la même valeur de vérité que la règle.

(b) Traduction. « Tout client qui n'a pas reçu de bon a acheté pour moins de 300 DH. »

(c) Valeur. Youssef n'a reçu aucun bon, et il a acheté pour 450 DH, soit au moins 300 DH : la contraposée est fausse.

Conclusion. La contraposée de la règle s'écrit « $\forall x \in E,\ \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ », et elle est fausse, comme la règle.

Exercice 2 5 pts

Carrés et restes dans la division par quatre

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel. On rappelle que, dans la division par 4, le reste est un entier r tel que $0 \leq r < 4$.

1. 1,5 pts

Montrer que, si $n = 2k$ avec k entier naturel, alors $n^2 = 4k^2$, et que, si $n = 2k+1$, alors $n^2 = 4(k^2+k)+1$. En déduire que n^2 a pour reste 0 ou 1 dans la division par 4.

INDICE

Outil : une disjonction des cas, n pair ou n impair ; développe $(2k+1)^2$.

CORRIGÉ

Tout entier naturel est pair ou impair : on distingue ces deux cas.

Cas n pair. Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = 4k^2 = 4k^2 + 0$: le reste de n^2 dans la division par 4 vaut 0.

Cas n impair. Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4(k^2+k) + 1. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq 1 < 4$, le reste vaut 1.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, n^2 a pour reste 0 ou 1 dans la division par 4.

2. 1 pts

On remarque que $2\,027 = 4 \times 506 + 3$. Montrer par l'absurde que $2\,027$ n'est le carré d'aucun entier naturel, en utilisant la question 1.

INDICE

Outil : suppose $2\,027 = n^2$, puis compare les restes dans la division par 4.

CORRIGÉ

Hypothèse de l'absurde. Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $n^2 = 2\,027$.

Reste. Comme $2\,027 = 4 \times 506 + 3$ et $0 \leq 3 < 4$, le reste de n^2 dans la division par 4 vaudrait 3.

Contradiction. D'après la question 1, ce reste vaut 0 ou 1, jamais 3.

Conclusion. $2\,027$ n'est le carré d'aucun entier naturel.

3. 1,5 pts

Montrer par l'absurde que, pour tout entier naturel n, n^2+2 n'est pas divisible par 4, en utilisant la question 1.

INDICE

Outil : suppose $n^2+2=4m$ avec m entier, puis écris n^2 sous la forme $4\times(\dots)+r$.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel.

Hypothèse de l'absurde. Supposons qu'il existe un entier m tel que $n^2+2=4m$. Comme $n^2+2>0$, on a $m\geq 1$.

Reste. Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= 4m-2 \\ &= 4(m-1)+2, \end{aligned}$$

avec $m-1$ entier naturel et $0\leq 2<4$: le reste de n^2 dans la division par 4 vaudrait 2.

Contradiction. D'après la question 1, ce reste vaut 0 ou 1.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, n^2+2 n'est pas divisible par 4.

4. 1 pts

On considère la proposition (E) : « $\exists n\in\mathbb{N},\ \exists m\in\mathbb{N},\ n^2+2=4m$ ». Montrer que (E) est fausse, en écrivant d'abord sa négation.

INDICE

Outil : change chaque $\exists$ en $\forall$ et nie l'égalité ; la question 3 décide.

CORRIGÉ

Négation. Chaque $\exists$ devient $\forall$ et l'égalité est niée : « $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall m\in\mathbb{N},\ n^2+2\neq 4m$ ».

Valeur. Soit n et m deux entiers naturels. D'après la question 3, n^2+2 n'est pas un multiple de 4, donc $n^2+2\neq 4m$: la négation est vraie.

Conclusion. La proposition (E) est fausse.

Exercice 3 4 pts

Le seuil de rentabilité d'un atelier imaginaire

Données fictives : un atelier imaginaire fabrique et vend des chaises. Pour q chaises, où q est un entier naturel, le coût total vaut $40q + 3\,000$ DH, et chaque chaise est vendue 55 DH. On note $B(q) = 55q - (40q + 3\,000)$ le bénéfice, en DH.

1. 1 pts

Montrer que $B(q) = 15q - 3\,000$, puis que $B(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 200$.

INDICE

Outil : des équivalences successives ; diviser par 15, nombre positif, conserve le sens de l'inégalité.

CORRIGÉ

Forme réduite. Pour tout entier naturel q :

$$\begin{aligned} B(q) &= 55q - 40q - 3\,000 \\ &= 15q - 3\,000. \end{aligned}$$

Équivalences. Pour tout entier naturel q :

$$\begin{aligned} B(q) \geq 0 &\Leftrightarrow 15q \geq 3\,000 \\ &\Leftrightarrow q \geq 200. \end{aligned}$$

On ajoute $3\,000$ aux deux membres, puis on divise par 15, qui est strictement positif : chaque étape se lit dans les deux sens.

Conclusion. $B(q) = 15q - 3\,000$, et $B(q) \geq 0$ si et seulement si $q \geq 200$.

2. 1 pts

Montrer que $B(100) = -1\,500$, puis que la proposition « $\forall q \in \mathbb{N},\ B(q) \geq 0$ » est fausse.

INDICE

Outil : la forme de $B(q)$ obtenue à la question 1 ; un contre-exemple suffit pour réfuter un « pour tout ».

CORRIGÉ

Calcul. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} B(100) &= 15 \times 100 - 3\,000 \\ &= 1\,500 - 3\,000 \\ &= -1\,500. \end{aligned}$$

Contre-exemple. On a $-1\,500 < 0$: l'entier 100 ne vérifie pas $B(q) \geq 0$.

Conclusion. $B(100) = -1\,500$, et la proposition « $\forall q \in \mathbb{N},\ B(q) \geq 0$ » est fausse : en vendant 100 chaises, l'atelier perd de l'argent.

3. 0,75 pts

Montrer que la proposition « $\exists! q \in \mathbb{N},\ B(q) = 0$ » est vraie.

INDICE

Début : résous $15q - 3\,000 = 0$ par équivalences, puis vérifie que la solution est un entier naturel.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout entier naturel q :

$$\begin{aligned} B(q) = 0 &\Leftrightarrow 15q = 3\,000 \\ &\Leftrightarrow q = 200. \end{aligned}$$

Conclusion. L'entier naturel 200 annule le bénéfice, et c'est le seul : la proposition « $\exists! q \in \mathbb{N},\ B(q) = 0$ » est vraie.

4. 1,25 pts

Le prix de vente devient p DH par chaise, avec $p > 40$. Montrer que le bénéfice est positif ou nul si et seulement si $q \geq \dfrac{3\,000}{p - 40}$, puis montrer que le seuil vaut 300 chaises pour $p = 50$.

INDICE

Point délicat : on divise par $p - 40$; vérifie d'abord son signe.

CORRIGÉ

Bénéfice. Au prix p, pour tout entier naturel q, le bénéfice vaut

$$\begin{aligned} &pq - (40q + 3\,000) \\ &= (p - 40)q - 3\,000. \end{aligned}$$

Équivalences. Comme $p > 40$, le nombre $p - 40$ est strictement positif : diviser par $p - 40$ conserve le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} &(p - 40)q - 3\,000 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &(p - 40)q \geq 3\,000 \\ \Leftrightarrow\ &q \geq \frac{3\,000}{p - 40}. \end{aligned}$$

Cas $p = 50$. Alors $p - 40 = 10$, et le seuil vaut

$$\frac{3\,000}{10} = 300.$$

Conclusion. Le bénéfice est positif ou nul si et seulement si $q \geq \dfrac{3\,000}{p - 40}$; pour $p = 50$, l'atelier doit vendre au moins 300 chaises.

Exercice 4 5 pts

Une somme de produits, puis une inégalité

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1)$.

1. 0,75 pts

Montrer que $S_1 = 2$, $S_2 = 8$ et $S_3 = 20$, et que ces valeurs vérifient $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

INDICE

Outil : ajoute un terme à la fois, par exemple $S_2 = S_1 + 2 \times 3$.

CORRIGÉ

Valeurs. On ajoute un terme à la fois :

- $S_1 = 1 \times 2 = 2$;
- $S_2 = S_1 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$;
- $S_3 = S_2 + 3 \times 4 = 8 + 12 = 20$.

Formule. On a $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$, $\dfrac{2 \times 3 \times 4}{3} = 8$ et $\dfrac{3 \times 4 \times 5}{3} = 20$.

Conclusion. $S_1 = 2$, $S_2 = 8$ et $S_3 = 20$, et ces valeurs vérifient la formule pour $n = 1$, 2 et 3.

2. 1,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pour l'hérédité, on remarquera que $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)$.

INDICE

Outil : dans l'écriture de S_{n+1}, remplace S_n grâce à l'hypothèse de récurrence.

CORRIGÉ

Initialisation. D'après la question 1, $S_1 = 2 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{3}$: la formule est vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. On remplace S_n, puis on met $(n+1)(n+2)$ en facteur :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ &\quad + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= (n+1)(n+2) \times \frac{n+3}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

C'est la formule au rang $n+1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

3. 0,5 pts

Montrer que $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 20 \times 21 = 3\,080$.

INDICE

Outil : la formule de la question 2 avec $n = 20$.

CORRIGÉ

La somme demandée est S_{20}. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{20 \times 21 \times 22}{3} \\ &= \frac{9\,240}{3} = 3\,080. \end{aligned}$$

Conclusion. $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 20 \times 21 = 3\,080$.

4. 1,5 pts

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $4^n \geq 1 + 3n$.

INDICE

Outil : dans l'hérédité, écris $4^{n+1} = 4 \times 4^n$ et utilise l'hypothèse de récurrence.

CORRIGÉ

Initialisation. Pour $n = 1$: $4^1 = 4$ et $1 + 3 \times 1 = 4$; on a bien $4 \geq 4$.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $4^n \geq 1 + 3n$. On multiplie cette inégalité par 4, qui est positif :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} &= 4 \times 4^n \\ &\geq 4(1 + 3n) \\ &= 4 + 12n. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $1 + 3(n+1) = 4 + 3n$, et $4 + 12n \geq 4 + 3n$, car $9n \geq 0$. Donc $4^{n+1} \geq 1 + 3(n+1)$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $4^n \geq 1 + 3n$.

5. 0,75 pts

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $4^n > 3n$, puis que $4^{10} > 30$.

INDICE

Outil : la question 4, et $1 + 3n > 3n$.

CORRIGÉ

Inégalité stricte. Soit $n \geq 1$ un entier. D'après la question 4, $4^n \geq 1 + 3n$, et $1 + 3n > 3n$. Donc $4^n > 3n$.

Cas $n = 10$. On obtient $4^{10} > 3 \times 10 = 30$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $4^n > 3n$; en particulier, $4^{10} > 30$.

Exercice 5 4 pts

Une divisibilité par trois, par récurrence

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ».

1. 1,75 pts

Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : dans l'hérédité, fais apparaître l'hypothèse $n^3 + 2n = 3k$, avec k entier ; on rappelle que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

CORRIGÉ

Initialisation. $0^3 + 2 \times 0 = 0 = 3 \times 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie : il existe un entier k tel que $n^3 + 2n = 3k$. En développant $(n+1)^3$:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\quad + 2n + 2 \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1) \\ &= 3(k + n^2 + n + 1).\end{aligned}$$

Comme $k + n^2 + n + 1$ est un entier, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. 0,5 pts

Montrer que $1^3 + 2 \times 1 = 3$, puis que la proposition « pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n$ est divisible par 9 » est fausse.

INDICE

Outil : un seul contre-exemple suffit pour réfuter un « pour tout ».

CORRIGÉ

Calcul. Pour $n = 1$: $1^3 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3$.

Contre-exemple. L'entier 3 n'est pas divisible par 9, car $0 < 3 < 9$.

Conclusion. L'entier 1 est un contre-exemple : la proposition « pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n$ est divisible par 9 » est fausse.

3. 1 pts

Montrer par l'absurde que pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n + 1$ n'est pas divisible par 3.

INDICE

Début : suppose que $n^3 + 2n + 1 = 3m$ pour un entier naturel n, puis utilise la question 1.

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel.

Hypothèse de l'absurde. Supposons qu'il existe un entier m tel que $n^3 + 2n + 1 = 3m$.

Contradiction. D'après la question 1, il existe un entier k tel que $n^3 + 2n = 3k$. En soustrayant membre à membre :

$$1 = 3m - 3k = 3(m - k).$$

L'entier 1 serait un multiple de 3, ce qui est faux, car $0 < 1 < 3$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $n^3 + 2n + 1$ n'est pas divisible par 3.

4. 0,75 pts

Données fictives : un grossiste imaginaire reçoit $n^3 + 2n$ boîtes, avec $n = 10$, et les range par lots de 3. Montrer qu'il remplit exactement 340 lots, sans boîte restante.

INDICE

Outil : la question 1 avec $n = 10$, puis une division par 3.

CORRIGÉ

Pour $n = 10$, le grossiste reçoit $10^3 + 2 \times 10 = 1\,000 + 20 = 1\,020$ boîtes.

D'après la question 1, ce nombre est divisible par 3 : $1\,020 = 3 \times 340$.

Conclusion. Le grossiste remplit exactement 340 lots de 3 boîtes, sans boîte restante.