BURHAN

Notions de logique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Entraînement	7

Exercice 1

Quand un produit d'entiers est-il impair ?

Soit a et b deux entiers. On veut démontrer l'implication (I) : « si ab est impair, alors a est impair et b est impair ».

1.

Écrire la contraposée de (I).

INDICE

Outil : nie la conclusion avec une loi de Morgan : la négation de « a impair et b impair » contient un « ou ».

2.

Démontrer cette contraposée en distinguant deux cas, puis conclure.

INDICE

Début : premier cas, $a = 2k$; second cas, $b = 2k$. Dans chaque cas, mets 2 en facteur dans ab.

3.

La réciproque de (I) est-elle vraie ? Justifier.

INDICE

Début : écris $a = 2k + 1$ et $b = 2m + 1$, puis développe le produit ab.

Exercice 2

Deux impossibilités, par l'absurde

Les deux situations sont fictives.

1.

Une cliente achète quatre articles pour 210 DH au total. Montrer par l'absurde qu'un article au moins coûte plus de 50 DH.

INDICE

Début : suppose que chaque article coûte 50 DH ou moins, puis majore le total.

2.

Un grossiste imaginaire ne vend que des lots de 6 boîtes et des lots de 9 boîtes. On veut prouver qu'il ne peut pas livrer exactement 100 boîtes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entiers naturels a et b tels que $6a + 9b = 100$. Écrire cette proposition avec des quantificateurs.

INDICE

Outil : écris d'abord « il existe des entiers naturels a et b tels que… » avec des quantificateurs, puis nie cette phrase.

3.

Démontrer cette proposition par l'absurde.

INDICE

Début : $6a + 9b$ est un multiple de 3. Qu'en est-il de 100 ?

Exercice 3

Un carré plus un n'est jamais multiple de trois

On veut démontrer que, pour tout entier n, l'entier n^2+1 n'est pas divisible par 3.

1.

Justifier que tout entier n s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, avec k entier.

INDICE

Outil : la division euclidienne de n par 3 : le reste est un entier r tel que $0 \leq r < 3$, c'est-à-dire 0, 1 ou 2.

2.

Dans chacun des trois cas, écrire n^2+1 sous la forme $3m+r$, avec m entier et r égal à 1 ou à 2.

INDICE

Début : pour $n=3k+2$, développe $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4$.

3.

Conclure par disjonction des cas.

INDICE

Outil : un entier de la forme $3m+1$ ou $3m+2$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice 4

Équivalences : un bénéfice, puis une racine carrée

Données fictives : une coopérative imaginaire vend des pots de miel à 26 DH pièce. Produire q pots lui coûte $18q + 1\,200$ DH.

1.

Montrer que le bénéfice $26q - (18q + 1\,200)$ est positif ou nul si et seulement si $q \geq 150$.

INDICE

Outil : des équivalences successives ; à la fin, on divise par 8, nombre positif.

2.

On veut résoudre l'équation $x+1 = \sqrt{2x+10}$, pour $x \geq -5$. En élevant au carré, montrer que toute solution vérifie $x^2 = 9$.

INDICE

Début : écris $(x+1)^2 = 2x+10$, puis développe et simplifie.

3.

Tester les valeurs 3 et -3 dans l'équation de départ, puis donner l'ensemble des solutions.

INDICE

Outil : remplace x dans l'équation de départ ; une racine carrée n'est jamais négative.

Exercice 5

Échanger deux quantificateurs change le sens

On considère les propositions suivantes :

- P_1 : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 5$ » ;
- P_2 : « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 5$ » ;
- P_3 : « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = 0$ » ;
- P_4 : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1$ ».

1.

Montrer que P_1 est vraie.

INDICE

Outil : pour un réel x donné, propose un réel y qui dépend de x.

2.

Écrire la négation de P_2, puis montrer que P_2 est fausse.

INDICE

Début : la négation commence par « $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}$ ». Pour un réel y donné, cherche x tel que $x + y \neq 5$.

3.

Montrer que P_3 est vraie.

INDICE

Outil : cherche un même réel y qui convient pour tous les réels x.

4.

Écrire la négation de P_4 et montrer que P_4 est fausse.

INDICE

Outil : la négation commence par $\exists$; pense au réel 0.

Exercice 6

Des cartons empilés en rangées

Dans l'entrepôt d'une entreprise imaginaire, on empile des cartons en rangées : 1 carton dans la première rangée, 4 dans la deuxième, 7 dans la troisième, et ainsi de suite, avec 3 cartons de plus à chaque nouvelle rangée (données fictives).

1.

Justifier que la rangée numéro n compte $3n - 2$ cartons, puis calculer le nombre total de cartons pour 3 rangées.

INDICE

Outil : la première rangée compte 1 carton, et chacune des $n - 1$ rangées suivantes en ajoute 3.

2.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

INDICE

Début : pour l'hérédité, ajoute la rangée numéro $n + 1$, qui compte $3n + 1$ cartons, puis réduis au même dénominateur.

3.

Combien de cartons faut-il pour 20 rangées ?

INDICE

Outil : la formule de la question 2 avec $n = 20$.

Exercice 7

Une divisibilité par quatre, par récurrence

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $5^n - 1$ est divisible par 4 ».

1.

Vérifier que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

INDICE

Outil : 0 est divisible par 4, car $0 = 4 \times 0$.

2.

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. Montrer que $5^{n+1} - 1 = 5(5^n - 1) + 4$, puis que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Début : développe $5(5^n - 1) + 4$. **Ensuite :** écris $5^n - 1 = 4k$, avec k entier.

3.

Conclure. En déduire le reste de la division de 5^{10} par 4.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, puis l'écriture $5^{10} = (5^{10} - 1) + 1$.