BURHAN

Notions de logique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Entraînement	7

Exercice 1

Quand un produit d'entiers est-il impair ?

Soit a et b deux entiers. On veut démontrer l'implication (I) : « si ab est impair, alors a est impair et b est impair ».

1.

Écrire la contraposée de (I).

INDICE

Outil : nie la conclusion avec une loi de Morgan : la négation de « a impair et b impair » contient un « ou ».

CORRIGÉ

Négation de la conclusion. D'après une loi de Morgan, la négation de « a est impair et b est impair » est « a est pair ou b est pair ».

Négation de l'hypothèse. La négation de « ab est impair » est « ab est pair ».

Conclusion. La contraposée de (I) est « si a est pair ou b est pair, alors ab est pair ».

2.

Démontrer cette contraposée en distinguant deux cas, puis conclure.

INDICE

Début : premier cas, $a = 2k$; second cas, $b = 2k$. Dans chaque cas, mets 2 en facteur dans ab.

CORRIGÉ

On suppose « a pair ou b pair » et l'on montre que ab est pair. Deux cas se présentent.

Premier cas, a pair. Il existe un entier k tel que $a = 2k$. Alors $ab = 2(kb)$, avec kb entier : ab est pair.

Second cas, b pair. Il existe un entier k tel que $b = 2k$. Alors $ab = 2(ak)$, avec ak entier : ab est pair.

Conclusion. Dans les deux cas, ab est pair : la contraposée est démontrée. Elle a la même valeur de vérité que (I) ; donc, si ab est impair, alors a et b sont impairs.

3.

La réciproque de (I) est-elle vraie ? Justifier.

INDICE

Début : écris $a = 2k+1$ et $b = 2m+1$, puis développe le produit ab.

CORRIGÉ

La réciproque de (I) est « si a et b sont impairs, alors ab est impair ».

Supposons a et b impairs : $a = 2k+1$ et $b = 2m+1$, avec k et m entiers. En développant $(2k+1)(2m+1)$:

$$\begin{aligned} ab &= 4km + 2k + 2m + 1 \\ &= 2(2km + k + m) + 1. \end{aligned}$$

Comme $2km + k + m$ est un entier, ab est impair.

Conclusion. La réciproque est vraie. Avec la question 2 : ab est impair si et seulement si a et b sont impairs.

Exercice 2

Deux impossibilités, par l'absurde

Les deux situations sont fictives.

1.

Une cliente achète quatre articles pour 210 DH au total. Montrer par l'absurde qu'un article au moins coûte plus de 50 DH.

INDICE

Début : suppose que chaque article coûte 50 DH ou moins, puis majore le total.

CORRIGÉ

Hypothèse de l'absurde. Supposons que chacun des quatre articles coûte au plus 50 DH.

Majoration. En additionnant les quatre prix, le total est au plus $4 \times 50 = 200$ DH.

Contradiction. Le total vaut 210 DH, et $210 > 200$: c'est impossible.

Conclusion. La supposition est fausse : au moins un des quatre articles coûte plus de 50 DH.

2.

Un grossiste imaginaire ne vend que des lots de 6 boîtes et des lots de 9 boîtes. On veut prouver qu'il ne peut pas livrer exactement 100 boîtes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entiers naturels a et b tels que $6a + 9b = 100$. Écrire cette proposition avec des quantificateurs.

INDICE

Outil : écris d'abord « il existe des entiers naturels a et b tels que… » avec des quantificateurs, puis nie cette phrase.

CORRIGÉ

La phrase « il existe des entiers naturels a et b tels que $6a + 9b = 100$ » s'écrit « $\exists a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N},\ 6a + 9b = 100$ ».

La proposition à prouver en est la négation : chaque $\exists$ devient $\forall$, et l'égalité est niée.

Conclusion. Elle s'écrit « $\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ 6a + 9b \neq 100$ ».

3.

Démontrer cette proposition par l'absurde.

INDICE

Début : $6a + 9b$ est un multiple de 3. Qu'en est-il de 100 ?

CORRIGÉ

Hypothèse de l'absurde. Supposons qu'il existe des entiers naturels a et b tels que $6a + 9b = 100$.

Multiple de 3. On a $6a + 9b = 3(2a + 3b)$, où $2a + 3b$ est un entier : 100 serait donc un multiple de 3.

Contradiction. Or $100 = 3 \times 33 + 1$: dans la division par 3, le reste de 100 vaut 1, et non 0.

Conclusion. Pour tous entiers naturels a et b, $6a + 9b \neq 100$: le grossiste ne peut pas livrer exactement 100 boîtes.

Exercice 3

Un carré plus un n'est jamais multiple de trois

On veut démontrer que, pour tout entier n, l'entier n^2+1 n'est pas divisible par 3.

1.

Justifier que tout entier n s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, avec k entier.

INDICE

Outil : la division euclidienne de n par 3 : le reste est un entier r tel que $0 \leq r < 3$, c'est-à-dire 0, 1 ou 2.

CORRIGÉ

Soit n un entier. La division euclidienne de n par 3 fournit un entier k et un reste r tels que $n = 3k + r$ et $0 \leq r < 3$. Le reste r vaut donc 0, 1 ou 2.

Conclusion. Tout entier n s'écrit $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, avec k entier.

2.

Dans chacun des trois cas, écrire n^2+1 sous la forme $3m+r$, avec m entier et r égal à 1 ou à 2.

INDICE

Début : pour $n = 3k+2$, développe $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4$.

CORRIGÉ

Cas $n = 3k$.

$$\begin{aligned} n^2+1 &= 9k^2+1 \\ &= 3(3k^2)+1. \end{aligned}$$

Cas $n = 3k+1$. On a $(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1$, donc

$$\begin{aligned} n^2+1 &= 9k^2+6k+2 \\ &= 3(3k^2+2k)+2. \end{aligned}$$

Cas $n = 3k+2$. On a $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4$, donc

$$\begin{aligned} n^2+1 &= 9k^2+12k+5 \\ &= 3(3k^2+4k+1)+2. \end{aligned}$$

Conclusion. Les nombres $3k^2$, $3k^2+2k$ et $3k^2+4k+1$ sont des entiers : dans chaque cas, $n^2+1 = 3m+r$ avec m entier et r égal à 1 ou à 2.

3.

Conclure par disjonction des cas.

INDICE

Outil : un entier de la forme $3m+1$ ou $3m+2$ n'est pas un multiple de 3.

CORRIGÉ

D'après la question 1, tout entier relève de l'un des trois cas. D'après la question 2, dans chacun d'eux, $n^2+1 = 3m+r$ avec r égal à 1 ou à 2. Comme $0 \leq r < 3$, ce nombre r est le reste de la division de n^2+1 par 3, et il n'est jamais nul.

Conclusion. Par disjonction des cas, pour tout entier n, n^2+1 n'est pas divisible par 3.

Exercice 4

Équivalences : un bénéfice, puis une racine carrée

Données fictives : une coopérative imaginaire vend des pots de miel à 26 DH pièce. Produire q pots lui coûte $18q + 1\,200$ DH.

1.

Montrer que le bénéfice $26q - (18q + 1\,200)$ est positif ou nul si et seulement si $q \geq 150$.

INDICE

Outil : des équivalences successives ; à la fin, on divise par 8, nombre positif.

CORRIGÉ

Pour tout entier naturel q, on raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned} & 26q - (18q + 1\,200) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 8q - 1\,200 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 8q \geq 1\,200 \\ \Leftrightarrow\ & q \geq 150. \end{aligned}$$

Chaque étape se lit dans les deux sens : on réduit, on ajoute $1\,200$ aux deux membres, puis on divise par 8, qui est strictement positif.

Conclusion. Le bénéfice est positif ou nul si et seulement si $q \geq 150$: la coopérative ne perd pas d'argent dès qu'elle vend au moins 150 pots.

2.

On veut résoudre l'équation $x + 1 = \sqrt{2x + 10}$, pour $x \geq -5$. En élevant au carré, montrer que toute solution vérifie $x^2 = 9$.

INDICE

Début : écris $(x + 1)^2 = 2x + 10$, puis développe et simplifie.

CORRIGÉ

Soit $x \geq -5$ une solution de l'équation. Les deux membres sont égaux, donc leurs carrés aussi :

$$(x + 1)^2 = 2x + 10.$$

En développant le membre de gauche :

$$x^2 + 2x + 1 = 2x + 10,$$

d'où $x^2 = 9$.

Conclusion. Toute solution vérifie $x^2 = 9$.

Élever au carré ne donne qu'une implication : 3 et -3 sont seulement des candidats, qu'il reste à tester.

3.

Tester les valeurs 3 et -3 dans l'équation de départ, puis donner l'ensemble des solutions.

INDICE

Outil : remplace x dans l'équation de départ ; une racine carrée n'est jamais négative.

CORRIGÉ

D'après la question 2, une solution ne peut être que 3 ou -3. On teste chacune dans l'équation de départ.

- Pour $x = 3$: $3 + 1 = 4$ et $\sqrt{2 \times 3 + 10} = \sqrt{16} = 4$. Les deux membres sont égaux : 3 est solution.
- Pour $x = -3$: $-3 + 1 = -2$ et $\sqrt{2 \times (-3) + 10} = \sqrt{4} = 2$. Or $-2 \neq 2$: -3 n'est pas solution.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\{3\}$.

Exercice 5

Échanger deux quantificateurs change le sens

On considère les propositions suivantes :

- P_1 : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 5$ » ;
- P_2 : « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 5$ » ;
- P_3 : « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = 0$ » ;
- P_4 : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1$ ».

1.

Montrer que P_1 est vraie.

INDICE

Outil : pour un réel x donné, propose un réel y qui dépend de x.

CORRIGÉ

Il faut, pour chaque réel x, trouver un réel y, qui peut dépendre de x, tel que $x + y = 5$.

Soit x un réel. Posons $y = 5 - x$: c'est un réel, et $x + y = x + 5 - x = 5$.

Conclusion. Pour tout réel x, le réel $y = 5 - x$ convient : P_1 est vraie.

2.

Écrire la négation de P_2, puis montrer que P_2 est fausse.

INDICE

Début : la négation commence par « $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}$ ». Pour un réel y donné, cherche x tel que $x + y \neq 5$.

CORRIGÉ

Négation. « $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x + y \neq 5$ ».

Preuve de la négation. Soit y un réel. Posons $x = 6 - y$: alors $x + y = 6$, et $6 \neq 5$.

Conclusion. La négation de P_2 est vraie, donc P_2 est fausse : aucun réel y ne convient pour tous les réels x à la fois.

3.

Montrer que P_3 est vraie.

INDICE

Outil : cherche un même réel y qui convient pour tous les réels x.

CORRIGÉ

Il faut trouver un seul réel y qui convienne pour tous les réels x.

Prenons $y = 0$. Pour tout réel x, $x \times 0 = 0$.

Conclusion. P_3 est vraie. Le même réel y sert pour tous les x : c'est ce qu'exige l'ordre « il existe y, puis pour tout x ».

4.

Écrire la négation de P_4 et montrer que P_4 est fausse.

INDICE

Outil : la négation commence par $\exists$; pense au réel 0.

CORRIGÉ

Négation. « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy \neq 1$ ».

Preuve de la négation. Prenons $x = 0$. Pour tout réel y, $0 \times y = 0$, et $0 \neq 1$.

Conclusion. La négation est vraie, donc P_4 est fausse : pour $x = 0$, aucun réel y ne vérifie $xy = 1$.

Exercice 6

Des cartons empilés en rangées

Dans l'entrepôt d'une entreprise imaginaire, on empile des cartons en rangées : 1 carton dans la première rangée, 4 dans la deuxième, 7 dans la troisième, et ainsi de suite, avec 3 cartons de plus à chaque nouvelle rangée (données fictives).

1.

Justifier que la rangée numéro n compte $3n-2$ cartons, puis calculer le nombre total de cartons pour 3 rangées.

INDICE

Outil : la première rangée compte 1 carton, et chacune des $n-1$ rangées suivantes en ajoute 3.

CORRIGÉ

Rangée numéro n. La première rangée compte 1 carton, et chacune des $n-1$ rangées suivantes en compte 3 de plus que la précédente. La rangée n compte donc

$$1+3(n-1)=3n-2$$

cartons.

Trois rangées. On additionne : $1+4+7=12$.

Conclusion. La rangée n compte $3n-2$ cartons, et 3 rangées en comptent 12 au total.

2.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

INDICE

Début : pour l'hérédité, ajoute la rangée numéro $n + 1$, qui compte $3n + 1$ cartons, puis réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1, et $\frac{1 \times (3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$: l'égalité est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que

$$1 + 4 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

La rangée $n + 1$ compte $3(n + 1) - 2 = 3n + 1$ cartons. On l'ajoute, puis on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} 1 + 4 + \cdots + (3n + 1) &= \frac{n(3n - 1)}{2} + (3n + 1) \\ &= \frac{n(3n - 1) + 2(3n + 1)}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(3n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

La dernière ligne vient de $(n + 1)(3n + 2) = 3n^2 + 5n + 2$. Comme $3(n + 1) - 1 = 3n + 2$, c'est l'égalité au rang $n + 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 4 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

3.

Combien de cartons faut-il pour 20 rangées ?

INDICE

Outil : la formule de la question 2 avec $n = 20$.

CORRIGÉ

On applique la formule de la question 2 avec $n = 20$:

$$\begin{aligned}\frac{20 \times (3 \times 20 - 1)}{2} &= \frac{20 \times 59}{2} \\ &= 590.\end{aligned}$$

Conclusion. Il faut 590 cartons pour 20 rangées.

Exercice 7

Une divisibilité par quatre, par récurrence

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $5^n - 1$ est divisible par 4 ».

1.

Vérifier que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

INDICE

Outil : 0 est divisible par 4, car $0 = 4 \times 0$.

CORRIGÉ

- Pour $n = 0$: $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$.
- Pour $n = 1$: $5^1 - 1 = 4 = 4 \times 1$.
- Pour $n = 2$: $5^2 - 1 = 24 = 4 \times 6$.

Conclusion. $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies. En particulier, $P(0)$ fournit l'initialisation de la récurrence.

2.

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. Montrer que $5^{n+1} - 1 = 5(5^n - 1) + 4$, puis que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Début : développe $5(5^n - 1) + 4$. **Ensuite :** écris $5^n - 1 = 4k$, avec k entier.

CORRIGÉ

Égalité. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned} &5(5^n - 1) + 4 \\ &= 5^{n+1} - 5 + 4 \\ &= 5^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Hérédité. Par hypothèse, $P(n)$ est vraie : il existe un entier k tel que $5^n - 1 = 4k$. En remplaçant dans l'égalité précédente, $5(5^n - 1) + 4 = 5 \times 4k + 4$, d'où

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= 20k + 4 \\ &= 4(5k + 1). \end{aligned}$$

Comme $5k + 1$ est un entier, $5^{n+1} - 1$ est divisible par 4.

Conclusion. $5^{n+1} - 1 = 5(5^n - 1) + 4$, et $P(n+1)$ est vraie.

3.

Conclure. En déduire le reste de la division de 5^{10} par 4.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, puis l'écriture $5^{10} = (5^{10} - 1) + 1$.

CORRIGÉ

Récurrence. $P(0)$ est vraie (question 1) et l'hérédité est établie (question 2). D'après le principe de récurrence, $5^n - 1$ est divisible par 4 pour tout entier naturel n.

Reste. Avec $n = 10$, il existe un entier m tel que $5^{10} - 1 = 4m$, donc $5^{10} = 4m + 1$. Comme $0 \leq 1 < 4$, c'est la division euclidienne de 5^{10} par 4.

Conclusion. $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, et le reste de la division de 5^{10} par 4 vaut 1.