BURHAN

Notions de logique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Application	8

Exercice 1

Deux propositions et leurs combinaisons

On considère les propositions P : « 27 est divisible par 9 » et Q : « $2^4 = 18$ ».

1.

Donner la valeur de vérité de P et celle de Q.

INDICE

Outil : écris 27 comme un produit, puis calcule 2^4.

2.

En déduire la valeur de vérité de $\overline{P}$, de « P et Q » et de « P ou Q ».

INDICE

Outil : ce que deviennent « non », « et » et « ou » selon les valeurs V et F de P et Q.

3.

Donner la valeur de vérité de $P \Rightarrow Q$, de $Q \Rightarrow P$ et de $P \Leftrightarrow Q$.

INDICE

Outil : $P \Rightarrow Q$ ne vaut F que lorsque P vaut V et Q vaut F ; $P \Leftrightarrow Q$ vaut V lorsque P et Q ont la même valeur.

Exercice 2

Nier trois propositions composées

Dans chaque question, écris la négation de la proposition donnée, sans laisser de « non » devant une parenthèse. Les situations sont fictives.

1.

Pour un article donné d'un magasin imaginaire : « l'article coûte moins de 50 DH et il est en stock ».

INDICE

Outil : une loi de Morgan : la négation d'un « et » est un « ou ».

2.

Pour deux réels x et y : « $x \geq 2$ ou $y < -1$ ».

INDICE

Outil : la négation d'un « ou » est un « et » ; nie chaque inégalité avec soin.

3.

Pour un client donné : « s'il paie comptant, alors il obtient une remise ».

INDICE

Outil : la négation de $P \Rightarrow Q$ est « P et $\overline{Q}$ ».

Exercice 3

Réciproque, contraposée et une première preuve

Pour tout réel x, on considère l'implication (I) : « si $x > 3$, alors $x^2 > 9$ ».

Elle est vraie : si $x > 3$, alors $x > 0$, donc $x \times x > 3 \times x$ et $3 \times x > 3 \times 3$; ainsi $x^2 > 9$.

1.

Écrire la réciproque de (I) et montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Outil : la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$; pour la réfuter, un seul contre-exemple suffit.

2.

Écrire la contraposée de (I). Est-elle vraie ?

INDICE

Outil : la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

3.

Soit n un entier. Démontrer que si n est pair, alors $7n + 2$ est pair. En déduire, par contraposée, que si $7n + 2$ est impair, alors n est impair.

INDICE

Début : un entier pair s'écrit $2k$, avec k entier ; écris $n = 2k$, puis calcule $7n + 2$.

Exercice 4

Lire quatre propositions quantifiées

Pour chacune des propositions suivantes, la lire en français, puis donner sa valeur de vérité en justifiant.

1.

« $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ »

INDICE

Outil : un carré est toujours positif ou nul.

2.

« $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 20$ »

INDICE

Outil : encadre 20 entre les carrés de deux entiers consécutifs.

3.

« $\exists! x \in \mathbb{R},\ 3x - 6 = 0$ »

INDICE

Outil : résous l'équation et compte ses solutions.

4.

« $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$ »

INDICE

Outil : un seul exemple suffit pour « il existe » ; teste quelques réels positifs, entiers ou non.

Exercice 5

Nier des propositions quantifiées

Pour chaque proposition, écris sa négation, puis dis laquelle des deux est vraie.

1.

« $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 5 > 0$ »

INDICE

Outil : change $\forall$ en $\exists$ et nie l'inégalité, puis cherche une écriture de $x^2 - 4x + 5$ qui montre son signe.

2.

« $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \text{ et } n^2 < 9$ »

INDICE

Outil : change $\exists$ en $\forall$, puis applique une loi de Morgan.

3.

« $\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 1 \Rightarrow x^3 > x)$ »

INDICE

Outil : la négation d'une implication est « hypothèse et négation de la conclusion ».

Exercice 6

Deux affirmations à réfuter

Deux camarades font chacun une affirmation sur des nombres.

1.

Amine affirme : « pour tout entier naturel n, $2^n + 1$ est un nombre premier ». Vérifier l'affirmation pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, puis montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Outil : un contre-exemple ; poursuis les essais avec les entiers suivants.

2.

Salma affirme : « pour tous réels a et b, $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ ». Montrer qu'elle se trompe.

INDICE

Outil : un contre-exemple ; teste des valeurs simples, comme 0, 1 ou 2, sans prendre $b = 0$.

Exercice 7

Une première récurrence : la somme des nombres pairs

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition : « $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ ».

1.

Vérifier que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres.

2.

Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ est vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Début : écris $2 + 4 + \cdots + 2n + 2(n+1)$, puis remplace la somme jusqu'à $2n$ grâce à $P(n)$.

3.

Conclure, puis calculer $2 + 4 + \cdots + 100$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence ; remarque que $100 = 2 \times 50$.

Exercice 8

Les prix d'un rayon imaginaire

Dans un magasin imaginaire, un rayon propose cinq articles aux prix suivants, en DH (données fictives) : 45, 60, 72, 38 et 76. On note E l'ensemble de ces cinq prix. On considère les phrases :

- (a) « tous les articles coûtent moins de 80 DH » ;
- (b) « au moins un article coûte plus de 74 DH » ;
- (c) « tous les articles coûtent plus de 40 DH ».

1.

Écrire chacune des phrases (a), (b) et (c) avec un quantificateur.

INDICE

Outil : « tous » se traduit par $\forall$, « au moins un » par $\exists$; la variable p désigne un prix de E.

2.

Donner la valeur de vérité de chacune des trois propositions.

INDICE

Outil : pour « pour tout », contrôle les cinq prix ; pour « il existe », un seul prix suffit.

3.

Écrire la négation de (c) avec un quantificateur, puis en français. Quel article la rend vraie ?

INDICE

Outil : la négation de « $\forall p \in E,\ p > 40$ » commence par $\exists$.