BURHAN

Notions de logique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Application	8

Exercice 1

Deux propositions et leurs combinaisons

On considère les propositions P : « 27 est divisible par 9 » et Q : « $2^4 = 18$ ».

1.

Donner la valeur de vérité de P et celle de Q.

INDICE

Outil : écris 27 comme un produit, puis calcule 2^4.

CORRIGÉ

Valeur de P. On a $27 = 3 \times 9$: 27 est un multiple de 9, donc P est vraie.

Valeur de Q. On calcule $2^4 = 16$ et $16 \neq 18$, donc Q est fausse.

Conclusion. P est vraie et Q est fausse.

2.

En déduire la valeur de vérité de $\overline{P}$, de « P et Q » et de « P ou Q ».

INDICE

Outil : ce que deviennent « non », « et » et « ou » selon les valeurs V et F de P et Q.

CORRIGÉ

D'après la question 1, P vaut V et Q vaut F.

- $\overline{P}$ prend la valeur contraire de celle de P : $\overline{P}$ est fausse.
- Une conjonction n'est vraie que si ses deux membres le sont. Ici Q est fausse, donc « P et Q » est fausse.
- Une disjonction est vraie dès que l'un de ses membres l'est. Ici P est vraie, donc « P ou Q » est vraie.

Conclusion. $\overline{P}$ et « P et Q » sont fausses ; « P ou Q » est vraie.

3.

Donner la valeur de vérité de $P \Rightarrow Q$, de $Q \Rightarrow P$ et de $P \Leftrightarrow Q$.

INDICE

Outil : $P \Rightarrow Q$ ne vaut F que lorsque P vaut V et Q vaut F ; $P \Leftrightarrow Q$ vaut V lorsque P et Q ont la même valeur.

CORRIGÉ

On regarde d'abord la valeur de l'hypothèse de chaque implication.

- L'hypothèse P est vraie et la conclusion Q est fausse : $P \Rightarrow Q$ est fausse.
- L'hypothèse Q est fausse : $Q \Rightarrow P$ est vraie, quelle que soit la valeur de P.
- P et Q n'ont pas la même valeur de vérité : $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.

Conclusion. $Q \Rightarrow P$ est vraie ; $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$ sont fausses.

Exercice 2

Nier trois propositions composées

Dans chaque question, écris la négation de la proposition donnée, sans laisser de « non » devant une parenthèse. Les situations sont fictives.

1.

Pour un article donné d'un magasin imaginaire : « l'article coûte moins de 50 DH et il est en stock ».

INDICE

Outil : une loi de Morgan : la négation d'un « et » est un « ou ».

CORRIGÉ

Notons A : « l'article coûte moins de 50 DH » et B : « il est en stock ». La phrase donnée est « A et B ».

D'après une loi de Morgan, sa négation est « $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ ». Le contraire de « coûter moins de 50 DH » est « coûter au moins 50 DH ».

Conclusion. La négation est « l'article coûte au moins 50 DH ou il n'est pas en stock ».

2.

Pour deux réels x et y : « $x \geq 2$ ou $y < -1$ ».

INDICE

Outil : la négation d'un « ou » est un « et » ; nie chaque inégalité avec soin.

CORRIGÉ

D'après une loi de Morgan, la négation d'un « ou » est le « et » des deux négations.

- La négation de $x \geq 2$ est $x < 2$.
- La négation de $y < -1$ est $y \geq -1$.

Conclusion. La négation est « $x < 2$ et $y \geq -1$ ».

3.

Pour un client donné : « s'il paie comptant, alors il obtient une remise ».

INDICE

Outil : la négation de $P \Rightarrow Q$ est « P et $\overline{Q}$ ».

CORRIGÉ

Notons P : « il paie comptant » et Q : « il obtient une remise ». La phrase donnée est $P \Rightarrow Q$, dont la négation est « P et $\overline{Q}$ ».

Conclusion. La négation est « il paie comptant et il n'obtient pas de remise ».

Ce n'est pas une implication : c'est le seul cas où la promesse de remise n'est pas tenue.

Exercice 3

Réciproque, contraposée et une première preuve

Pour tout réel x, on considère l'implication (I) : « si $x > 3$, alors $x^2 > 9$ ».

Elle est vraie : si $x > 3$, alors $x > 0$, donc $x \times x > 3 \times x$ et $3 \times x > 3 \times 3$; ainsi $x^2 > 9$.

1.

Écrire la réciproque de (I) et montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Outil : la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$; pour la réfuter, un seul contre-exemple suffit.

CORRIGÉ

La réciproque de (I) échange l'hypothèse et la conclusion : « si $x^2 > 9$, alors $x > 3$ ».

Pour la réfuter, il suffit d'un réel x tel que $x^2 > 9$ et $x \leq 3$. Pour $x = -4$, on a $x^2 = 16 > 9$, mais $-4 \leq 3$.

Conclusion. La réciproque de (I) est fausse : le réel -4 en est un contre-exemple.

2.

Écrire la contraposée de (I). Est-elle vraie ?

INDICE

Outil : la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

CORRIGÉ

On nie la conclusion et l'hypothèse de (I) :

- la négation de $x^2 > 9$ est $x^2 \leq 9$;
- la négation de $x > 3$ est $x \leq 3$.

La contraposée de (I) est donc « si $x^2 \leq 9$, alors $x \leq 3$ ».

D'après les lois de l'implication, (I) et sa contraposée sont vraies ou fausses en même temps. Or (I) est vraie.

Conclusion. La contraposée « si $x^2 \leq 9$, alors $x \leq 3$ » est vraie.

3.

Soit n un entier. Démontrer que si n est pair, alors $7n+2$ est pair. En déduire, par contraposée, que si $7n+2$ est impair, alors n est impair.

INDICE

Début : un entier pair s'écrit $2k$, avec k entier ; écris $n=2k$, puis calcule $7n+2$.

CORRIGÉ

Cas n pair. Supposons n pair : il existe un entier k tel que $n=2k$. Alors

$$\begin{aligned} 7n+2 &= 14k+2 \\ &= 2(7k+1). \end{aligned}$$

Comme $7k+1$ est un entier, $7n+2$ est pair.

Contraposée. L'implication « si n est pair, alors $7n+2$ est pair », que l'on vient d'établir, est la contraposée de « si $7n+2$ est impair, alors n est impair ». Les deux ont la même valeur de vérité.

Conclusion. Si n est pair, alors $7n+2$ est pair ; par contraposée, si $7n+2$ est impair, alors n est impair.

Exercice 4

Lire quatre propositions quantifiées

Pour chacune des propositions suivantes, la lire en français, puis donner sa valeur de vérité en justifiant.

1.

« $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ »

INDICE

Outil : un carré est toujours positif ou nul.

CORRIGÉ

Lecture. « Pour tout réel x, on a $x^2 + 1 > 0$. »

Valeur. Soit x un réel. Un carré est positif ou nul : $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Conclusion. La proposition est vraie.

2.

« $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 20$ »

INDICE

Outil : encadre 20 entre les carrés de deux entiers consécutifs.

CORRIGÉ

Lecture. « Il existe un entier naturel n tel que $n^2 = 20$. »

Valeur. On a $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$. Soit n un entier naturel.

- Si $n \leq 4$, alors $n^2 \leq 16$, donc $n^2 < 20$.
- Si $n \geq 5$, alors $n^2 \geq 25$, donc $n^2 > 20$.

Conclusion. Aucun entier naturel ne convient : la proposition est fausse.

3.

« $\exists! x \in \mathbb{R},\ 3x - 6 = 0$ »

INDICE

Outil : résous l'équation et compte ses solutions.

CORRIGÉ

Lecture. « Il existe un unique réel x tel que $3x - 6 = 0$. »

Valeur. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3x - 6 = 0 &\Leftrightarrow 3x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

L'équation a une solution, le réel 2, et une seule.

Conclusion. La proposition est vraie.

4.

« $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$ »

INDICE

Outil : un seul exemple suffit pour « il existe » ; teste quelques réels positifs, entiers ou non.

CORRIGÉ

Lecture. « Il existe un réel x tel que $x^2 < x$. »

Valeur. Un seul exemple suffit. Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on a $x^2 = \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. La proposition est vraie.

Exercice 5

Nier des propositions quantifiées

Pour chaque proposition, écris sa négation, puis dis laquelle des deux est vraie.

1.

« $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 5 > 0$ »

INDICE

Outil : change $\forall$ en $\exists$ et nie l'inégalité, puis cherche une écriture de $x^2 - 4x + 5$ qui montre son signe.

CORRIGÉ

Négation. Le quantificateur $\forall$ devient $\exists$ et l'inégalité est niée : « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 5 \leq 0$ ».

Valeur. Soit x un réel. Comme $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ et qu'un carré est positif ou nul :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= (x-2)^2 + 1 \\ &\geq 1 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion. La proposition de départ est vraie, et sa négation est fausse.

2.

« $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ et $n^2 < 9$ »

INDICE

Outil : change $\exists$ en $\forall$, puis applique une loi de Morgan.

CORRIGÉ

Négation. Le quantificateur $\exists$ devient $\forall$, et une loi de Morgan change le « et » en « ou » : « $\forall n \in \mathbb{N},\ n < 3$ ou $n^2 \geq 9$ ».

Valeur. Soit n un entier naturel.

- Si $n \geq 3$, alors $n \times n \geq 3 \times 3$, soit $n^2 \geq 9$.
- Sinon, $n < 3$.

Dans les deux cas, « $n < 3$ ou $n^2 \geq 9$ » est vraie.

Conclusion. La négation est vraie, donc la proposition de départ est fausse.

3.

« $\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 1 \Rightarrow x^3 > x)$ »

INDICE

Outil : la négation d'une implication est « hypothèse et négation de la conclusion ».

CORRIGÉ

Négation. Le contraire de « $x > 1 \Rightarrow x^3 > x$ » est « $x > 1$ et $x^3 \leq x$ ». La négation s'écrit « $\exists x \in \mathbb{R},\ x > 1$ et $x^3 \leq x$ ».

Valeur. Soit x un réel tel que $x > 1$. Alors $x > 0$ et $x^2 = x \times x > 1 \times x > 1$. En multipliant $x^2 > 1$ par $x > 0$:

$$x^3 = x \times x^2 > x.$$

Conclusion. La proposition de départ est vraie, et sa négation est fausse.

Exercice 6

Deux affirmations à réfuter

Deux camarades font chacun une affirmation sur des nombres.

1.

Amine affirme : « pour tout entier naturel n, $2^n + 1$ est un nombre premier ». Vérifier l'affirmation pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, puis montrer qu'elle est fausse.

INDICE

Outil : un contre-exemple ; poursuis les essais avec les entiers suivants.

CORRIGÉ

Premiers essais. On obtient $2^0 + 1 = 2$, $2^1 + 1 = 3$ et $2^2 + 1 = 5$: ces trois nombres sont premiers.

Contre-exemple. Pour $n = 3$:

$$2^3 + 1 = 9 = 3 \times 3.$$

L'entier 9 admet le diviseur 3, autre que 1 et 9 : il n'est pas premier.

Conclusion. L'affirmation d'Amine est vraie pour $n = 0$, 1 et 2, mais elle est fausse : l'entier 3 est un contre-exemple. Quelques essais réussis ne prouvent pas un « pour tout ».

2.

Salma affirme : « pour tous réels a et b, $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ ». Montrer qu'elle se trompe.

INDICE

Outil : un contre-exemple ; teste des valeurs simples, comme 0, 1 ou 2, sans prendre $b = 0$.

CORRIGÉ

Il suffit d'un couple de réels pour lequel l'égalité est fausse. Pour $a = 2$ et $b = 1$: $(2 - 1)^2 = 1$ et $2^2 - 1^2 = 3$, avec $1 \neq 3$.

Conclusion. Salma se trompe : le couple $a = 2$, $b = 1$ est un contre-exemple. L'identité correcte est, pour tous réels a et b :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Exercice 7

Une première récurrence : la somme des nombres pairs

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition : « $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ ».

1.

Vérifier que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

INDICE

Outil : calcule séparément les deux membres.

CORRIGÉ

On calcule séparément les deux membres.

- Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 2, et $1 \times 2 = 2$.
- Pour $n = 2$: $2 + 4 = 6$, et $2 \times 3 = 6$.
- Pour $n = 3$: $2 + 4 + 6 = 12$, et $3 \times 4 = 12$.

Conclusion. Dans chaque cas, les deux membres sont égaux : $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

2.

Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ est vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie.

INDICE

Début : écris $2 + 4 + \cdots + 2n + 2(n+1)$, puis remplace la somme jusqu'à $2n$ grâce à $P(n)$.

CORRIGÉ

On veut établir $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} &2 + 4 + \cdots + 2(n+1) \\ &= (n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$. On ajoute le terme suivant, $2(n+1)$, puis on met $n+1$ en facteur :

$$\begin{aligned} &2 + 4 + \cdots + 2n + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) \\ &= (n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Conclusion. $P(n+1)$ est vraie.

3.

Conclure, puis calculer $2 + 4 + \cdots + 100$.

INDICE

Outil : le principe de récurrence ; remarque que $100 = 2 \times 50$.

CORRIGÉ

Récurrence. $P(1)$ est vraie (question 1) et, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ entraîne $P(n+1)$ (question 2). D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Calcul. Comme $100 = 2 \times 50$, on applique $P(50)$:

$$\begin{aligned} &2 + 4 + \cdots + 100 \\ &= 50 \times 51 = 2\,550. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$; en particulier, $2 + 4 + \cdots + 100 = 2\,550$.

Exercice 8

Les prix d'un rayon imaginaire

Dans un magasin imaginaire, un rayon propose cinq articles aux prix suivants, en DH (données fictives) : 45, 60, 72, 38 et 76. On note E l'ensemble de ces cinq prix. On considère les phrases :

- (a) « tous les articles coûtent moins de 80 DH » ;
- (b) « au moins un article coûte plus de 74 DH » ;
- (c) « tous les articles coûtent plus de 40 DH ».

1.

Écrire chacune des phrases (a), (b) et (c) avec un quantificateur.

INDICE

Outil : « tous » se traduit par $\forall$, « au moins un » par $\exists$; la variable p désigne un prix de E.

CORRIGÉ

La variable p désigne un prix de l'ensemble E.

- (a) « $\forall p \in E,\ p < 80$ » ;
- (b) « $\exists p \in E,\ p > 74$ » ;
- (c) « $\forall p \in E,\ p > 40$ ».

2.

Donner la valeur de vérité de chacune des trois propositions.

INDICE

Outil : pour « pour tout », contrôle les cinq prix ; pour « il existe », un seul prix suffit.

CORRIGÉ

- (a) est vraie : le plus grand prix est 76, et $76 < 80$.
- (b) est vraie : l'article à 76 DH convient, car $76 > 74$.
- (c) est fausse : l'article à 38 DH ne convient pas, car $38 \leq 40$.

Conclusion. Les propositions (a) et (b) sont vraies ; la proposition (c) est fausse.

3.

Écrire la négation de (c) avec un quantificateur, puis en français. Quel article la rend vraie ?

INDICE

Outil : la négation de « $\forall p \in E,\ p > 40$ » commence par $\exists$.

CORRIGÉ

Négation. Le quantificateur $\forall$ devient $\exists$ et l'inégalité est niée : « $\exists p \in E,\ p \leq 40$ ».

En français. « Au moins un article coûte 40 DH ou moins. »

Conclusion. L'article à 38 DH rend vraie cette négation : c'est un contre-exemple à la phrase (c).