BURHAN

# Notions de logique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/notions-de-logique/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Notions de logique | Semestre 1 |

## Une promesse est-elle tenue ?

Un magasin imaginaire affiche sur sa vitrine : « Si tu achètes deux articles, alors le troisième est offert. »

Ce soir, quatre clients sont passés à la caisse. Un seul a de quoi se plaindre.

Lequel ? Pour répondre, il faut savoir exactement ce que promet une phrase en « si… alors ».

**Devine : Une promesse rompue ?**

Dans quel cas le magasin n'a-t-il **pas tenu** sa promesse ?

**A.** Amine achète deux articles et reçoit le troisième gratuitement.

**Faux.**
La condition est remplie et le cadeau est donné : la promesse est tenue.

**B.** Youssef achète un seul article et paie le deuxième.

**Faux.**
Youssef n'a pas acheté deux articles : la promesse ne lui garantissait rien.

**C.** Salma achète deux articles et paie aussi le troisième.

**Juste.**
Juste : la condition est remplie, mais le cadeau manque.

**D.** Nadia achète un seul article et reçoit un petit cadeau.

**Faux.**
Rien n'interdit au magasin d'être généreux : la promesse n'est pas rompue.

**Correction**

La promesse ne concerne que les clients qui achètent deux articles. Elle est rompue dans un seul cas : la condition est remplie, et le troisième article n'est pas offert. C'est ce qui arrive à Salma.

Youssef et Nadia ne remplissent pas la condition : envers eux, le magasin ne s'était engagé à rien.

Une phrase en « si… alors » est une **implication**.

Dans ce chapitre, tu apprends à dire si une phrase mathématique est vraie ou fausse, à écrire son contraire sans te tromper, puis à choisir une façon de la démontrer. Ces outils serviront dans tous les chapitres, et pour lire les règles de la vie économique.

## Propositions, négation, « et », « ou »

### Vrai, faux, ou ni l'un ni l'autre

**En clair.** Dans la vie, beaucoup de phrases se discutent : « ce manteau est trop cher » dépend de celui qui parle.

En mathématiques, on veut des phrases dont la vérité ne se discute pas. « $12$ est un nombre pair » est vraie pour tout le monde ; « $12$ est un nombre impair » est fausse pour tout le monde.

**Devine : Trier des phrases**

Laquelle de ces phrases est vraie ou fausse, sans discussion possible ?

**A.** « Un téléphone à $1500$ DH est bon marché. »

**Faux.**
C'est une opinion : pour l'un, c'est bon marché ; pour l'autre, c'est cher.

**B.** « $3x = 12$ »

**Faux.**
Sa vérité dépend de $x$ : vraie pour $x = 4$, fausse pour $x = 1$.

**C.** « Ferme la porte du magasin. »

**Faux.**
C'est un ordre : il n'est ni vrai ni faux.

**D.** « $7$ est plus grand que $9$. »

**Juste.**
Juste : cette phrase est fausse, sans discussion. Une phrase fausse compte aussi.

**Correction**

Seule « $7$ est plus grand que $9$ » a une valeur tranchée : elle est fausse, et tout le monde est d'accord.

L'opinion se discute, l'ordre n'est ni vrai ni faux, et « $3x = 12$ » dépend du nombre $x$.

Une phrase fausse, mais sans discussion possible, est bien une proposition.

**Définition : Proposition et valeur de vérité**

Une **proposition** est un énoncé (mathématique, ou issu d'une situation précise) qui est soit vrai, soit faux, sans pouvoir être les deux à la fois. On dit qu'une proposition vraie a la **valeur de vérité** V (vrai) et qu'une proposition fausse a la valeur de vérité F (faux).

Par exemple, « $15$ est un multiple de $5$ » est une proposition vraie, et « $\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ » est une proposition fausse. L'énoncé « $2x - 1 = 5$ » n'est pas une proposition tant que le réel $x$ n'est pas précisé.

**Exemple : proposition ou non ?**

- « $45$ est divisible par $9$ » est une proposition vraie, car $45 = 9 \times 5$.
- « $2^5 = 25$ » est une proposition fausse, car $2^5 = 32$.
- Dans un magasin imaginaire, « un article à $80$ DH, avec une remise de $20$ DH, coûte $60$ DH » est une proposition vraie : $80 - 20 = 60$.
- « $x + 4 = 10$ » n'est pas une proposition tant que $x$ n'est pas précisé. Pour $x = 6$, elle devient vraie ; pour $x = 5$, elle devient fausse.

## Non, et, ou

**En clair.** Avec les petits mots « non », « et », « ou », on fabrique de nouvelles propositions. Ces petits mots s'appellent des **connecteurs**.

Une promotion fictive est réservée aux clients qui ont la carte du magasin **et** qui achètent pour plus de $300$ DH : il faut les deux conditions.

Une autre boutique accepte le paiement en espèces **ou** par carte : une seule condition suffit.

**Définition : Négation, conjonction et disjonction**

Soit $P$ et $Q$ deux propositions.

- La **négation** de $P$, notée $\overline{P}$ (lue « non $P$ »), est vraie lorsque $P$ est fausse, et fausse lorsque $P$ est vraie.
- La **conjonction** « $P$ et $Q$ » est vraie lorsque $P$ et $Q$ sont vraies toutes les deux ; elle est fausse dans les trois autres cas.
- La **disjonction** « $P$ ou $Q$ » est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ; elle est fausse seulement lorsque $P$ et $Q$ sont fausses toutes les deux.

**Exemple : une petite table**

Soit $P$ : « $6$ est pair », vraie, et $Q$ : « $6 > 10$ », fausse. D'après les définitions de la négation, de la conjonction et de la disjonction :

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $\overline{Q}$ | $P$ et $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | F | F | V | F | V |

« $P$ et $Q$ » est fausse, car $Q$ l'est. « $P$ ou $Q$ » est vraie, car $P$ l'est.

## La méthode, un piège, à toi

**Méthode : trouver la valeur de vérité d'une proposition composée**

1. **Évalue** chaque proposition simple : V ou F, avec un calcul si besoin.
2. **Repère** le connecteur principal : celui qui agit en dernier, comme dans un calcul avec parenthèses.
3. **Applique** sa définition : « et » demande deux V ; « ou » demande au moins un V ; « non » échange V et F.
4. **Conclus** par V ou F. Inutile de dresser une table complète quand les valeurs sont connues.

**Attention : le « ou » des mathématiques**

✗ « Le client fictif a la carte du magasin et paie par carte bancaire. Donc la condition « avoir la carte ou payer par carte » est fausse, puisque les deux sont vraies. »

✓ En mathématiques, « ou » est **inclusif** : « $P$ ou $Q$ » est vraie aussi quand $P$ et $Q$ sont vraies toutes les deux. Elle n'est fausse que si les deux sont fausses.

Ainsi « $10$ est pair ou $10 > 3$ » est vraie. Le « ou » qui exclut, comme dans « thé ou café », n'est pas celui des mathématiques.

**Vérifie : Laquelle est fausse ?**

Soit $n = 15$. Laquelle de ces propositions est fausse ?

**A.** « $n$ est impair ou $n > 10$ »
**Faux.**
Les deux membres sont vrais : avec le « ou » inclusif, la proposition est vraie.

**B.** « $n$ est pair et $n > 10$ »
**Juste.**
Juste : « $15$ est pair » est fausse, donc la conjonction est fausse.

**C.** « $n$ est pair ou $n$ est multiple de $5$ »
**Faux.**
Le second membre est vrai : un seul suffit pour « ou ».

**D.** « $n$ est impair et $n$ est multiple de $5$ »
**Faux.**
Les deux membres sont vrais : la conjonction est vraie.

**Correction**
Pour $n = 15$ :

- « $n$ est pair » est F, et « $n$ est impair » est V ;
- « $n > 10$ » est V ;
- « $n$ est multiple de $5$ » est V.

Une conjonction exige deux V : « $n$ est pair et $n > 10$ » est donc F. Les trois autres propositions sont vraies.

**À toi : Trois propositions composées**

Soit $A$ : « $21$ est un nombre premier » et $B$ : « $21$ est divisible par $3$ ». Donne la valeur de vérité de $A$ et de $B$, puis celle de « $\overline{A}$ et $B$ », de « $A$ ou $\overline{B}$ » et de « $A$ ou $B$ ». Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**
Commence par $A$ et $B$ : écris $21$ comme un produit.
**Indice 2**
Applique la méthode : pour chaque proposition composée, repère le connecteur principal.
**Indice 3**
Point délicat : « ou » est vraie dès qu'un membre est vrai ; elle n'est fausse que si les deux sont faux.

**Réponse**
**Propositions simples.** On a $21 = 3 \times 7$ : $21$ n'est pas premier, donc $A$ est F, et $B$ est V. Alors $\overline{A}$ est V, et $\overline{B}$ est F.

**Propositions composées.**

- « $\overline{A}$ et $B$ » : V et V, donc V.
- « $A$ ou $\overline{B}$ » : F ou F, donc F.
- « $A$ ou $B$ » : F ou V, donc V.

## Implication et équivalence

## Une promesse, en logique

**En clair.** Reprends la promesse du magasin. Note $P$ : « le client achète deux articles » et $Q$ : « le troisième article est offert ». La promesse « si $P$, alors $Q$ » s'écrit :

$$P \Rightarrow Q$$

Elle n'est rompue que dans un cas : $P$ vraie et $Q$ fausse. Un client qui n'achète pas deux articles ne peut rien reprocher au magasin.

**Devine : Une hypothèse fausse**

Pour un réel $x$, on considère l'implication « $x > 5 \Rightarrow x > 3$ ». Pour $x = 1$, est-elle vraie ?

**A.** Oui : son hypothèse $1 > 5$ est fausse, et cela suffit.
**Juste.**
Juste : une implication n'est fausse que si l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse.

**B.** Non : $1 > 5$ et $1 > 3$ sont fausses toutes les deux.
**Faux.**
Comme pour Youssef : quand l'hypothèse est fausse, la promesse n'est pas rompue.

**C.** Non : une implication est fausse dès que sa conclusion l'est.
**Faux.**
Il faut aussi que l'hypothèse soit vraie : ce n'est pas le cas ici.

**D.** On ne peut pas savoir : elle n'a pas de sens pour $x = 1$.
**Faux.**
Elle a un sens : chaque membre devient une proposition, ici fausse.

**Correction**
Pour $x = 1$, l'hypothèse $1 > 5$ est fausse, et la conclusion $1 > 3$ aussi.

Une implication n'est fausse que si l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse : ce n'est pas le cas. L'implication est donc vraie pour $x = 1$, comme la promesse du magasin face à un client qui n'achète qu'un article.

## Implication, réciproque, équivalence

**Définition : Implication et équivalence**

Soit $P$ et $Q$ deux propositions.

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ (lue « $P$ implique $Q$ », ou « si $P$, alors $Q$ ») est fausse seulement lorsque $P$ est vraie et $Q$ est fausse ; elle est vraie dans les trois autres cas.
- La proposition $Q \Rightarrow P$ s'appelle la **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ (lue « $P$ équivaut à $Q$ », ou « $P$ si et seulement si $Q$ ») est vraie lorsque $P$ et $Q$ ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

**Exemple : implications, réciproque, équivalence**

- Une boutique fictive annonce : « si tes achats dépassent $500$ DH, alors la livraison est gratuite ». Un client fait $650$ DH d'achats et paie $30$ DH de livraison : hypothèse vraie, conclusion fausse. La règle est rompue.
- Pour $x = -3$ : « $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ » est vraie, car son hypothèse est fausse. Sa réciproque « $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ » est fausse : $9 > 0$ est vraie, mais $-3 > 0$ est fausse.

- Pour $x = 4$, puis pour $x = 1$, l'équivalence « $2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ » est vraie : ses deux membres ont la même valeur, V puis F.

**Attention : une implication n'est pas sa réciproque**

✗ « Si un entier est un multiple de $4$, alors il est pair. Donc tout entier pair est un multiple de $4$. »

✓ L'implication est vraie, mais sa réciproque est fausse : $6$ est pair et n'est pas un multiple de $4$. Une implication vraie peut avoir une réciproque fausse.

Ne confonds pas non plus la réciproque avec la **contraposée**, que tu verras plus loin : « si un entier n'est pas pair, alors il n'est pas un multiple de $4$ ».

## Vraie dans tous les cas

**En clair.** « Le prix de ce stylo a augmenté, ou il n'a pas augmenté » : cette phrase est vraie, quel que soit le prix.

Elle ne dit rien sur le stylo ; sa forme suffit à la rendre vraie. Une telle proposition s'appelle une **loi logique**.

**Définition : Loi logique**

Une **loi logique** est une proposition construite à partir de propositions $P$, $Q$, $R$, … à l'aide des connecteurs (négation, « et », « ou », $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$), qui est **vraie quelles que soient** les valeurs de vérité de $P$, $Q$, $R$, …

Par exemple, « $P$ ou $\overline{P}$ » est une loi logique : l'une des deux propositions $P$ et $\overline{P}$ est toujours vraie.

**Exemple : loi logique ou non ?**

Pour savoir si une proposition est une loi logique, cherche **le cas où elle serait fausse**.

- « S'il pleut, alors il pleut » est vraie, quel temps qu'il fasse. Sa forme est « $P \Rightarrow P$ », qui serait fausse si $P$ était vraie et fausse à la fois : impossible. C'est une loi logique.
- « $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$ » serait fausse si « $P$ et $Q$ » était vraie et $P$ fausse. C'est impossible, car « $P$ et $Q$ » vraie exige $P$ vraie : c'est une loi logique.
- « $P \text{ et } \overline{P}$ » est toujours fausse : ce n'est pas une loi logique.

> **Vérifie : Une loi logique ?**
>
> Soit $P$ et $Q$ deux propositions. Laquelle de ces propositions est une loi logique ?

**A.** « $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$ »

**Juste.**

Juste : si $P$ est vraie, « $P$ ou $Q$ » l'est aussi.

**B.** « $P \Rightarrow Q$ »

**Faux.**

Elle est fausse quand $P$ est vraie et $Q$ fausse.

**C.** « $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow P$ »

**Faux.**

Elle est fausse quand $P$ est fausse et $Q$ vraie.

**D.** « $P$ et $\overline{P}$ »

**Faux.**

Elle est toujours fausse : c'est le contraire d'une loi logique.

**Correction**

« $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$ » serait fausse si $P$ était vraie et « $P$ ou $Q$ » fausse. Or « $P$ ou $Q$ » est vraie dès que $P$ l'est : ce cas est impossible.

Elle est donc vraie dans tous les cas : c'est une loi logique. Chacune des trois autres a un cas où elle est fausse.

**À toi : Une implication et sa réciproque**

Pour un réel $x$, on considère l'implication « $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ ». Donne sa valeur de vérité pour $x = 1$, pour $x = -3$ et pour $x = 5$. Écris ensuite sa réciproque, et donne sa valeur pour $x = -3$. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**

Pour chaque valeur, calcule séparément l'hypothèse et la conclusion.

**Indice 2**

Une implication n'est fausse que si son hypothèse est vraie et sa conclusion fausse.

**Indice 3**

Point délicat : pour $x = -3$, élève $-3$ au carré avant de comparer le résultat à $4$.

**Réponse**

- Pour $x = 1$ : $1 < 2$ est V et $1 < 4$ est V, donc l'implication est V.
- Pour $x = -3$ : $-3 < 2$ est V, mais $(-3)^2 = 9$ et $9 < 4$ est F. L'implication est F.
- Pour $x = 5$ : $5 < 2$ est F, donc l'implication est V.

La réciproque est « $x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$ ». Pour $x = -3$, son hypothèse $9 < 4$ est F : la réciproque est V.

## Lois logiques : négations et contraposée

### Contredire une publicité

**En clair.** Une publicité fictive affirme : « le prix a baissé et la qualité est restée la même ». Un client veut prouver qu'elle ment. Doit-il prouver que les deux affirmations sont fausses ? Non : il suffit qu'une des deux soit fausse.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Une phrase en « et » demande les deux ; si une seule manque, la phrase est fausse. Pour nier une proposition, on décrit exactement les cas où elle est fausse.

**Devine : Le contraire exact**

Quelle phrase dit exactement le contraire de « le prix a baissé et la qualité est restée la même » ?

**A.** « Le prix n'a pas baissé et la qualité n'est pas restée la même. »

**Faux.**
Trop fort : un seul mensonge suffit à rendre la publicité fausse.

**B.** « Le prix n'a pas baissé ou la qualité n'est pas restée la même. »

**Juste.**
Juste : la publicité est fausse dès qu'une des deux affirmations l'est.

**C.** « Le prix a augmenté ou la qualité a baissé. »

**Faux.**
« Ne pas baisser » n'est pas « augmenter » : le prix peut être resté le même.

**D.** « Le prix a baissé ou la qualité n'est pas restée la même. »

**Faux.**
Seule la seconde affirmation est niée : il faut nier les deux, et changer « et » en « ou ».

**Correction**
« $P$ et $Q$ » est fausse dès qu'un des deux membres est faux. Le contraire est donc « le prix n'a pas baissé **ou** la qualité n'est pas restée la même ».

Attention aussi aux mots : le contraire de « a baissé » est « n'a pas baissé », et non « a augmenté ».

### Double négation et lois de Morgan

**Propriété : Double négation et lois de Morgan**

Soit $P$ et $Q$ deux propositions. Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ ;
- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$ ;
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

**Démonstration**

**Étape 1.** Par définition de la négation, $\overline{\overline{P}}$ est vraie si et seulement si $\overline{P}$ est fausse, c'est-à-dire si $P$ est vraie.

**Étape 2.** Par définition de la négation, $\overline{(P \text{ et } Q)}$ est vraie si et seulement si « $P$ et $Q$ » est fausse, c'est-à-dire, par définition de la conjonction, si l'une au moins des propositions $P$, $Q$ est fausse, autrement dit si « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ » est vraie.

**Étape 3.** De même, $\overline{(P \text{ ou } Q)}$ est vraie si et seulement si « $P$ ou $Q$ » est fausse, c'est-à-dire, par définition de la disjonction, si $P$ et $Q$ sont fausses, autrement dit si « $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ » est vraie.

**Conclusion.** Les deux membres de chaque équivalence ont toujours la même valeur de vérité : ce sont des lois logiques.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Pour nier, on décrit **les cas où la proposition est fausse**.

« $P$ et $Q$ » est fausse dès qu'un membre l'est : sa négation est « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ ».

« $P$ ou $Q$ » n'est fausse que si les deux le sont : sa négation est « $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ ».

En niant, « et » devient « ou », et « ou » devient « et ».

**Vérifie : Le cas qui rend « ou » faux**

Dans la preuve, quand la proposition « $P$ ou $Q$ » est-elle fausse ?

**A.** Quand l'une au moins des deux est fausse.

**Faux.**

C'est le cas où « $P$ et $Q$ » est fausse, pas « $P$ ou $Q$ ».

**B.** Quand $P$ et $Q$ sont vraies toutes les deux.

**Faux.**

Le « ou » est inclusif : dans ce cas, il est vrai.

**C.** Quand $P$ est fausse, quelle que soit $Q$.

**Faux.**

Si $Q$ est vraie, « $P$ ou $Q$ » reste vraie.

**D.** Quand $P$ et $Q$ sont fausses toutes les deux.

**Juste.**

Juste : c'est le seul cas, d'après la définition de la disjonction.

**Correction**

Par définition de la disjonction, « $P$ ou $Q$ » est fausse seulement si $P$ et $Q$ sont fausses. C'est exactement le cas où « $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ » est vraie.

> Les propositions $\overline{(P \text{ ou } Q)}$ et « $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ » ont donc toujours la même valeur.

**Exemple : nier avec les lois de Morgan**

- Pour un réel $x$, la négation de « $x \geq 2$ et $x < 7$ » est « $x < 2$ ou $x \geq 7$ ». Pour $x = 7$, la première est F et la seconde est V.
- La négation de « l'article est en stock ou il arrive demain » est « l'article n'est pas en stock et il n'arrive pas demain ».
- Double négation : dire « il est faux que $9$ n'est pas un carré », c'est dire « $9$ est un carré ».

## Les lois de l'implication

**En clair.** Une boutique fictive a une règle : « si un client paie plus de $400$ DH, alors il reçoit un bon d'achat ». Un client repart sans bon d'achat. Si la règle est respectée, il n'a donc pas payé plus de $400$ DH.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Chacune de ces propositions est fausse dans un seul cas, et c'est le même cas. Elles ont donc toujours la même valeur.

**Propriété : Lois de l'implication et de l'équivalence**

Soit $P$ et $Q$ deux propositions. Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \text{ ou } Q)$ ;
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ ; l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la **contraposée** de $P \Rightarrow Q$ ;
- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \text{ et } \overline{Q})$ ;
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Par définition, $P \Rightarrow Q$ est fausse dans un seul cas : $P$ vraie et $Q$ fausse. Or « $\overline{P}$ ou $Q$ » est fausse seulement lorsque $\overline{P}$ et $Q$ sont fausses : le même cas.

**Étape 2.** $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est fausse seulement lorsque $Q$ est fausse et $P$ vraie : encore le même cas.

**Étape 3.** $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ est vraie exactement lorsque $P \Rightarrow Q$ est fausse : $P$ vraie et $Q$ fausse, seul cas où « $P$ et $\overline{Q}$ » est vraie.

**Étape 4.** « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ » est fausse exactement lorsque $P$ est vraie et $Q$ fausse, ou $Q$ vraie et $P$ fausse : cas où $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.

**Conclusion.** Les deux membres de chaque équivalence ont toujours la même valeur de vérité : ce sont des lois logiques.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Toute la preuve tient en une idée : **trouver le seul cas où chaque proposition est fausse**.

$P \Rightarrow Q$, « $\overline{P}$ ou $Q$ » et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ sont fausses exactement quand $P$ est vraie et $Q$ fausse. Elles ont donc toujours la même valeur.

Ce cas unique donne aussi la négation de l'implication : « $P$ et $\overline{Q}$ ».

**Vérifie : Quand la contraposée est-elle fausse ?**

Dans la preuve, dans quel cas la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est-elle fausse ?

**A.** Quand $Q$ est fausse et $P$ vraie.
**Juste.**
Juste : $\overline{Q}$ est vraie et $\overline{P}$ est fausse.

**B.** Quand $Q$ est vraie et $P$ fausse.
**Faux.**
Alors $\overline{Q}$ est fausse : l'implication est vraie.

**C.** Quand $P$ et $Q$ sont fausses.
**Faux.**
Alors $\overline{P}$ est vraie : la conclusion est vraie, l'implication aussi.

**D.** Quand $P$ et $Q$ sont vraies.
**Faux.**
Alors $\overline{Q}$ est fausse : l'hypothèse est fausse, l'implication est vraie.

**Correction**
$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est fausse seulement si $\overline{Q}$ est vraie et $\overline{P}$ fausse, c'est-à-dire $Q$ fausse et $P$ vraie.

C'est le même cas que pour $P \Rightarrow Q$ : les deux implications ont toujours la même valeur de vérité.

**Exemple : contraposée et réciproque d'une règle**

- Règle de la boutique : « si un client paie plus de $400$ DH, alors il reçoit un bon d'achat ». Sa contraposée : « si un client ne reçoit pas de bon d'achat, alors il n'a pas payé plus de $400$ DH ». D'après les lois de l'implication, elle a la même valeur que la règle.
- Pour un entier $n$ : « si $n$ est multiple de $10$, alors $n$ est pair » a pour contraposée « si $n$ est impair, alors $n$ n'est pas multiple de $10$ ». Sa réciproque est fausse : $4$ est pair, mais n'est pas multiple de $10$.

## Écrire une négation

**Méthode : écrire la négation d'une proposition composée**

1. **Échange** « et » et « ou », en niant chaque membre : ce sont les lois de Morgan.
2. **Nie** une implication $P \Rightarrow Q$ par « $P$ et $\overline{Q}$ » : la négation d'une implication n'est jamais une implication.
3. **Simplifie** les doubles négations.
4. **Soigne** les inégalités : la négation de $x < 3$ est $x \geq 3$, et celle de $x \leq 3$ est $x > 3$.

**Exemple : nier une implication**

- La négation de « si le stock est vide, alors la commande est annulée » est « le stock est vide et la commande n'est pas annulée ».
- Pour un réel $x$, la négation de « $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ » est « $x > 3$ et $x^2 \leq 9$ ».
- La négation de « $x < 0$ ou $x \geq 5$ » est « $x \geq 0$ et $x < 5$ ».

**Vérifie : Nier une implication**

Pour deux réels $a$ et $b$, quelle est la négation de « $a \geq 0 \Rightarrow b < 2$ » ?

**A.** « $a < 0 \Rightarrow b \geq 2$ »

**Faux.**
La négation d'une implication n'est pas une implication.

**B.** « $a < 0$ et $b \geq 2$ »

**Faux.**
On garde l'hypothèse telle quelle : seule la conclusion est niée.

**C.** « $a \geq 0$ et $b \geq 2$ »

**Juste.**
Juste : l'hypothèse est gardée, la conclusion est niée.

**D.** « $a \geq 0 \Rightarrow b \geq 2$ »

**Faux.**
C'est encore une implication : elle peut être vraie en même temps que la proposition de départ.

**Correction**
D'après les lois de l'implication, la négation de $P \Rightarrow Q$ est « $P$ et $\overline{Q}$ ».

Ici $P$ est $a \geq 0$, et $Q$ est $b < 2$, de négation $b \geq 2$. La négation cherchée est donc « $a \geq 0$ et $b \geq 2$ ».

## À toi, puis le coin devoir

**À toi : Négation et contraposée**

Une entreprise fictive affiche la règle : « si le bénéfice du mois est positif, alors l'entreprise verse une prime ». Écris sa négation, puis sa contraposée. Écris enfin, pour deux réels $x$ et $y$, la négation de « $x \leq 1$ ou $y > 4$ ». Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**
Pour la négation d'une implication, garde l'hypothèse et nie la conclusion.
**Indice 2**
Pour la contraposée, nie les deux membres et échange-les.
**Indice 3**
Point délicat : pour nier une inégalité, change son sens, et passe de stricte à large, ou de large à stricte.

**Réponse**

- Négation : « le bénéfice du mois est positif et l'entreprise ne verse pas de prime ».
- Contraposée : « si l'entreprise ne verse pas de prime, alors le bénéfice du mois n'est pas positif ».
- D'après les lois de Morgan, la négation de « $x \leq 1$ ou $y > 4$ » est « $x > 1$ et $y \leq 4$ ».

**Remarque : Coin devoir : rédiger une négation**

En devoir, une négation se justifie en une ligne, sans table. Nomme toujours la loi employée : lois de Morgan, ou négation d'une implication.

Écris par exemple : « D'après les lois de Morgan, la négation de $a > 0$ ou $b > 0$ est $a \leq 0$ et $b \leq 0$. »

Relis ensuite chaque inégalité : la négation de $>$ est $\leq$.

## Fonctions propositionnelles et quantificateurs

## Tous, ou au moins un ?

**En clair.** Un journal imaginaire titre : « tous les produits du marché ont baissé ». Un autre : « au moins un produit a baissé ». Ce ne sont pas les mêmes affirmations.

Pour vérifier la première, il faut regarder chaque produit. Pour la seconde, un seul produit suffit.

**Devine : Quatre prix**

Données fictives : quatre produits passent de $50$ à $45$ DH, de $120$ à $120$ DH, de $80$ à $72$ DH et de $30$ à $33$ DH. Quelle phrase est vraie ?

**A.** « Tous les produits ont baissé. »

**Faux.**
Le deuxième n'a pas bougé, et le quatrième a augmenté.

**B.** « Aucun produit n'a baissé. »

**Faux.**
Le premier et le troisième ont baissé.

**C.** « Au moins un produit a baissé. »

**Juste.**
Juste : le premier suffit, de $50$ à $45$ DH.

**D.** « Tous les produits ont augmenté. »

**Faux.**
Le premier a baissé : cela suffit à rendre la phrase fausse.

**Correction**
Le premier produit passe de $50$ à $45$ DH : il a baissé. Cela suffit pour « au moins un produit a baissé ».

En revanche, « tous ont baissé » est fausse : le deuxième n'a pas changé de prix, et le quatrième est passé à $33$ DH.

## Pour tout, il existe

**Définition : Fonction propositionnelle et quantificateurs**

Soit $E$ un ensemble. Une **fonction propositionnelle** sur $E$ est un énoncé $P(x)$ qui contient une variable $x$ et qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace $x$ par un élément de $E$.

- La proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » (lue « pour tout $x$ de $E$, $P(x)$ ») est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **chaque** élément $x$ de $E$. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- La proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » (lue « il existe $x$ dans $E$ tel que $P(x)$ ») est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément $x$ de $E$. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.
- La proposition « $\exists! x \in E,\ P(x)$ » est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **un et un seul** élément $x$ de $E$.

**En clair.** Trois symboles, trois lectures :

- $\forall$ se lit « pour tout » : la propriété vaut pour tous les éléments ;
- $\exists$ se lit « il existe » : un élément au moins convient ;

- $\exists!$ se lit « il existe un unique » : un seul élément convient.

**Exemple : lire une proposition quantifiée**

- « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ » se lit « pour tout réel $x$, $x^2 + 1 > 0$ ». Elle est vraie, car un carré est positif ou nul.
- « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 49$ » se lit « il existe un entier naturel $n$ tel que $n^2 = 49$ ». Elle est vraie : $n = 7$ convient.
- « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -4$ » est fausse : aucun carré n'est négatif.

**Exemple : une seule solution**

- « $\exists! x \in \mathbb{R},\ 3x - 7 = 5$ » est vraie : l'équation équivaut à $3x = 12$, puis à $x = 4$. Il y a une solution, et une seule.
- « $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 16$ » est fausse : $4$ et $-4$ conviennent tous les deux. En revanche, « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 16$ » est vraie.

**Remarque : écrire avec des quantificateurs**

Après « $\forall x \in E$ » ou « $\exists x \in E$ », on met une virgule, puis la propriété.

La lettre $x$ est une variable : « $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 + 1 > 0$ » dit la même chose que « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ ».

Les symboles $\forall$ et $\exists$ s'écrivent dans les formules ; dans une phrase, écris « pour tout » et « il existe ».

## L'ordre compte

**Attention : l'ordre des quantificateurs**

✗ « Chaque client d'un magasin fictif a un vendeur qui le conseille. Donc un même vendeur conseille tous les clients. »

✓ Échanger $\forall$ et $\exists$ change le sens. La proposition

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n$$

est vraie : $m$ peut dépendre de $n$, par exemple $m = 2n + 1$. En revanche, la proposition

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m > n$$

est fausse : pour $n = m$, on n'a pas $m > m$.

**Vérifie : Laquelle est fausse ?**

Laquelle de ces propositions est fausse ?

**A.** « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$ »

**Juste.**

Juste : un même $y$ devrait valoir $-x$ pour tous les $x$ à la fois.

**B.** « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$ »

**Faux.**

Vraie : pour chaque $x$, le réel $y = -x$ convient.

**C.** « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$ »

**Faux.**

Vraie : $x = 1$ et $y = -1$ conviennent.

**D.** « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \times y = x$ »

**Faux.**

Vraie : $y = 1$ convient pour chaque $x$.

**Correction**

« $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$ » demande un seul $y$ qui convienne pour tous les $x$.

Pour $x = 0$, il faut $y = 0$ ; pour $x = 1$, il faut $y = -1$. Aucun $y$ ne peut valoir les deux : la proposition est fausse.

Dans l'ordre inverse, $y$ peut dépendre de $x$.

**Exemple : traduire une phrase économique**

Données fictives : $E$ est l'ensemble des articles d'un magasin, et $p(a)$ le prix de l'article $a$, en DH.

- « Tous les articles coûtent au plus $200$ DH » s'écrit « $\forall a \in E,\ p(a) \leq 200$ ».
- « Un article au moins coûte moins de $20$ DH » s'écrit « $\exists a \in E,\ p(a) < 20$ ».
- « Un seul article coûte exactement $99$ DH » s'écrit « $\exists! a \in E,\ p(a) = 99$ ».

**À toi : Écrire et juger**

Écris avec des quantificateurs, puis donne la valeur de vérité : (a) « le carré d'un entier naturel est toujours supérieur ou égal à cet entier » ; (b) « il existe un réel dont le double est égal au triple » ; (c) « un seul réel $x$ vérifie $5x + 2 = 17$ ». Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**

Repère d'abord le mot « tout », « il existe » ou « un seul », et l'ensemble concerné.

**Indice 2**

Pour (b), cherche $x$ tel que $2x = 3x$ ; pour (c), résous l'équation.

**Indice 3**

Point délicat : pour (a), pense à $n = 0$ et à $n = 1$ ; « supérieur ou égal » permet l'égalité.

**Réponse**

**(a)** « $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq n^2$ » est vraie. Pour $n = 0$, il y a égalité. Pour $n \geq 1$, on multiplie les deux membres de $n \geq 1$ par $n$, qui est positif :

$$n^2 = n \times n \geq n \times 1 = n.$$

**(b)** « $\exists x \in \mathbb{R},\ 2x = 3x$ » est vraie : $x = 0$ convient.

**(c)** « $\exists! x \in \mathbb{R},\ 5x + 2 = 17$ » est vraie : l'équation équivaut à $5x = 15$, soit $x = 3$, seule solution.

## Nier une proposition quantifiée ; le contre-exemple

## Contredire une affirmation générale

**En clair.** Une boutique imaginaire affirme : « tous nos articles coûtent moins de $100$ DH ». Pour la contredire, inutile de vérifier tous les articles : un seul article qui ne respecte pas l'affirmation suffit.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Une affirmation « pour tout » est fausse dès qu'un élément ne vérifie pas la propriété.

**Devine : Contredire exactement**

Quelle phrase est exactement le contraire de « tous nos articles coûtent moins de $100$ DH » ?

**A.** « Aucun article ne coûte moins de $100$ DH. »
**Faux.**
Trop fort : un seul article suffit à contredire.

**B.** « Un article au moins coûte plus de $100$ DH. »
**Faux.**
Il manque le cas d'un article à exactement $100$ DH.

**C.** « Tous les articles coûtent plus de $100$ DH. »
**Faux.**
Le quantificateur doit changer : « tous » devient « au moins un ».

**D.** « Un article au moins coûte $100$ DH ou plus. »
**Juste.**
Juste : un seul article suffit, et $100$ DH tout rond contredit déjà.

**Correction**

« Tous les articles coûtent moins de $100$ DH » est fausse dès qu'un article coûte $100$ DH ou plus. Le contraire est donc « un article au moins coûte $100$ DH ou plus ».

Le quantificateur change, et la propriété est niée : si $p$ désigne le prix d'un article en DH, $p < 100$ devient $p \geq 100$.

## Négation d'une proposition quantifiée

**Propriété : Négation d'une proposition quantifiée**

Soit $E$ un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle sur $E$.

- La négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».
- La négation de « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Par définition de la négation, la négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie si et seulement si cette proposition est fausse, c'est-à-dire, par définition du quantificateur universel, s'il existe au moins un élément $x$ de $E$ pour lequel $P(x)$ est fausse, c'est-à-dire $\overline{P(x)}$ vraie. Par définition du quantificateur existentiel, c'est dire que « $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$ » est vraie.

**Étape 2.** De même, la négation de « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie si et seulement si aucun élément $x$ de $E$ ne rend $P(x)$ vraie, c'est-à-dire si $\overline{P(x)}$ est vraie pour chaque élément $x$ de $E$ : c'est la proposition « $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».

**Conclusion.** Dans chaque point, la négation et la proposition annoncée sont vraies dans les mêmes cas : elles ont toujours la même valeur de vérité.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La preuve traduit le mot « fausse » avec les définitions.

Une proposition « pour tout » est fausse quand **au moins un** élément ne convient pas. Une proposition « il existe » est fausse quand **aucun** élément ne convient.

En niant, $\forall$ devient $\exists$, $\exists$ devient $\forall$, et la propriété est niée.

**Vérifie : Quand « il existe » est-elle fausse ?**

Dans la preuve, quand la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est-elle fausse ?

**A.** Quand un élément au moins de $E$ rend $P(x)$ fausse.
**Faux.**
Un autre élément peut rendre $P(x)$ vraie : il en suffit d'un.

**B.** Quand aucun élément de $E$ ne rend $P(x)$ vraie.
**Juste.**

Juste : $\overline{P(x)}$ est alors vraie pour chaque élément de $E$.

**C.** Quand $E$ contient plusieurs éléments.

**Faux.**

Le nombre d'éléments ne décide rien : seule compte la propriété.

**D.** Quand $P(x)$ est vraie pour un seul élément.

**Faux.**

Un seul élément suffit à rendre « il existe » vraie.

**Correction**

« $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie dès qu'un élément convient. Elle est donc fausse seulement si aucun élément ne convient : $\overline{P(x)}$ est vraie pour chaque $x$ de $E$.

C'est la proposition :

$$\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$$

**Exemple : deux négations**

- La négation de « $\exists n \in \mathbb{N},\ 3n = 20$ » est « $\forall n \in \mathbb{N},\ 3n \neq 20$ ». C'est la négation qui est vraie : $20$ n'est pas un multiple de $3$.
- La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 2x - 1$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2x - 1$ ». Ici, la négation est fausse. Rappel : $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, et un carré est positif ou nul. Pour tout réel $x$, on a donc $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x^2 \geq 2x - 1$.

## Méthode, et un piège

**Méthode : écrire la négation d'une proposition quantifiée**

1. **Change** chaque quantificateur : $\forall$ devient $\exists$, et $\exists$ devient $\forall$. Garde leur ordre et les ensembles.
2. **Nie** la propriété qui suit, avec les lois de Morgan ou la négation d'une implication.
3. **Contrôle** : ta négation est vraie dans tous les cas où la proposition de départ est fausse, et seulement dans ceux-là.

**Exemple : deux quantificateurs**

- La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq x$ ». La négation est vraie : pour $x = -1$, aucun carré ne vaut $-1$.

- Données fictives : « pour tout article, il existe un fournisseur qui le livre en moins de $3$ jours ». Sa négation : « il existe un article tel que, pour tout fournisseur, ce fournisseur ne le livre pas en moins de $3$ jours ». Autrement dit, aucun fournisseur ne livre cet article en moins de $3$ jours.

**Attention : changer le quantificateur et nier la propriété**

✗ « La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x+3>1$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ x+3<1$ ». »

✓ On change le quantificateur **et** on nie la propriété : la négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x+3 \leq 1$ ». La négation de $>$ est $\leq$, et non $<$.

Ici, $x=-2$ donne $x+3=1$ : c'est la négation qui est vraie ; la proposition de départ, elle, est fausse.

## Le contre-exemple

**Méthode : montrer qu'une proposition « pour tout » est fausse**

1. **Écris** la négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » : c'est « $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$ ».
2. **Cherche** un élément précis $a$ de $E$ pour lequel $P(a)$ est fausse : c'est un **contre-exemple**.
3. **Vérifie** par un calcul que $P(a)$ est fausse.
4. **Conclus** : un seul contre-exemple suffit.

**Exemple : deux contre-exemples**

- « Pour tout entier naturel $n$, $n^2+n+11$ est premier » est fausse. Pour $n=10$ : $100+10+11=121=11\times 11$, qui n'est pas premier.
- Données fictives : un atelier vend $q$ objets à $10$ DH l'un ; sa recette est $10q$ DH et son coût $200+6q$ DH. « Pour tout $q$, la recette dépasse le coût » est fausse : pour $q=20$, la recette vaut $200$ DH et le coût $320$ DH.

**Vérifie : Trouver le contre-exemple**

Quel réel est un contre-exemple à « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2>x$ » ?

**A.** $x=2$

**Faux.**
$2^2=4$ et $4>2$ : la propriété est vraie pour $x=2$.

**B.** $x=-1$

**Faux.**
$(-1)^2 = 1$ et $1 > -1$ : elle est vraie aussi.

**C.** $x = \dfrac{1}{2}$
**Juste.**
Juste : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, plus petit que $\dfrac{1}{2}$.

**D.** $x = 3$
**Faux.**
$9 > 3$ : la propriété est vraie pour $x = 3$.

**Correction**
Pour $x = \dfrac{1}{2}$ : $x^2 = \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2}$ est fausse. La propriété est donc fausse pour ce réel : c'est un contre-exemple, et un seul suffit.

Les valeurs $2$, $-1$ et $3$ vérifient toutes $x^2 > x$.

## À toi, puis le coin devoir

**À toi : Nier, puis réfuter**

(a) Écris la négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 4 = 0$ », et dis laquelle des deux est vraie. (b) Montre que « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**
Pour (a), change le quantificateur et nie l'égalité.
**Indice 2**
Pour (b), calcule $2^n$ et $n^2$ pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, et ainsi de suite.
**Indice 3**
Point délicat : regarde de près le cas où $2^n$ et $n^2$ sont égaux ; l'inégalité est stricte.

**Réponse**
**(a)** La négation est « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 4 \neq 0$ ». C'est elle qui est vraie : pour tout réel $x$, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 4 \geq 4$, et $x^2 + 4$ n'est jamais nul.

**(b)** Pour $n = 2$ : $2^n = 4$ et $n^2 = 4$, et $4 > 4$ est fausse.

**Conclusion.** $n = 2$ est un contre-exemple : la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2$ » est fausse.

**Remarque : Coin devoir : rédiger un contre-exemple**

En devoir, un contre-exemple se rédige en trois temps : la valeur choisie, le calcul, la conclusion.

Pour « $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 1$ », écris : « Pour $x = 1$, $(1+1)^2 = 4$ et $1^2 + 1 = 2$. Or $4 \neq 2$, donc la proposition est fausse. »

Des exemples où la propriété est vraie ne prouvent rien.

## Raisonner par contraposée, par l'absurde

## Prouver par un détour

**En clair.** Reprends la boutique fictive : « si un client paie plus de $400$ DH, alors il reçoit un bon d'achat ». Un client repart sans bon : la règle dit qu'il n'a pas payé plus de $400$ DH.

Ce détour sert aussi pour un entier $n$. Montrer « si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair » en partant de $n^2$ ne mène pas loin. Il suffit de démontrer une autre implication : sa contraposée.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

**Devine : Quel détour ?**

Pour démontrer « si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair », quelle implication suffit-il de démontrer ?

**A.** « si $n$ est pair, alors $n^2$ est pair »

**Faux.**

C'est la réciproque : elle peut être vraie sans que l'implication le soit.

**B.** « si $n$ est impair, alors $n^2$ est impair »

**Juste.**

Juste : c'est la contraposée, qui a la même valeur.

**C.** « si $n^2$ est impair, alors $n$ est impair »

**Faux.**

Les deux membres sont niés, mais pas échangés : ce n'est pas la contraposée.

**D.** « si $n$ est impair, alors $n^2$ est pair »

**Faux.**

Cette phrase est fausse : $3$ est impair, et $9$ aussi.

**Correction**

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Ici, $\overline{Q}$ est « $n$ est impair », et $\overline{P}$ est « $n^2$ est impair ».

Il suffit donc de montrer : « si $n$ est impair, alors $n^2$ est impair ».

## Le raisonnement par contraposée

**Propriété : Raisonnement par contraposée**

Soit $P$ et $Q$ deux propositions. Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** D'après les lois de l'implication, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est une loi logique : les implications $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ont toujours la même valeur de vérité.

**Étape 2.** Si l'on a démontré que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie elle aussi.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

La preuve n'emploie qu'un outil : la **loi de la contraposée**. Démontrer $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, c'est démontrer $P \Rightarrow Q$, car elles ont toujours la même valeur.

Choisis la forme dont le point de départ donne le plus d'informations.

Rappel : un entier pair s'écrit $2k$, un entier impair $2k+1$, avec $k$ entier. Ainsi « $n$ impair » s'écrit $n = 2k+1$, et l'on peut calculer.

**Vérifie : Le point de départ**

Soit $n$ un entier. Pour démontrer par contraposée « si $n^2+1$ est pair, alors $n$ est impair », que faut-il supposer au départ ?

**A.** Que $n$ est impair.

**Faux.**
C'est la conclusion de l'implication : la contraposée part de sa négation.

**B.** Que $n^2+1$ est pair.

**Faux.**
C'est l'hypothèse de l'implication : on partirait d'elle dans une preuve directe.

**C.** Que $n^2+1$ est impair.

**Faux.**
C'est la négation de l'hypothèse : c'est ce que la contraposée doit démontrer.

**D.** Que $n$ est pair.

**Juste.**
Juste : la contraposée part de la négation de la conclusion.

**Correction**
La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Ici, $Q$ est « $n$ est impair » : on suppose donc $n$ pair, puis on démontre que $n^2+1$ est impair.

D'après la loi de la contraposée, cela suffit.

## Rédiger une contraposée

**Méthode : rédiger un raisonnement par contraposée**

1. **Repère** l'hypothèse $P$ et la conclusion $Q$ de l'implication à démontrer.
2. **Écris** la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, en niant avec soin.
3. **Démontre-la** : « Supposons $\overline{Q}$. Montrons $\overline{P}$. »
4. **Conclus** : « Par contraposée, $P \Rightarrow Q$ est vraie. »

Exemple **: Exemple guidé : un carré pair**

Soit $n$ un entier. Montrons que si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair.

**Le détour.** Raisonnons par contraposée : supposons $n$ impair, et prouvons que $n^2$ est impair.

**Le calcul.** Il existe un entier $k$ tel que $n = 2k + 1$. En développant le carré :

$$\begin{aligned} n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Le nombre $2k^2 + 2k$ est un entier, donc $n^2$ est impair.

**Conclusion.** Par contraposée, si $n^2$ est pair, alors $n$ est pair.

## Le raisonnement par l'absurde

**En clair.** Un enquêteur imaginaire raisonne : « supposons que ce caissier ait menti ; alors il était à deux endroits à la même heure, ce qui est impossible ». Il conclut que le caissier a dit vrai.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Il est impossible qu'une proposition soit vraie en même temps que sa négation. Une supposition qui mène à une impossibilité est donc fausse.

Propriété **: Raisonnement par l'absurde**

Soit $P$ une proposition. Si, en supposant que $\overline{P}$ est vraie, on aboutit à une **contradiction**, c'est-à-dire à une proposition de la forme « $R$ et $\overline{R}$ », où $R$ est une proposition, alors $P$ est vraie.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Pour toute proposition $R$, par définition de la négation, $R$ et $\overline{R}$ ne sont jamais vraies en même temps ; par définition de la conjonction, « $R$ et $\overline{R}$ » est donc fausse.

**Étape 2.** Par hypothèse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow (R \text{ et } \overline{R})$ est vraie, et sa conclusion est fausse. Par définition de l'implication, une implication vraie dont la conclusion est fausse a une hypothèse fausse : $\overline{P}$ est fausse.

**Étape 3.** Par définition de la négation, $P$ est donc vraie.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

L'idée réutilisable : si une implication est vraie et que sa conclusion est fausse, alors **son hypothèse est fausse**.

Ici, la conclusion « $R$ et $\overline{R}$ » est toujours fausse. Donc $\overline{P}$ est fausse, et $P$ est vraie.

Toute la difficulté est de trouver la contradiction.

**Vérifie : Pourquoi une contradiction est fausse**

Dans la preuve, pourquoi la proposition « $R$ et $\overline{R}$ » est-elle fausse ?

**A.** Parce que $R$ et $\overline{R}$ ne sont jamais vraies en même temps.
**Juste.**
Juste : c'est la définition de la négation.

**B.** Parce que $R$ est toujours fausse.
**Faux.**
$R$ peut être vraie ; c'est alors $\overline{R}$ qui est fausse.

**C.** Parce que $\overline{P}$ est vraie.
**Faux.**
C'est la supposition de départ, pas la raison.

**D.** Parce qu'une proposition « et » est toujours fausse.
**Faux.**
« $P$ et $Q$ » est vraie quand les deux membres le sont.

**Correction**
Par définition de la négation, $R$ et $\overline{R}$ n'ont jamais la même valeur : l'une des deux est fausse.

Une conjonction qui a un membre faux est fausse. Donc « $R$ et $\overline{R}$ » est fausse, quelle que soit $R$.

## Rédiger par l'absurde

**Méthode : rédiger un raisonnement par l'absurde**

1. **Annonce** : « Supposons par l'absurde que $\overline{P}$ est vraie. »
2. **Déduis** des conséquences, avec les hypothèses de l'énoncé.
3. **Arrive** à une contradiction, et nomme-la : une proposition et sa négation, ou un résultat connu contredit.
4. **Conclus** : « La supposition est fausse, donc $P$ est vraie. »

**Exemple : trois articles et un total**

Données fictives : un client achète $3$ articles pour un total de $310$ DH. Montrons qu'un article au moins coûte plus de $100$ DH.

**Supposition.** Supposons par l'absurde que chaque article coûte au plus $100$ DH. Alors le total vaut au plus $3 \times 100 = 300$ DH.

**Contradiction.** Or le total vaut $310$ DH, et $310 > 300$.

**Conclusion.** La supposition est fausse : un article au moins coûte plus de $100$ DH.

**Exemple : Exemple guidé : une inégalité par l'absurde**

Montrons que, pour tout réel $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

**Supposition.** Soit $x > 0$. Supposons par l'absurde que $x + \dfrac{1}{x} < 2$.

**Calcul.** On multiplie les deux membres par $x$, strictement positif, ce qui garde le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &< 2x \\ x^2 - 2x + 1 &< 0 \\ (x-1)^2 &< 0. \end{aligned}$$

**Contradiction.** Or $(x-1)^2 \geq 0$, comme tout carré : l'inégalité obtenue ne peut pas être vraie.

**Conclusion.** La supposition est fausse, donc $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ pour tout réel $x > 0$.

## À toi, puis le coin devoir

**À toi : Une contraposée à rédiger**

Soit $n$ un entier. Montre par contraposée que si $3n + 1$ est pair, alors $n$ est impair. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**
Écris d'abord la contraposée : nie les deux membres et échange-les.
**Indice 2**
Suppose $n$ pair, et écris $n = 2k$ avec $k$ entier.
**Indice 3**
Point délicat : pour montrer qu'un entier est impair, écris-le sous la forme $2 \times (\dots) + 1$.

**Réponse**
**Contraposée.** Elle s'écrit : « si $n$ est pair, alors $3n + 1$ est impair ».

**Calcul.** Supposons $n$ pair : $n = 2k$ avec $k$ entier. Alors :

$$\begin{aligned} 3n+1 &= 6k+1 \\ &= 2\times 3k+1. \end{aligned}$$

Comme $3k$ est un entier, $3n+1$ est impair.

**Conclusion.** Par contraposée, si $3n+1$ est pair, alors $n$ est impair.

**Remarque : Coin devoir : annoncer son raisonnement**

En devoir, annonce le détour dès la première ligne.

Pour une contraposée, écris : « Raisonnons par contraposée : supposons que $n$ est pair. »

Pour l'absurde, écris « Supposons par l'absurde que… », puis termine par « Ceci est impossible, donc la supposition est fausse. »

Choisis la **contraposée** quand la négation de la conclusion se calcule, et l'**absurde** pour montrer qu'une chose est impossible.

## Disjonction des cas ; équivalences successives

## Examiner tous les cas

**En clair.** Un grossiste imaginaire a deux tarifs : $12$ DH l'unité pour moins de $10$ articles, et $10$ DH l'unité à partir de $10$. Une commande de $q$ articles coûte-t-elle toujours au plus $12q$ DH ?

Tu examines les deux cas : chaque commande est dans l'un ou l'autre. Si la réponse est oui dans chaque cas, elle est oui pour toute commande.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Un des deux cas a forcément lieu, et ce cas mène à la conclusion.

**Devine : Des cas qui couvrent tout**

Pour démontrer une propriété de tous les entiers relatifs $n$, quel découpage en deux cas convient ?

**A.** $n>0$, ou $n<0$.
**Faux.**
L'entier $0$ n'est dans aucun des deux cas.

**B.** $n$ pair, ou $n$ impair.
**Juste.**
Juste : tout entier est pair ou impair.

**C.** $n$ pair, ou $n$ multiple de $3$.
**Faux.**
L'entier $5$ n'est dans aucun des deux cas.

**D.** $n$ multiple de $4$, ou $n$ impair.
**Faux.**

L'entier $2$ n'est dans aucun des deux cas.

**Correction**
Aucun entier ne doit échapper aux cas. Or un entier est toujours pair ou impair : ce découpage convient.

Les trois autres oublient des entiers : $0$ pour le premier, $5$ pour le troisième, $2$ pour le quatrième.

## La disjonction des cas

**Propriété : Raisonnement par disjonction des cas**

Soit $P$, $Q$ et $R$ trois propositions. Si « $P$ ou $Q$ » est vraie, si $P \Rightarrow R$ est vraie et si $Q \Rightarrow R$ est vraie, alors $R$ est vraie.

En pratique, pour démontrer $R$, on sépare la situation en cas qui couvrent **toutes** les possibilités (par exemple $x \geq 0$ ou $x < 0$), puis on démontre $R$ dans chacun des cas.

---

**Démonstration**
**Étape 1.** Comme « $P$ ou $Q$ » est vraie, l'une au moins des propositions $P$ et $Q$ est vraie, par définition de la disjonction.

**Étape 2.** Si $P$ est vraie : l'implication $P \Rightarrow R$ est vraie et son hypothèse est vraie. Par définition de l'implication, sa conclusion $R$ ne peut pas être fausse : $R$ est vraie.

**Étape 3.** Si $Q$ est vraie, le même argument appliqué à $Q \Rightarrow R$ montre que $R$ est vraie. Dans tous les cas, $R$ est vraie. Avec trois cas ou plus, on applique ce résultat de proche en proche, en regroupant les cas.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

L'argument : un cas au moins a lieu, et **chaque cas conduit à** $R$.

Retiens la double exigence. Les cas doivent couvrir toutes les possibilités. La preuve doit être complète dans chacun. Un cas oublié laisse un trou dans la démonstration.

Pour le grossiste : si $q < 10$, le prix est $12q$ DH ; si $q \geq 10$, il est $10q$ DH, et $10q \leq 12q$. Dans les deux cas, la réponse est oui.

**Vérifie : Des cas pour tous les réels**

Pour démontrer une propriété de tous les réels $x$, quel découpage en deux cas convient ?

**A.** $x > 0$, ou $x < 0$.
**Faux.**

Le réel $0$ n'est dans aucun des deux cas.

**B.** $x \geq 1$, ou $x \leq -1$.

**Faux.**

Le réel $\frac{1}{2}$ n'est dans aucun des deux cas.

**C.** $x \geq 0$, ou $x < 0$.

**Juste.**

Juste : tout réel est positif ou nul, ou bien négatif.

**D.** $x$ entier, ou $x > 0$.

**Faux.**

Le réel $-\frac{1}{2}$ n'est dans aucun des deux cas.

**Correction**

Les cas doivent couvrir tous les réels. Un réel est soit positif ou nul, soit strictement négatif : le découpage « $x \geq 0$ ou $x < 0$ » convient.

Les autres oublient des réels : $0$, puis $\frac{1}{2}$, puis $-\frac{1}{2}$.

## Rédiger par cas

**Méthode : rédiger un raisonnement par disjonction des cas**

1. **Annonce** les cas, et vérifie qu'ils couvrent toutes les possibilités : $n$ pair ou $n$ impair ; $x \geq 0$ ou $x < 0$.
2. **Traite** chaque cas à part, avec l'hypothèse qui lui est propre.
3. **Conclus** : la propriété est vraie dans chaque cas, donc dans tous les cas.

**Exemple : Exemple guidé : un produit toujours pair**

Soit $n$ un entier. Montrons que $n(n+1)$ est pair.

- **Cas 1 :** $n$ est pair. Alors $n = 2k$ avec $k$ entier, et $n(n+1) = 2 \times k(n+1)$ est pair.
- **Cas 2 :** $n$ est impair. Alors $n = 2k+1$ avec $k$ entier, donc $n+1 = 2(k+1)$, et $n(n+1) = 2 \times n(k+1)$ est pair.

**Conclusion.** Tout entier est pair ou impair. Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair : il l'est donc pour tout entier $n$.

## Des équivalences en chaîne

**En clair.** Pour résoudre $3x - 4 = 11$, tu écris $3x = 15$, puis $x = 5$. La dernière ligne donne alors les solutions de la première.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Chaque ligne dit la même chose que la précédente, dans les deux sens. Deux propositions équivalentes ont la même valeur de vérité. Enchaînées, les équivalences transmettent cette valeur de la première ligne à la dernière.

**Propriété : Raisonnement par équivalences successives**

Soit $P$, $Q$ et $R$ trois propositions. Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ sont vraies, alors $P \Leftrightarrow R$ est vraie.

Ainsi, une chaîne d'équivalences $P \Leftrightarrow Q_1$, $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$, ..., $Q_k \Leftrightarrow R$, toutes vraies, démontre $P \Leftrightarrow R$ : **chaque** étape doit être une équivalence, et non une simple implication.

**Démonstration**

**Étape 1.** Par définition de l'équivalence, $P$ et $Q$ ont la même valeur de vérité, et $Q$ et $R$ ont la même valeur de vérité.

**Étape 2.** Donc $P$ et $R$ ont la même valeur de vérité, celle de $Q$ : par définition, $P \Leftrightarrow R$ est vraie.

**Étape 3.** Pour une chaîne de plusieurs équivalences, on applique ce résultat de proche en proche, une étape après l'autre.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

L'équivalence **transmet la valeur de vérité** : $P$ a celle de $Q$, et $Q$ celle de $R$, donc $P$ a celle de $R$.

Une seule étape à sens unique casse la chaîne. On obtient alors seulement une implication, et il faut vérifier les solutions trouvées.

**Vérifie : Une étape dangereuse**

Pour un réel $x$, quelle transformation d'une équation peut casser une chaîne d'équivalences ?

**A.** Ajouter $5$ aux deux membres.
**Faux.**
On revient en arrière en retranchant $5$ : c'est une équivalence.

**B.** Multiplier les deux membres par $-2$.
**Faux.**
On revient en divisant par $-2$, qui n'est pas nul : c'est une équivalence.

**C.** Diviser les deux membres par $4$.
**Faux.**
On revient en multipliant par $4$ : c'est une équivalence.

**D.** Multiplier les deux membres par $x$.

**Juste.**

Juste : si $x = 0$, on ne peut plus revenir en arrière.

**Correction**

Multiplier par $x$ ne se défait que si $x \neq 0$.

Par exemple, l'équation $x = 3$ a une seule solution, mais $x \times x = 3 \times x$ en a deux : $0$ et $3$. Une solution étrangère, $0$, est apparue.

Ajouter un nombre, ou multiplier par un nombre non nul, donne une équivalence.

## Résoudre par équivalences

**Méthode : résoudre par équivalences successives**

1. **Écris** chaque transformation sous la forme « $A \Leftrightarrow B$ ».
2. **Vérifie** que chaque étape se défait : ajouter un même nombre, multiplier par un nombre **non nul**. Attention aux inégalités : multiplier ou diviser par un nombre négatif en inverse le sens.
3. **Signale** une étape qui n'est qu'une implication, comme élever au carré : vérifie alors chaque solution.
4. **Conclus** par l'ensemble des solutions.

**Exemple : un seuil de rentabilité**

Données fictives : un atelier fabrique et vend $q$ sacs. Son coût total est $1200 + 15q$ DH, et sa recette $35q$ DH. Le bénéfice est positif ou nul quand la recette atteint le coût :

$$\begin{aligned} & 35q \geq 1200 + 15q \\ \Leftrightarrow\ & 35q - 15q \geq 1200 \\ \Leftrightarrow\ & 20q \geq 1200 \\ \Leftrightarrow\ & q \geq 60. \end{aligned}$$

Chaque étape se défait : retrancher $15q$, puis diviser par $20$, qui est positif.

**Conclusion.** L'atelier ne perd pas d'argent dès $60$ sacs. Contrôle : pour $q = 60$, la recette et le coût valent $2100$ DH.

**Attention : élever au carré n'est pas une équivalence**

✗ « $\sqrt{x+6} = x \Leftrightarrow x + 6 = x^2$, donc les solutions sont $3$ et $-2$. »

✓ Élever au carré donne seulement une implication :

$$\sqrt{x+6} = x \Rightarrow x+6 = x^2$$

On a bien $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, de racines $3$ et $-2$. Mais il faut vérifier chacune dans l'équation de départ :

- $\sqrt{9} = 3$ : la valeur $3$ convient ;
- $\sqrt{4} = 2$, et $2 \neq -2$, car une racine carrée n'est jamais négative.

Seul $3$ est solution.

## À toi, puis le coin devoir

**À toi : Une inéquation**

Résous par équivalences successives l'inéquation $4(x-2) > 7x + 1$, d'inconnue réelle $x$. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**
Développe d'abord le premier membre.
**Indice 2**
Regroupe les termes en $x$ d'un côté, et les nombres de l'autre.
**Indice 3**
Point délicat : diviser par $-3$, qui est négatif, change le sens de l'inégalité.

**Réponse**

$$\begin{aligned} & 4(x-2) > 7x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4x - 8 > 7x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & -3x > 9 \\ \Leftrightarrow\ & x < -3. \end{aligned}$$

Chaque étape est une équivalence : développer, retrancher $7x$ et ajouter $8$, puis diviser par $-3$, qui est négatif, en changeant le sens.

**Conclusion.** Les solutions sont les réels $x$ tels que $x < -3$.

Contrôle : pour $x = -4$, $4 \times (-6) = -24$ et $7 \times (-4) + 1 = -27$, et $-24 > -27$.

**Remarque : Coin devoir : rédiger une disjonction des cas**

En devoir, une disjonction des cas s'annonce dès la première ligne. Écris par exemple : « Soit $n$ un entier. Tout entier est pair ou impair : étudions les deux cas. »

Donne ensuite un titre à chaque cas : « Premier cas : $n$ est pair. » Termine par : « Dans les deux cas, la propriété est vraie. »

Vérifie que tes cas n'oublient aucune valeur.

## Le raisonnement par récurrence

### De proche en proche

**En clair.** Pense à une longue rangée de dominos. Le premier bascule. Chacun, en basculant, pousse son voisin. Résultat : toute la rangée finit par terre.

**Devine : Tous les dominos**

Lesquelles de ces informations garantissent que **tous** les dominos de la file tombent ?

**A.** Le dixième tombe, et chaque domino qui tombe renverse le suivant.
**Faux.**
Les neuf premiers peuvent rester debout.

**B.** Le premier domino de la file tombe.
**Faux.**
Rien ne dit que sa chute renverse le deuxième.

**C.** Le premier tombe, et chaque domino qui tombe renverse le suivant.
**Juste.**
Juste : il faut un départ, et une transmission d'un domino au suivant.

**D.** Chaque domino qui tombe renverse le suivant.
**Faux.**
Si aucun domino ne tombe, aucun n'en renverse un autre.

**Correction**
Il faut deux choses : un **départ**, le premier domino qui tombe, et une **transmission**, chaque domino qui tombe renverse le suivant.

Avec le dixième comme départ, seuls les dominos à partir du dixième sont sûrs de tomber. Sans départ, la transmission ne sert à rien.

## Le principe de récurrence

**Théorème : Principe de récurrence**

Soit $n_0$ un entier naturel et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour les entiers naturels $n \geq n_0$. Si

- $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**),
- et, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie (**hérédité**),

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

**Remarque : Un principe de départ**

Ce résultat est admis.

**En clair.** L'initialisation, c'est le premier domino qui tombe. L'hérédité, c'est chaque domino qui renverse le suivant. Le principe affirme alors que tous les dominos tombent : $P(n)$ est vraie pour chaque entier à partir de $n_0$.

**Méthode : rédiger une démonstration par récurrence**

1. **Énonce** la propriété $P(n)$ et l'entier de départ $n_0$.
2. **Initialisation** : vérifie par un calcul que $P(n_0)$ est vraie.
3. **Hérédité** : « Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. » Sers-toi de $P(n)$ dans le calcul.
4. **Conclusion** : « D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. »

**Exemple : Exemple guidé : une somme d'entiers**

Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On note $P(n)$ cette égalité.

**Initialisation.** Pour $n = 1$, le premier membre vaut $1$, et $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ : $P(1)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ est vraie. Notons $S = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$. D'après $P(n)$ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

On a réduit au même dénominateur, puis mis $n+1$ en facteur. C'est $P(n+1)$.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

## Une inégalité, puis un piège

**Exemple : Exemple guidé : une inégalité**

Montrons que, pour tout entier naturel $n$, $2^n \geq n+1$.

**Initialisation.** Pour $n=0$ : $2^0 = 1$ et $0+1=1$, donc $1 \geq 1$.

**Hérédité.** Soit $n$ un entier naturel tel que $2^n \geq n+1$. On multiplie par $2$, qui est positif :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2(n+1) \\ &\geq n+2. \end{aligned}$$

La dernière ligne vient de $2n+2 \geq n+2$, car $n \geq 0$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)+1$.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, l'inégalité est vraie pour tout entier naturel $n$.

**Attention : une hérédité seule ne prouve rien**

✗ « Si $4^n+1$ est un multiple de $3$, alors $4^{n+1}+1 = 4(4^n+1)-3$ en est un aussi. Donc $4^n+1$ est un multiple de $3$ pour tout $n$. »

✓ L'hérédité est juste, mais l'initialisation manque, et elle échoue : $4^0+1=2$ et $4^1+1=5$ ne sont pas des multiples de $3$. En fait, aucun nombre $4^n+1$ n'en est un.

Sans initialisation, une hérédité ne prouve rien.

**Vérifie : Ce que l'on suppose**

On veut montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$. Dans l'hérédité, que suppose-t-on ?

**A.** Que l'égalité est vraie pour un entier $n \geq 1$ fixé.

**Juste.**
Juste : on suppose $P(n)$ pour un $n$ donné, puis on démontre $P(n+1)$.

**B.** Que l'égalité est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

**Faux.**
C'est ce que l'on veut démontrer : on ne peut pas le supposer.

**C.** Que l'égalité est vraie au rang $n+1$.

**Faux.**
C'est le but de l'hérédité, pas sa supposition.

**D.** Que l'égalité est vraie au rang $1$ seulement.

**Faux.**
C'est l'initialisation, vérifiée à part.

**Correction**
Dans l'hérédité, on fixe un entier $n \geq 1$, et l'on suppose l'égalité vraie pour ce $n$. On démontre alors l'égalité au rang $n+1$ :

$$\begin{aligned} &1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1)\\ &=n^2+2n+1\\ &=(n+1)^2. \end{aligned}$$

Supposer l'égalité pour tout $n$ reviendrait à supposer ce que l'on veut démontrer.

## Une situation, à toi, le coin devoir

**Exemple : un capital qui grandit d'année en année**

Données fictives : un capital de $5000$ DH gagne $200$ DH de plus par an. On note $P(n)$ : « après $n$ années, le capital vaut $5000+200n$ DH ». Montrons $P(n)$ pour tout entier naturel $n$.

**Initialisation.** Après $0$ année, le capital vaut $5000=5000+200\times 0$ DH.

**Hérédité.** Si, après $n$ années, il vaut $5000+200n$ DH, alors un an plus tard il vaut $5000+200n+200=5000+200(n+1)$ DH. C'est $P(n+1)$.

**Conclusion.** Le principe de récurrence donne $P(n)$ pour tout entier naturel $n$. Après $12$ années, le capital vaut $5000+2400=7400$ DH.

**À toi : Une récurrence à rédiger**

Montre par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $3^n\geq 1+2n$. Rédige ta réponse sur ton cahier, puis dévoile la correction.

**Indice 1**
Suis la méthode : initialisation pour $n=0$, puis hérédité.
**Indice 2**
Dans l'hérédité, écris $3^{n+1}=3\times 3^n$, et utilise l'hypothèse $3^n\geq 1+2n$.
**Indice 3**
Point délicat : il reste à comparer $3+6n$ et $3+2n$ ; étudie le signe de leur différence.

**Réponse**
On note $P(n)$ : « $3^n\geq 1+2n$ ».

**Initialisation.** Pour $n=0$ : $3^0=1$ et $1+2\times 0=1$, donc $P(0)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n$ un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On multiplie par $3$, qui est positif :

$$\begin{aligned} 3^{n+1}&=3\times 3^n\\ &\geq 3(1+2n)\\ &=3+6n. \end{aligned}$$

Or $3+6n\geq 3+2n$, car $4n\geq 0$, et $3+2n=1+2(n+1)$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

**Remarque : Coin devoir : rédiger une récurrence**

En devoir, une récurrence se rédige en trois parties titrées.

Écris : « Initialisation : pour $n = 0$, on vérifie le calcul. » Puis : « Hérédité : soit $n$ un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie ; montrons que $P(n+1)$ est vraie. » Enfin : « Conclusion : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$. »

Montre bien où tu utilises $P(n)$.

## Ce qu'il faut savoir faire

**À retenir : quel raisonnement pour quelle question**

- **Valeur de vérité** d'une proposition composée : valeurs des propositions simples, puis définition du connecteur principal.
- **Nier** : « et » devient « ou », « ou » devient « et », et chaque membre est nié ; la négation de $P \Rightarrow Q$ est « $P$ et $\overline{Q}$ » ; $\forall$ devient $\exists$, $\exists$ devient $\forall$, et la propriété est niée.
- **Réfuter** une proposition « pour tout » : un seul contre-exemple suffit.
- **Montrer** $P \Rightarrow Q$ quand $\overline{Q}$ se traduit mieux : contraposée.
- **Montrer** qu'une chose est impossible : absurde.
- **Séparer** plusieurs situations possibles : disjonction des cas.
- **Résoudre** : équivalences successives, en vérifiant chaque étape.
- **Une propriété de tous les entiers** à partir d'un rang : récurrence.

**Le mot du prof.** Tu sais maintenant lire une phrase mathématique sans te tromper sur ce qu'elle promet, et choisir un raisonnement pour la démontrer. Ces outils servent dans tous les chapitres. La récurrence, en particulier, reviendra avec les suites.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Notions de logique » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)