BURHAN

# Résumé : Logarithme décimal

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/logarithme-decimal/resume

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Logarithme décimal | Semestre 2 |

## Puissances de dix et définition

**À retenir : Une question d'exposant**

Le logarithme décimal répond à une seule question : à quel exposant faut-il élever $10$ pour obtenir un nombre donné ? Par exemple, $10^5 = 100\,000$ : l'exposant cherché est $5$. Pour une puissance de dix d'exposant entier, la réponse se lit directement.

**Remarque : Rappel : les règles des puissances de dix**

Pour tous entiers relatifs $m$ et $n$ :

- $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ et $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ ;
- $(10^m)^n = 10^{mn}$ et $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$.

Ces règles servent à écrire un nombre sous la forme $10^n$ avant d'en prendre le logarithme.

**Définition : Logarithme décimal d'une puissance de dix**

Pour tout entier relatif $n$, le **logarithme décimal** du nombre $10^n$ est l'exposant $n$. On note :

$$\log\left(10^n\right) = n.$$

En particulier, $\log 1 = 0$ car $1 = 10^0$, $\log 10 = 1$ et $\log 0{,}001 = -3$ car $0{,}001 = 10^{-3}$.

**Exemple**

**Énoncé.** Calcule $\log 1\,000\,000$, $\log 0{,}0001$ et $\log\left(10^7 \times 10^{-9}\right)$.

**Puissances de dix.** $1\,000\,000 = 10^6$, $0{,}0001 = 10^{-4}$ et $10^7 \times 10^{-9} = 10^{-2}$.

**Conclusion.** D'après la définition, $\log 1\,000\,000 = 6$, $\log 0{,}0001 = -4$ et $\log\left(10^7 \times 10^{-9}\right) = -2$.

## La fonction logarithme décimal

**Propriété : Logarithme décimal d'un réel strictement positif**

On admet qu'il existe une **unique** fonction, appelée **fonction logarithme décimal** et notée $\log$, définie sur $]0, +\infty[$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- pour tout entier relatif $n$, $\log(10^n) = n$ ;
- pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \log a + \log b$ (**propriété du produit**) ;
- la fonction $\log$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, le nombre $\log x$ s'appelle le logarithme décimal de $x$. Il n'est pas défini pour $x \leq 0$.

**Remarque : Un résultat admis**

Ce résultat est admis. Retiens trois points. Le nombre $\log x$ existe seulement si $x > 0$ : $\log 0$ et $\log(-4)$ n'ont pas de sens. Le logarithme d'un produit est une somme. Enfin, $\log$ range les nombres dans le même ordre qu'eux.

**Méthode : utiliser la calculatrice**

1. **Pour obtenir** $\log a$, avec $a > 0$ : appuie d'abord sur la touche « log », saisis ensuite $a$, puis arrondis comme demandé.
2. **Pour retrouver** $a$ quand tu connais $\log a = y$ : calcule $a = 10^y$ avec la touche « $10^x$ ».
3. **Vérifie** ton résultat : un nombre compris entre $10^n$ et $10^{n+1}$ a un logarithme compris entre $n$ et $n + 1$.

**Exemple**

**Énoncé.** Donne une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\log 4\,500$ et de $\log 0{,}06$, puis contrôle-les.

**Calculatrice.** $\log 4\,500 \approx 3{,}653$ et $\log 0{,}06 \approx -1{,}222$.

**Contrôle.** $10^3 \leq 4\,500 < 10^4$, donc $3 \leq \log 4\,500 < 4$. De même, $10^{-2} \leq 0{,}06 < 10^{-1}$, donc $-2 \leq \log 0{,}06 < -1$. Les deux valeurs sont cohérentes.

## Propriétés algébriques

**Propriété : Logarithme d'un inverse et d'un quotient**

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ :

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

**Propriété : Logarithme d'une puissance et d'une racine carrée**

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif $n$ :

$$\log(a^n) = n\log a$$

$$\log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a.$$

**Produit, a > 0 et b > 0**

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

**Inverse, b > 0**

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$$

**Quotient, a > 0 et b > 0**

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

**Puissance, a > 0 et n entier relatif**

$$\log(a^n) = n\log a$$

**Racine carrée, a > 0**

$$\log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a$$

**Puissance de dix, n entier relatif**

$$\log(10^n) = n$$

### Méthode : simplifier une expression

1. **Écris** chaque nombre comme produit, quotient ou puissance de nombres simples : $10$, $2$, $3$ ou $5$.
2. **Développe** avec les propriétés du produit, du quotient, de la puissance et de la racine carrée.
3. **Remplace** chaque $\log(10^n)$ par l'entier $n$.
4. **Rassemble** les termes de même nature, puis conclus.

### Exemple

**Énoncé.** Simplifie $A = \log 40 + \log 25 - \log 0{,}1$ et $B = \log\left(\dfrac{\sqrt{1000}}{100}\right)$.

**Calcul de A.** D'après la propriété du produit, $\log 40 + \log 25 = \log 1000 = 3$. Or $\log 0{,}1 = -1$. Donc $A = 3 - (-1) = 4$.

**Calcul de B.** D'après le logarithme d'un quotient, puis d'une racine carrée :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\log 1000 - \log 100 \\ &= \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### Exemple

**Énoncé.** On donne $\log 2 \approx 0{,}301$ et $\log 3 \approx 0{,}477$. Exprime $\log 72$ à l'aide de $\log 2$ et de $\log 3$, puis donne une valeur approchée.

**Décomposition.** $72 = 2^3 \times 3^2$.

**Propriétés.** Par la propriété du produit, puis le logarithme d'une puissance : $\log 72 = 3\log 2 + 2\log 3$.

**Valeur approchée.** Avec les valeurs données :

$$\begin{aligned}\log 72 &\approx 3 \times 0{,}301 \\ &\quad + 2 \times 0{,}477 \\ &= 1{,}857.\end{aligned}$$

**Attention : Le logarithme d'une somme**

Aucune formule ne transforme $\log(a+b)$. Par exemple, $\log(1+9) = \log 10 = 1$, alors que $\log 1 + \log 9 \approx 0{,}954$. Une somme de deux logarithmes est le logarithme d'un **produit** : $\log 1 + \log 9 = \log 9$.

**Attention : Logarithme d'une puissance ou puissance d'un logarithme**

Un exposant placé dans le logarithme passe devant : $\log\left(100^3\right) = 3\log 100 = 6$. Un exposant placé sur le logarithme reste en place : $(\log 100)^3 = 2^3 = 8$. Ces deux nombres sont différents.

**À retenir : Compter les chiffres d'un grand nombre**

Un entier $N \geq 1$ s'écrit avec $k$ chiffres lorsque $10^{k-1} \leq N < 10^k$, soit $k - 1 \leq \log N < k$. Par exemple, $\log\left(2^{50}\right) = 50\log 2 \approx 15{,}05$. Donc $10^{15} \leq 2^{50} < 10^{16}$ : le nombre $2^{50}$ s'écrit avec $16$ chiffres.

## Comparer, résoudre une équation ou une inéquation

**Propriété : Comparaison de deux logarithmes**

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ :

- $\log a = \log b$ si et seulement si $a = b$ ;
- $\log a < \log b$ si et seulement si $a < b$ ;
- $\log a \leq \log b$ si et seulement si $a \leq b$.

En particulier, pour tout réel $x > 0$ : $\log x > 0$ si et seulement si $x > 1$, et $\log x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$.

**Exemple**

**Signe.** $0 < 0{,}8 < 1$, donc $\log 0{,}8 < 0$. De même, $2{,}5 > 1$, donc $\log 2{,}5 > 0$.

**Comparaison.** D'après la propriété du produit, $\log 3 + \log 4 = \log 12$. Or $12 > 11$, donc $\log 3 + \log 4 > \log 11$. Aucune calculatrice n'est nécessaire.

**Méthode : résoudre une équation logarithmique**

1. **Domaine d'abord** : chaque expression placée dans un logarithme doit être strictement positive. Note $D$ l'ensemble des réels qui conviennent.
2. **Regroupe**, pour $x$ dans $D$, chaque membre en un seul logarithme : $\log A = \log B$.
3. **Supprime** les logarithmes : d'après la comparaison de deux logarithmes, $\log A = \log B$ équivaut à $A = B$.
4. **Résous** cette équation, puis garde seulement les solutions situées dans $D$.

**Exemple**

**Énoncé.** Résous $\log x + \log(x-3) = 1$.

**Domaine.** Il faut $x > 0$ et $x - 3 > 0$, soit $D = ]3, +\infty[$.

**Transformation.** Pour $x$ dans $D$, la propriété du produit, avec $1 = \log 10$, donne $\log\left(x(x-3)\right) = \log 10$. D'après la comparaison de deux logarithmes, $x(x-3) = 10$, soit :

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

**Résolution.** $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$, donc $x = 5$ ou $x = -2$. Seul $5$ appartient à $D$ : $S = \{5\}$.

**Attention : Le domaine avant le calcul**

Dans l'exemple précédent, $-2$ est solution de $x^2 - 3x - 10 = 0$, mais pas de l'équation de départ : $\log(-2)$ n'existe pas. L'égalité $\log x + \log(x-3) = \log\left(x(x-3)\right)$ exige $x > 0$ et $x - 3 > 0$. Écris donc le domaine avant de regrouper, puis trie les valeurs trouvées.

**Méthode : résoudre une inéquation logarithmique**

1. **Domaine** : détermine l'ensemble $D$ des réels pour lesquels chaque logarithme existe.
2. **Écris**, pour $x$ dans $D$, l'inéquation sous la forme $\log A < \log B$ (ou avec $\leq$).
3. **Compare** : d'après la comparaison de deux logarithmes, $\log A < \log B$ équivaut à $A < B$. Le sens ne change pas.
4. **Conclus** en ne gardant que les solutions qui sont aussi dans $D$.

**Exemple**

**Énoncé.** Résous $\log(2x-1) \leq \log(x+4)$.

**Domaine.** Il faut $2x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{2}$ et $x > -4$. Donc $D = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

**Comparaison.** Pour $x$ dans $D$, d'après la comparaison de deux logarithmes, l'inéquation équivaut à $2x - 1 \leq x + 4$, soit $x \leq 5$.

**Conclusion.** $S = \left]\frac{1}{2}, 5\right]$.

**Exemple : Poser X = log x**

**Énoncé.** Résous $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$ sur $]0, +\infty[$.

**Changement d'inconnue.** On pose $X = \log x$. L'équation devient $X^2 - X - 2 = 0$, soit $(X - 2)(X + 1) = 0$. Donc $X = 2$ ou $X = -1$.

**Retour à $x$.** D'après la comparaison de deux logarithmes, $\log x = 2 = \log 100$ donne $x = 100$, et $\log x = -1 = \log 0{,}1$ donne $x = 0{,}1$. Donc $S = \{0{,}1; 100\}$.

## Puissances de dix d'exposant réel

**Propriété : Puissance de dix d'exposant réel**

On admet que, pour tout réel $y$, il existe un réel $a > 0$ tel que $\log a = y$. D'après la comparaison de deux logarithmes, ce réel est unique : on le note $10^y$.

Ainsi, pour tout réel $y$ et tout réel $a > 0$ :

- $10^y > 0$ ;
- $\log\left(10^y\right) = y$ ;
- $10^{\log a} = a$.

Lorsque $y$ est un entier relatif, $10^y$ est la puissance de dix habituelle, car $\log\left(10^n\right) = n$.

**Remarque : Un second résultat admis**

Ce résultat est admis. Il donne un sens à $10^x$ pour tout réel $x$. La calculatrice en donne une valeur approchée : $10^{0{,}5} \approx 3{,}162$ et $10^{2{,}3} \approx 199{,}526$. Retiens aussi que $10^x$ est toujours strictement positif.

**Propriété : Équations et inéquations du type 10^x = a et 10^x ≤ a**

Soit $a$ un réel.

Si $a > 0$, alors, pour tout réel $x$ :

- $10^x = a$ si et seulement si $x = \log a$ ;
- $10^x \leq a$ si et seulement si $x \leq \log a$ ;
- $10^x \geq a$ si et seulement si $x \geq \log a$ ;

- de même, $10^x < a$ si et seulement si $x < \log a$, et $10^x > a$ si et seulement si $x > \log a$.

Si $a \leq 0$, alors l'équation $10^x = a$ n'a aucune solution, et $10^x > a$ pour tout réel $x$.

**Méthode : résoudre une équation ou une inéquation en 10 puissance x**

1. **Isole** $10^x$ seul dans un membre.
2. **Regarde le signe** du second membre $a$. Si $a \leq 0$, l'équation n'a pas de solution et $10^x > a$ pour tout réel $x$.
3. **Si** $a > 0$, prends le logarithme : $x = \log a$, $x \leq \log a$ ou $x \geq \log a$. Pour une inégalité stricte, tu obtiens de même $x < \log a$ ou $x > \log a$.
4. **Écris** la valeur exacte, puis une valeur approchée si l'énoncé la demande.

**Exemple**

**Équation.** $3 \times 10^x + 2 = 14$ équivaut à $10^x = 4$. Comme $4 > 0$, $x = \log 4 = 2\log 2 \approx 0{,}602$.

**Inéquation.** $10^x \leq 0{,}05$ équivaut à $x \leq \log 0{,}05$, car $0{,}05 > 0$. Donc $S = ]-\infty, \log 0{,}05]$, avec $\log 0{,}05 \approx -1{,}301$.

**Valeur exacte, puis approchée.** $10^x = 300$ donne $x = \log 300 = 2 + \log 3 \approx 2{,}477$.

**Attention : Un second membre négatif ou nul**

Pour tout réel $x$, $10^x > 0$. Ainsi, $10^x + 3 = 1$ équivaut à $10^x = -2$ : aucune solution. N'écris pas $x = \log(-2)$, ce nombre n'existe pas. De même, $10^x \geq -7$ est vraie pour tout réel $x$.

## Le plus petit entier n tel que qⁿ ≥ a ou qⁿ ≤ a

**Méthode : le plus petit entier n**

1. **Écris** l'inéquation, avec $a > 0$. Pour une grandeur qui augmente ($q > 1$), c'est $q^n \geq a$. Pour une grandeur qui diminue ($0 < q < 1$), c'est $q^n \leq a$. Par exemple, divise $C_0 \times q^n \geq s$ par $C_0 > 0$.
2. **Prends le logarithme** des deux membres, strictement positifs. Avec la comparaison de deux logarithmes, puis la règle du logarithme d'une puissance, $q^n \geq a$ devient $n \log q \geq \log a$, et $q^n \leq a$ devient $n \log q \leq \log a$.
3. **Nomme le signe** de $\log q$ avant de diviser. Si $q > 1$, $\log q > 0$ : le sens reste, et $n \geq \dfrac{\log a}{\log q}$. Si $0 < q < 1$, tu divises $n \log q \leq \log a$ par $\log q < 0$ : le sens change, et tu obtiens aussi $n \geq \dfrac{\log a}{\log q}$.

4. **Conclus** : la réponse est le premier entier qui atteint ou dépasse le quotient obtenu ; contrôle-la avec deux puissances voisines.

### Exemple

**Situation (données fictives).** Un capital de $20\,000$ DH rapporte des intérêts composés, au taux annuel de 6 pour cent. Après $n$ années, il vaut $C_n = 20\,000 \times 1{,}06^n$. Au bout de combien d'années atteint-il au moins $30\,000$ DH ?

**Inéquation.** En divisant par $20\,000 > 0$, $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $1{,}06^n \geq 1{,}5$. Avec la comparaison de deux logarithmes, puis la règle du logarithme d'une puissance, cela s'écrit $n \log 1{,}06 \geq \log 1{,}5$.

**Division.** Comme $1{,}06 > 1$, on a $\log 1{,}06 > 0$ : le sens est conservé.

$$n \geq \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}06} \approx 6{,}96.$$

**Conclusion.** Le plus petit entier est $n = 7$ : le capital atteint $30\,000$ DH au bout de 7 ans.

### Exemple

**Situation (données fictives).** Le prix d'une machine neuve, $8\,000$ DH, baisse de 15 pour cent par an. Après $n$ années, il vaut $P_n = 8\,000 \times 0{,}85^n$. On cherche le plus petit $n$ tel que $P_n \leq 4\,000$.

**Inéquation.** En divisant par $8\,000 > 0$, $P_n \leq 4\,000$ équivaut à $0{,}85^n \leq 0{,}5$. Avec la comparaison de deux logarithmes, puis la règle du logarithme d'une puissance, cela s'écrit $n \log 0{,}85 \leq \log 0{,}5$.

**Division.** $0 < 0{,}85 < 1$, donc $\log 0{,}85 < 0$. On divise par ce nombre négatif : le sens change.

$$n \geq \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}85} \approx 4{,}27.$$

**Conclusion.** $n = 5$ : le prix est au moins divisé par deux au bout de $5$ ans.

**Attention : Diviser par un logarithme négatif**

Dans l'exemple du prix, $\log 0{,}85 \approx -0{,}071$. Diviser $n \log 0{,}85 \leq \log 0{,}5$ par ce nombre sans changer le sens donnerait $n \leq 4{,}27$. Or $n = 4$ ne convient pas : $0{,}85^4 \approx 0{,}522$ dépasse encore $0{,}5$. Avant de diviser par $\log q$, écris son signe.

**À retenir : Vérifier avec deux puissances voisines**

Pour le capital, $1{,}06^6 \approx 1{,}419$ reste sous $1{,}5$, et $1{,}06^7 \approx 1{,}504$ le dépasse. Pour le prix, $0{,}85^4 \approx 0{,}522$ et $0{,}85^5 \approx 0{,}444$. Ces calculs confirment le plus petit entier trouvé.

## Quelle propriété pour quelle question ?

**Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?**

- **Calculer** $\log(10^n)$ : la définition, qui donne $n$.
- **Situer** $\log a$ entre deux entiers : encadrer $a$ entre deux puissances de dix.
- **Simplifier** une expression : les propriétés du produit, du quotient, de la puissance et de la racine carrée.
- **Trouver un signe** ou comparer deux logarithmes : la comparaison de deux logarithmes, avec $\log 1 = 0$.
- **Résoudre** une équation ou une inéquation logarithmique : le domaine d'abord, puis la comparaison.
- **Résoudre** $10^x = a$, $10^x \leq a$ ou $10^x < a$ : le signe de $a$, puis $x = \log a$, $x \leq \log a$ ou $x < \log a$.
- **Trouver** le plus petit entier $n$ tel que $q^n \geq a$ (hausse) ou $q^n \leq a$ (baisse) : le logarithme d'une puissance, puis le signe de $\log q$.
- **Obtenir** une valeur approchée : la calculatrice, contrôlée par un encadrement.

**À retenir : Rédiger en devoir**

Écris le domaine avant toute transformation d'une équation ou d'une inéquation. Nomme la propriété employée : « d'après la propriété du produit », « d'après la comparaison de deux logarithmes ». Avant de diviser par $\log q$, donne son signe. Distingue la valeur exacte, comme $\log 4$, de sa valeur approchée. Termine par une phrase de conclusion.