BURHAN

Logarithme décimal : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/logarithme-decimal/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Logarithme décimal	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4 pts

Simplifier, résoudre une équation, puis une inéquation

On considère l'équation (E) : $\log(x+4)+\log(x-1)=\log 6+\log x$ et l'inéquation (I) : $\log(x-1)<\log(5-x)$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $\log 12{,}5+3\log 2=2$.

INDICE

Outil : le logarithme d'une puissance, puis la propriété du produit.

2. — 0,75 pts

Montrer que l'ensemble des réels pour lesquels (E) a un sens est $D=]1,+\infty[$.

INDICE

Outil : un logarithme n'existe que pour un nombre strictement positif.

3. — 1 pts

Montrer que, pour x dans D, l'équation (E) équivaut à $x^2-3x-4=0$.

INDICE

Début : regroupe chaque membre en un seul logarithme. **Ensuite :** la comparaison de deux logarithmes.

4. — 0,75 pts

En déduire que (E) admet une seule solution, que l'on précisera.

INDICE

Outil : factorise le trinôme. **Point délicat :** le domaine.

5. — 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de (I) est $]1,3[$.

INDICE

Début : le domaine de (I) est un intervalle borné. **Ensuite :** la comparaison de deux logarithmes conserve le sens.

Exercice 2 — 4 pts

Une équation et une inéquation par changement d'inconnue

Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \log x$. On considère l'équation (E) : $\log(100x) \times \log\left(\dfrac{x}{10}\right) = 4$ et l'inéquation (I) : $(\log x)^2 + \log x - 6 < 0$, d'inconnue $x > 0$.

1. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\log(100x) = 2 + \log x$ et $\log\left(\dfrac{x}{10}\right) = \log x - 1$.

INDICE

Outil : la propriété du produit pour la première égalité, le logarithme d'un quotient pour la seconde.

2. — 1 pts

Montrer que (E) équivaut à $X^2 + X - 6 = 0$.

INDICE

Début : remplace les deux logarithmes grâce à la question 1, puis développe.

3. — 1,25 pts

Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{10^{-3}; 100\right\}$.

INDICE

Outil : une factorisation, puis $\log x = \log\left(10^n\right)$ équivaut à $x = 10^n$.

4. — 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de (I) est $\left]10^{-3}, 100\right[$.

INDICE

Outil : le trinôme $X^2 + X - 6$ est négatif strictement entre ses racines. **Ensuite :** reviens à x par la comparaison de deux logarithmes.

Exercice 3 — 4,5 pts

Équations et inéquations en puissance de dix

Dans tout l'exercice, x désigne un réel.

1. — 0,75 pts

Résoudre l'équation $10^x = 250$; écrire sa solution sous forme exacte, puis arrondie à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : le signe de 250, puis la résolution de $10^x = a$.

2. — 1 pts

Montrer que $\log 250 = 3 - 2\log 2$.

INDICE

Début : écris 250 comme le quotient de 1000 par une puissance de 2.

3. — 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $4 \times 10^x - 3 > 997$ est $]\log 250, +\infty[$.

INDICE

Début : isole 10^x. **Ensuite :** le signe du second membre, puis la résolution d'une inégalité stricte.

4. — 0,75 pts

Montrer que l'ensemble des réels x tels que $2 < 10^x < 3$ est $]\log 2, \log 3[$.

INDICE

Outil : traite séparément les deux inégalités strictes.

5. — 1 pts

Données fictives. Une entreprise estime que, pour un budget publicitaire de x millions de DH, elle compte 10^x milliers de clients. Montrer qu'elle compte au moins $50\,000$ clients si et seulement si $x \geq \log 50$. Donner ce budget minimal à 10^{-3} près.

INDICE

Début : écris $50\,000$ clients en milliers de clients.

Exercice 4 4,5 pts

Deux placements à intérêts composés

Données fictives. Un épargnant place $40\,000$ DH à intérêts composés, au taux de 5 pour cent par an. On note C_n le capital, en DH, au bout de n années ; ainsi $C_0 = 40\,000$.

1. 1,25 pts

Calculer C_1 et C_2, puis montrer que (C_n) est une suite géométrique et que $C_n = 40\,000 \times 1{,}05^n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : augmenter de 5 pour cent revient à multiplier par $1{,}05$; exprime ensuite C_{n+1} en fonction de C_n.

2. 1 pts

Montrer que $C_n \geq 60\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05}$.

INDICE

Début : divise par $40\,000$, puis prends le logarithme. **Attention :** donne le signe de $\log 1{,}05$ avant de diviser.

3. 1 pts

En déduire le nombre minimal d'années pour que le capital atteigne au moins $60\,000$ DH. Vérifier avec C_8 et C_9.

INDICE

Outil : la calculatrice, puis le plus petit entier supérieur ou égal au quotient.

4. 1,25 pts

Une seconde épargnante place $50\,000$ DH au taux de 3 pour cent par an ; on admet que son capital vaut $D_n = 50\,000 \times 1{,}03^n$ au bout de n années. Montrer que $C_n \geq D_n$ équivaut à $\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)^n \geq 1{,}25$, puis déterminer à partir de combien d'années le premier capital rattrape le second.

INDICE

Idée : divise les deux membres par $40\,000 \times 1{,}03^n$, qui est strictement positif. **Ensuite :** même méthode qu'à la question 2.

Exercice 5 4,5 pts

Un chiffre d'affaires en baisse

Données fictives. Une entreprise réalise un chiffre d'affaires de $2{,}5$ millions de DH la première année étudiée. Ce chiffre d'affaires baisse ensuite de 8 pour cent par an. On note u_n le chiffre d'affaires, en millions de DH, n années plus tard ; ainsi $u_0 = 2{,}5$.

1. 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : baisser de 8 pour cent revient à multiplier par $0{,}92$.

2. 0,75 pts

Montrer que $u_n = 2{,}5 \times 0{,}92^n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : exprime u_{n+1} en fonction de u_n et reconnais une suite géométrique.

3. 0,5 pts

Justifier que $\log 0{,}92 < 0$.

INDICE

Outil : compare $0{,}92$ à 1.

4. 1,5 pts

Montrer que $u_n \leq 1{,}5$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 0{,}6}{\log 0{,}92}$. En déduire au bout de combien d'années le chiffre d'affaires devient inférieur ou égal à $1{,}5$ million de DH.

INDICE

Début : divise par $2{,}5$, puis prends le logarithme. **Attention :** la question 3 donne le signe du nombre par lequel tu divises.

5. 1,25 pts

Montrer que $u_n \leq 0{,}25$ équivaut à $n \geq -\dfrac{1}{\log 0{,}92}$. En déduire au bout de combien d'années le chiffre d'affaires est divisé au moins par dix.

INDICE

Outil : $\dfrac{0{,}25}{2{,}5} = 10^{-1}$; reprends la méthode de la question 4.