BURHAN

Logarithme décimal : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/logarithme-decimal/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Logarithme décimal	Niveau examen	5

Exercice 1 — 4 pts

Simplifier, résoudre une équation, puis une inéquation

On considère l'équation (E) : $\log(x+4)+\log(x-1)=\log 6+\log x$ et l'inéquation (I) : $\log(x-1)<\log(5-x)$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $\log 12{,}5+3\log 2=2$.

INDICE

Outil : le logarithme d'une puissance, puis la propriété du produit.

CORRIGÉ

Le terme $3\log 2$. D'après le logarithme d'une puissance, $3\log 2=\log\left(2^3\right)=\log 8$.

Regroupement. D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned}&\log 12{,}5+\log 8\\&=\log(12{,}5\times 8)\\&=\log 100=2.\end{aligned}$$

Conclusion. $\log 12{,}5+3\log 2=2$.

2. — 0,75 pts

Montrer que l'ensemble des réels pour lesquels (E) a un sens est $D=]1,+\infty[$.

INDICE

Outil : un logarithme n'existe que pour un nombre strictement positif.

CORRIGÉ

Chaque logarithme de (E) exige un argument strictement positif :

- $x+4>0$, soit $x>-4$;
- $x-1>0$, soit $x>1$;
- $x>0$.

Ces trois conditions sont réalisées ensemble si et seulement si $x>1$.

Conclusion. L'équation (E) a un sens sur $D=]1,+\infty[$.

3. 1 pts

Montrer que, pour x dans D, l'équation (E) équivaut à $x^2 - 3x - 4 = 0$.

INDICE

Début : regroupe chaque membre en un seul logarithme. **Ensuite :** la comparaison de deux logarithmes.

CORRIGÉ

Soit x dans D.

Regroupement. D'après la propriété du produit, appliquée à chaque membre, (E) s'écrit :

$$\log\left((x+4)(x-1)\right) = \log(6x).$$

Comparaison. D'après la comparaison de deux logarithmes, (E) équivaut à $(x+4)(x-1) = 6x$.

Développement. $(x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4$, donc (E) équivaut à $x^2 + 3x - 4 = 6x$.

Conclusion. Pour x dans D, (E) équivaut à $x^2 - 3x - 4 = 0$.

4. 0,75 pts

En déduire que (E) admet une seule solution, que l'on précisera.

INDICE

Outil : factorise le trinôme. **Point délicat :** le domaine.

CORRIGÉ

Racines du trinôme. On factorise :

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1).$$

Les racines sont 4 et -1.

Domaine. Seul 4 appartient à $D =]1, +\infty[$.

Conclusion. L'équation (E) admet une seule solution, le réel 4 : $S = \{4\}$.

5. 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de (I) est $]1, 3[$.

INDICE

Début : le domaine de (I) est un intervalle borné. **Ensuite :** la comparaison de deux logarithmes conserve le sens.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $x - 1 > 0$ et $5 - x > 0$, soit $1 < x < 5$: le domaine est $]1, 5[$.

Résolution. Pour x dans $]1, 5[$, d'après la comparaison de deux logarithmes, (I) équivaut à $x - 1 < 5 - x$, soit $2x < 6$, soit $x < 3$.

Conclusion. Avec le domaine, $S =]1, 3[$.

Exercice 2 — 4 pts

Une équation et une inéquation par changement d'inconnue

Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \log x$. On considère l'équation (E) : $\log(100x) \times \log\left(\dfrac{x}{10}\right) = 4$ et l'inéquation (I) : $(\log x)^2 + \log x - 6 < 0$, d'inconnue $x > 0$.

1. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\log(100x) = 2 + \log x$ et $\log\left(\dfrac{x}{10}\right) = \log x - 1$.

INDICE

Outil : la propriété du produit pour la première égalité, le logarithme d'un quotient pour la seconde.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$.

Premier logarithme. D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned}\log(100x) &= \log 100 + \log x \\ &= 2 + \log x.\end{aligned}$$

Second logarithme. D'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x}{10}\right) &= \log x - \log 10 \\ &= \log x - 1.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\log(100x) = 2 + \log x$ et $\log\left(\dfrac{x}{10}\right) = \log x - 1$.

2. — 1 pts

Montrer que (E) équivaut à $X^2 + X - 6 = 0$.

INDICE

Début : remplace les deux logarithmes grâce à la question 1, puis développe.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$: les deux logarithmes de (E) existent. D'après la question 1, avec $X = \log x$, l'équation (E) s'écrit :

$$(2 + X)(X - 1) = 4.$$

Développement. On a $(2 + X)(X - 1) = X^2 + X - 2$, donc (E) équivaut à $X^2 + X - 2 = 4$.

Conclusion. (E) équivaut à $X^2 + X - 6 = 0$.

3. 1,25 pts

Résoudre l'équation $X^2 + X - 6 = 0$. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{10^{-3}; 100\right\}$.

INDICE

Outil : une factorisation, puis $\log x = \log\left(10^n\right)$ équivaut à $x = 10^n$.

CORRIGÉ

Équation en X. On factorise :

$$\begin{aligned} &X^2 + X - 6 \\ &= (X - 2)(X + 3). \end{aligned}$$

Donc $X = 2$ ou $X = -3$.

Retour à x. D'après la comparaison de deux logarithmes :

- $\log x = 2 = \log 100$ donne $x = 100$;
- $\log x = -3 = \log\left(10^{-3}\right)$ donne $x = 10^{-3}$.

Ces deux réels sont strictement positifs.

Conclusion. $S = \left\{10^{-3}; 100\right\}$.

4. 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de (I) est $\left]10^{-3}, 100\right[$.

INDICE

Outil : le trinôme $X^2 + X - 6$ est négatif strictement entre ses racines. **Ensuite :** reviens à x par la comparaison de deux logarithmes.

CORRIGÉ

Inéquation en X. Avec $X = \log x$, l'inéquation (I) s'écrit $X^2 + X - 6 < 0$. Le trinôme a pour racines -3 et 2, et son coefficient de X^2 vaut $1 > 0$: il est strictement négatif pour $-3 < X < 2$.

Retour à x. L'encadrement $-3 < \log x < 2$ s'écrit $\log\left(10^{-3}\right) < \log x < \log 100$. D'après la comparaison de deux logarithmes, il équivaut à $10^{-3} < x < 100$.

Conclusion. $S = \left]10^{-3}, 100\right[$.

Exercice 3 4,5 pts

Équations et inéquations en puissance de dix

Dans tout l'exercice, x désigne un réel.

1. 0,75 pts

Résoudre l'équation $10^x = 250$; écrire sa solution sous forme exacte, puis arrondie à 10^{-3} près.

INDICE

Outil : le signe de 250, puis la résolution de $10^x = a$.

CORRIGÉ

Comme $250 > 0$, d'après la résolution de $10^x = a$, l'équation équivaut à $x = \log 250$.

À la calculatrice, $\log 250 \approx 2{,}398$.

Conclusion. $S = \{\log 250\}$, avec $\log 250 \approx 2{,}398$ à 10^{-3} près.

2. 1 pts

Montrer que $\log 250 = 3 - 2\log 2$.

INDICE

Début : écris 250 comme le quotient de 1000 par une puissance de 2.

CORRIGÉ

On écrit $250 = \dfrac{1000}{4}$. D'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned}\log 250 &= \log\left(\frac{1000}{4}\right)\\ &= \log 1000 - \log 4.\end{aligned}$$

D'après le logarithme d'une puissance, $\log 4 = \log\left(2^2\right) = 2\log 2$, et $\log 1000 = 3$.

Conclusion. $\log 250 = 3 - 2\log 2$.

3. 1 pts

Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $4 \times 10^x - 3 > 997$ est $]\log 250, +\infty[$.

INDICE

Début : isole 10^x. **Ensuite :** le signe du second membre, puis la résolution d'une inégalité stricte.

CORRIGÉ

Isoler la puissance de dix. On ajoute 3, puis on divise par $4 > 0$:

$$4 \times 10^x > 1000,$$

soit $10^x > 250$.

Résolution. Comme $250 > 0$, d'après la résolution de $10^x > a$, l'inéquation équivaut à $x > \log 250$.

Conclusion. $S =]\log 250, +\infty[$.

4. 0,75 pts

Montrer que l'ensemble des réels x tels que $2 < 10^x < 3$ est $]\log 2, \log 3[$.

INDICE

Outil : traite séparément les deux inégalités strictes.

CORRIGÉ

On traite les deux inégalités séparément, avec la résolution de $10^x > a$ et de $10^x < a$:

- comme $2 > 0$, $10^x > 2$ équivaut à $x > \log 2$;
- comme $3 > 0$, $10^x < 3$ équivaut à $x < \log 3$.

Les deux conditions ensemble donnent $\log 2 < x < \log 3$.

Conclusion. $S =]\log 2, \log 3[$.

5. 1 pts

Données fictives. Une entreprise estime que, pour un budget publicitaire de x millions de DH, elle compte 10^x milliers de clients. Montrer qu'elle compte au moins $50\,000$ clients si et seulement si $x \geq \log 50$. Donner ce budget minimal à 10^{-3} près.

INDICE

Début : écris $50\,000$ clients en milliers de clients.

CORRIGÉ

Inéquation. Le nombre de clients s'exprime en milliers : $50\,000$ clients font 50 milliers. Il faut donc $10^x \geq 50$.

Résolution. Comme $50 > 0$, d'après la résolution de $10^x \geq a$, cette inégalité équivaut à $x \geq \log 50$.

Conclusion. L'entreprise compte au moins $50\,000$ clients si et seulement si $x \geq \log 50$. Le budget minimal est $\log 50$ millions de DH, soit environ $1{,}699$ million de DH.

Exercice 4 4,5 pts

Deux placements à intérêts composés

Données fictives. Un épargnant place $40\,000$ DH à intérêts composés, au taux de 5 pour cent par an. On note C_n le capital, en DH, au bout de n années ; ainsi $C_0 = 40\,000$.

1. 1,25 pts

Calculer C_1 et C_2, puis montrer que (C_n) est une suite géométrique et que $C_n = 40\,000 \times 1{,}05^n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : augmenter de 5 pour cent revient à multiplier par $1{,}05$; exprime ensuite C_{n+1} en fonction de C_n.

CORRIGÉ

Premiers termes. Augmenter de 5 pour cent revient à multiplier par $1{,}05$:

- $C_1 = 40\,000 \times 1{,}05 = 42\,000$;
- $C_2 = 42\,000 \times 1{,}05 = 44\,100$.

Suite géométrique. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + 0{,}05\, C_n \\ &= 1{,}05\, C_n. \end{aligned}$$

La suite (C_n) est donc géométrique, de raison $1{,}05$ et de premier terme $C_0 = 40\,000$.

Conclusion. $C_1 = 42\,000$, $C_2 = 44\,100$ et, pour tout entier naturel n, $C_n = 40\,000 \times 1{,}05^n$.

2. 1 pts

Montrer que $C_n \geq 60\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05}$.

INDICE

Début : divise par $40\,000$, puis prends le logarithme. **Attention :** donne le signe de $\log 1{,}05$ avant de diviser.

CORRIGÉ

Se ramener à une puissance. En divisant par $40\,000 > 0$, $C_n \geq 60\,000$ équivaut à $1{,}05^n \geq 1{,}5$.

Passage au logarithme. Ces deux nombres sont strictement positifs. Par la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, cela équivaut à :

$$n \log 1{,}05 \geq \log 1{,}5.$$

Signe avant la division. Comme $1{,}05 > 1$, on a $\log 1{,}05 > 0$: le sens est conservé.

Conclusion. $C_n \geq 60\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05}$.

3. 1 pts

En déduire le nombre minimal d'années pour que le capital atteigne au moins $60\,000$ DH. Vérifier avec C_8 et C_9.

INDICE

Outil : la calculatrice, puis le plus petit entier supérieur ou égal au quotient.

CORRIGÉ

Calcul du quotient. À la calculatrice :

$$\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05} \approx 8{,}31.$$

L'entier n doit dépasser ce quotient ou l'égaler : le premier qui convient est $n = 9$.

Vérification. $C_8 \approx 59\,098 < 60\,000$ et $C_9 \approx 62\,053 \geq 60\,000$.

Conclusion. Il faut 9 années pour que le capital atteigne au moins $60\,000$ DH.

4. 1,25 pts

Une seconde épargnante place $50\,000$ DH au taux de 3 pour cent par an ; on admet que son capital vaut $D_n = 50\,000 \times 1{,}03^n$ au bout de n années. Montrer que $C_n \geq D_n$ équivaut à $\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)^n \geq 1{,}25$, puis déterminer à partir de combien d'années le premier capital rattrape le second.

INDICE

Idée : divise les deux membres par $40\,000 \times 1{,}03^n$, qui est strictement positif. **Ensuite :** même méthode qu'à la question 2.

CORRIGÉ

Inéquation. On divise par $40\,000 \times 1{,}03^n$, nombre strictement positif : $C_n \geq D_n$ équivaut à

$$\frac{1{,}05^n}{1{,}03^n} \geq \frac{50\,000}{40\,000},$$

soit $\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)^n \geq 1{,}25$.

Logarithme. Ces deux nombres sont strictement positifs. Selon la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, cela équivaut à :

$$n \log\left(\frac{1{,}05}{1{,}03}\right) \geq \log 1{,}25.$$

Division. Comme $\dfrac{1{,}05}{1{,}03} > 1$, ce logarithme est strictement positif ; le sens est conservé :

$$n \geq \frac{\log 1{,}25}{\log\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)} \approx 11{,}60.$$

Vérification. $\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)^{11} \approx 1{,}236$ et $\left(\dfrac{1{,}05}{1{,}03}\right)^{12} \approx 1{,}260$.

Conclusion. Le premier capital rattrape le second au bout de 12 ans.

Exercice 5 4,5 pts

Un chiffre d'affaires en baisse

Données fictives. Une entreprise réalise un chiffre d'affaires de $2{,}5$ millions de DH la première année étudiée. Ce chiffre d'affaires baisse ensuite de 8 pour cent par an. On note u_n le chiffre d'affaires, en millions de DH, n années plus tard ; ainsi $u_0 = 2{,}5$.

1. 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : baisser de 8 pour cent revient à multiplier par $0{,}92$.

CORRIGÉ

Baisser de 8 pour cent revient à multiplier par $1 - 0{,}08 = 0{,}92$:

- $u_1 = 2{,}5 \times 0{,}92 = 2{,}3$;
- $u_2 = 2{,}3 \times 0{,}92 = 2{,}116$.

Conclusion. $u_1 = 2{,}3$ et $u_2 = 2{,}116$.

2. 0,75 pts

Montrer que $u_n = 2{,}5 \times 0{,}92^n$ pour tout entier naturel n.

INDICE

Outil : exprime u_{n+1} en fonction de u_n et reconnais une suite géométrique.

CORRIGÉ

Relation de récurrence. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - 0{,}08\, u_n \\ &= 0{,}92\, u_n. \end{aligned}$$

Suite géométrique. La suite (u_n) est géométrique, de raison $0{,}92$ et de premier terme $u_0 = 2{,}5$.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2{,}5 \times 0{,}92^n$.

3. 0,5 pts

Justifier que $\log 0{,}92 < 0$.

INDICE

Outil : compare $0{,}92$ à 1.

CORRIGÉ

On a $0 < 0{,}92 < 1$. D'après la comparaison de deux logarithmes, $\log 0{,}92 < \log 1$, et $\log 1 = 0$.

Conclusion. $\log 0{,}92 < 0$.

4. 1,5 pts

Montrer que $u_n \leq 1{,}5$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 0{,}6}{\log 0{,}92}$. En déduire au bout de combien d'années le chiffre d'affaires devient inférieur ou égal à $1{,}5$ million de DH.

INDICE

Début : divise par $2{,}5$, puis prends le logarithme. **Attention :** la question 3 donne le signe du nombre par lequel tu divises.

CORRIGÉ

Inéquation. En divisant par $2{,}5 > 0$, $u_n \leq 1{,}5$ équivaut à $0{,}92^n \leq 0{,}6$. Ces deux nombres sont strictement positifs. Par la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, cela équivaut à :

$$n \log 0{,}92 \leq \log 0{,}6.$$

Division. D'après la question 3, $\log 0{,}92 < 0$: le sens change, et

$$n \geq \frac{\log 0{,}6}{\log 0{,}92} \approx 6{,}13.$$

Vérification. $u_6 \approx 1{,}516$ et $u_7 \approx 1{,}395$.

Conclusion. Il faut 7 années pour que le chiffre d'affaires devienne inférieur ou égal à $1{,}5$ million de DH.

5. 1,25 pts

Montrer que $u_n \leq 0{,}25$ équivaut à $n \geq -\dfrac{1}{\log 0{,}92}$. En déduire au bout de combien d'années le chiffre d'affaires est divisé au moins par dix.

INDICE

Outil : $\dfrac{0{,}25}{2{,}5} = 10^{-1}$; reprends la méthode de la question 4.

CORRIGÉ

Inéquation. En divisant par $2{,}5 > 0$, $u_n \leq 0{,}25$ équivaut à $0{,}92^n \leq 0{,}1$. Par la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, cela équivaut à :

$$n \log 0{,}92 \leq \log 0{,}1,$$

avec $\log 0{,}1 = -1$.

Division. Comme $\log 0{,}92 < 0$, le sens change :

$$n \geq -\frac{1}{\log 0{,}92} \approx 27{,}62.$$

Vérification. $u_{27} \approx 0{,}263$ et $u_{28} \approx 0{,}242$.

Conclusion. Le chiffre d'affaires est divisé au moins par dix au bout de 28 ans.