BURHAN

# Logarithme décimal : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/logarithme-decimal/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Logarithme décimal | Entraînement | 7 |

### Exercice 1

## Simplifications enchaînées

#### 1.

Simplifier $A = \log 72 - 3\log 2 - 2\log 3$.

INDICE

**Début :** décompose $72$ en produit de puissances de $2$ et de $3$.

CORRIGÉ

**Décomposition.** $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$.

**Logarithme de 72.** D'après la propriété du produit, puis le logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned}\log 72 &= \log\left(2^3\right) \\ &\quad + \log\left(3^2\right) \\ &= 3\log 2 + 2\log 3.\end{aligned}$$

**Simplification.** On remplace $\log 72$ dans $A$ :

$$\begin{aligned}A &= 3\log 2 + 2\log 3 \\ &\quad - 3\log 2 - 2\log 3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $A = 0$.

#### 2.

Simplifier $B = \log\sqrt{10} + \log 0{,}4 + \log 25$.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'une racine carrée pour le premier terme ; la propriété du produit pour les deux autres.

CORRIGÉ

**Premier terme.** D'après le logarithme d'une racine carrée :

$$\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2}.$$

**Deux derniers termes.** D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned}&\log 0{,}4 + \log 25 \\ &= \log(0{,}4 \times 25) \\ &= \log 10 = 1.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $B = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

### 3.

Exprimer $\log 0{,}08$ en fonction de $\log 2$. En déduire une valeur approchée de $\log 0{,}08$, sachant que $\log 2 \approx 0{,}301$.

INDICE

**Début :** $0{,}08 = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2^3}{10^2}$.

CORRIGÉ

**Expression exacte.** On écrit $0{,}08 = \dfrac{2^3}{10^2}$. D'après le logarithme d'un quotient, puis celui d'une puissance :

$$\begin{aligned} \log 0{,}08 &= \log\left(2^3\right) \\ &\quad - \log\left(10^2\right) \\ &= 3\log 2 - 2. \end{aligned}$$

**Valeur approchée.** Avec $\log 2 \approx 0{,}301$ :

$$\begin{aligned} \log 0{,}08 &\approx 3 \times 0{,}301 - 2 \\ &= -1{,}097. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\log 0{,}08 = 3\log 2 - 2$, et $\log 0{,}08 \approx -1{,}097$.

### Exercice 2

## Une équation avec son domaine

On considère l'équation $(E)$ : $\log(x-1)+\log(x+3)=\log(x+9)$.

**1.**

Déterminer l'ensemble $D$ des réels pour lesquels chaque logarithme de $(E)$ existe.

INDICE

**Outil :** chacune des trois expressions doit être strictement positive.

CORRIGÉ

Chaque logarithme de $(E)$ existe si et seulement si son argument est strictement positif :

- $x-1>0$, soit $x>1$ ;
- $x+3>0$, soit $x>-3$ ;
- $x+9>0$, soit $x>-9$.

Les trois conditions sont réalisées ensemble si et seulement si $x>1$.

**Conclusion.** $D=]1,+\infty[$.

**2.**

Montrer que, pour $x$ dans $D$, l'équation $(E)$ équivaut à $x^2+x-12=0$.

INDICE

**Outil :** la propriété du produit, puis la comparaison de deux logarithmes.

CORRIGÉ

Soit $x$ dans $D$.

**Regroupement.** D'après la propriété du produit, $(E)$ s'écrit :

$$\log\left((x-1)(x+3)\right) = \log(x+9).$$

**Comparaison.** Les deux arguments sont strictement positifs. D'après la comparaison de deux logarithmes, $(E)$ équivaut à $(x-1)(x+3)=x+9$.

**Développement.** On a $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$, donc $(E)$ équivaut à $x^2+2x-3=x+9$.

**Conclusion.** Pour $x$ dans $D$, $(E)$ équivaut à $x^2+x-12=0$.

### 3.

Résoudre $(E)$.

INDICE

**Attention :** une racine de l'équation du second degré n'est solution de $(E)$ que si elle appartient à $D$.

CORRIGÉ

**Racines du trinôme.** On factorise :

$$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4).$$

Les racines sont $3$ et $-4$.

**Domaine.** Seul $3$ appartient à $D = ]1, +\infty[$ ; le réel $-4$ est écarté.

**Vérification.** Pour $x = 3$, on a $\log 2 + \log 6 = \log 12$, et $3 + 9 = 12$.

**Conclusion.** $S = \{3\}$.

### Exercice 3

## Une inéquation logarithmique

On considère l'inéquation $(I)$ : $\log x + \log(x+3) \leq 1$.

**1.**

Déterminer l'ensemble $D$ des réels pour lesquels $(I)$ a un sens.

INDICE

**Outil :** $x$ et $x+3$ doivent être strictement positifs.

CORRIGÉ

Il faut $x > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > 0$ et $x > -3$. La première condition entraîne la seconde.

**Conclusion.** $D = ]0, +\infty[$.

**2.**

Montrer que, pour $x$ dans $D$, l'inéquation $(I)$ équivaut à $x^2 + 3x - 10 \leq 0$.

INDICE

**Début :** écris $1 = \log 10$, puis regroupe le premier membre en un seul logarithme.

CORRIGÉ

Soit $x$ dans $D$. On écrit $1 = \log 10$.

**Regroupement.** D'après la propriété du produit, $(I)$ s'écrit :

$$\log\left(x(x+3)\right) \leq \log 10.$$

**Comparaison.** D'après la comparaison de deux logarithmes, $(I)$ équivaut à $x(x+3) \leq 10$, soit $x^2 + 3x \leq 10$.

**Conclusion.** Pour $x$ dans $D$, $(I)$ équivaut à $x^2 + 3x - 10 \leq 0$.

**3.**

Résoudre $(I)$.

INDICE

**Outil :** un trinôme est du signe de son coefficient de $x^2$ (ici $1$) à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre elles.

CORRIGÉ

**Signe du trinôme.** On factorise :

$$\begin{aligned} &x^2 + 3x - 10 \\ &= (x-2)(x+5). \end{aligned}$$

Les racines sont $-5$ et $2$, et le coefficient de $x^2$ vaut $1 > 0$. Le trinôme est donc négatif ou nul pour $-5 \leq x \leq 2$.

**Domaine.** On ne garde que les réels de $D = ]0, +\infty[$, soit $0 < x \leq 2$.

**Conclusion.** $S = ]0, 2]$.

### Exercice 4

## Inéquations en puissance de dix

**1.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3 \times 10^x - 5 \leq 7$. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la borne obtenue.

INDICE

**Début :** isole $10^x$ en deux opérations.

CORRIGÉ

**Isoler la puissance de dix.** On ajoute $5$, puis on divise par $3 > 0$ :

$$3 \times 10^x \leq 12,$$

soit $10^x \leq 4$.

**Résolution.** Comme $4 > 0$, d'après la résolution de $10^x \leq a$, l'inéquation équivaut à $x \leq \log 4$.

**Conclusion.** $S = ]-\infty, \log 4]$, avec $\log 4 \approx 0{,}602$.

**2.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 \times 10^x - 9 > 151$. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la borne obtenue.

INDICE

**Début :** isole $10^x$ ; l'inégalité est stricte.

CORRIGÉ

**Isoler la puissance de dix.** On ajoute $9$, puis on divise par $2 > 0$ :

$$2 \times 10^x > 160,$$

soit $10^x > 80$.

**Résolution.** Comme $80 > 0$, d'après la résolution de $10^x > a$, l'inéquation équivaut à $x > \log 80$ ; l'inégalité reste stricte.

**Conclusion.** $S = ]\log 80, +\infty[$, avec $\log 80 \approx 1{,}903$.

**3.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $10^x + 6 > 2$.

INDICE

**Outil :** isole $10^x$, puis regarde le signe du second membre.

CORRIGÉ

On retranche $6$ : l'inéquation équivaut à $10^x > -4$.

Pour tout réel $x$, $10^x > 0$, et $0 > -4$ : tout réel $x$ vérifie l'inéquation.

**Conclusion.** $S = \mathbb{R}$.

### Exercice 5

## Doubler un capital

*Données fictives.* On place un capital de $15\,000$ DH, avec des intérêts composés au taux de 4,5 pour cent par an. On note $C_n$ le capital, en DH, au bout de $n$ années ; ainsi $C_0 = 15\,000$.

**1.**

Justifier que $C_{n+1} = 1{,}045\,C_n$, puis que $C_n = 15\,000 \times 1{,}045^n$ pour tout entier naturel $n$.

INDICE

**Outil :** augmenter de 4,5 pour cent revient à multiplier par $1{,}045$.

CORRIGÉ

**Relation de récurrence.** Soit $n$ un entier naturel. Au cours de l'année $n+1$, les intérêts valent $0{,}045\,C_n$, donc :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + 0{,}045\,C_n \\ &= 1{,}045\,C_n. \end{aligned}$$

**Terme général.** La suite $(C_n)$ est donc géométrique, de raison $1{,}045$ et de premier terme $C_0 = 15\,000$.

**Conclusion.** Pour tout entier naturel $n$, $C_n = 15\,000 \times 1{,}045^n$.

**2.**

Montrer que $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 2}{\log 1{,}045}$.

INDICE

**Début :** divise par $15\,000$, puis prends le logarithme. **Attention :** donne le signe de $\log 1{,}045$ avant de diviser.

CORRIGÉ

**Se ramener à une puissance.** On divise par $15\,000 > 0$ : $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $1{,}045^n \geq 2$.

**Passage au logarithme.** Les nombres $1{,}045^n$ et $2$ sont strictement positifs. Par la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, l'inégalité équivaut à :

$$n \log 1{,}045 \geq \log 2.$$

**Signe avant la division.** Comme $1{,}045 > 1$, on a $\log 1{,}045 > 0$ : diviser par ce nombre conserve le sens.

**Conclusion.** $C_n \geq 30\,000$ équivaut à $n \geq \dfrac{\log 2}{\log 1{,}045}$.

### 3.

En déduire au bout de combien d'années le capital aura au moins doublé. Vérifier à la calculatrice.

INDICE

**Outil :** calcule le quotient, puis prends le plus petit entier qui convient.

CORRIGÉ

**Calcul du quotient.** À la calculatrice :

$$\frac{\log 2}{\log 1{,}045} \approx 15{,}75.$$

L'entier $n$ doit être supérieur ou égal à ce quotient : le plus petit qui convient est $n = 16$.

**Vérification.** $1{,}045^{15} \approx 1{,}935 < 2$ et $1{,}045^{16} \approx 2{,}022 \geq 2$.

**Conclusion.** Le capital aura au moins doublé au bout de $16$ ans.

### Exercice 6

## Une population qui diminue

*Données fictives.* Une ville compte $120\,000$ habitants. Sa population baisse de 2 pour cent par an. On admet qu'au bout de $n$ années elle vaut $P_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.

**1.**

Montrer que $P_n < 100\,000$ équivaut à $0{,}98^n < \dfrac{5}{6}$.

INDICE

**Outil :** divise les deux membres par $120\,000$, nombre strictement positif.

CORRIGÉ

On divise les deux membres par $120\,000$, nombre strictement positif : le sens est conservé. Ainsi $P_n < 100\,000$ équivaut à :

$$0{,}98^n < \frac{100\,000}{120\,000}.$$

On simplifie : $\dfrac{100\,000}{120\,000} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$.

**Conclusion.** $P_n < 100\,000$ équivaut à $0{,}98^n < \dfrac{5}{6}$.

**2.**

Justifier que $\log 0{,}98 < 0$, puis montrer que $P_n < 100\,000$ équivaut à $n > \dfrac{\log\left(\dfrac{5}{6}\right)}{\log 0{,}98}$.

INDICE

**Attention :** diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

CORRIGÉ

**Signe de $\log 0{,}98$.** On a $0 < 0{,}98 < 1$, donc $\log 0{,}98 < \log 1$ d'après la comparaison de deux logarithmes, c'est-à-dire $\log 0{,}98 < 0$.

**Passage au logarithme.** Les deux membres de $0{,}98^n < \dfrac{5}{6}$ sont strictement positifs. Par la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, cette inéquation équivaut à :

$$n \log 0{,}98 < \log\left(\frac{5}{6}\right).$$

**Division.** On divise par $\log 0{,}98$, qui est strictement négatif : le sens change.

**Conclusion.** $P_n < 100\,000$ équivaut à $n > \dfrac{\log\left(\dfrac{5}{6}\right)}{\log 0{,}98}$.

### 3.

En déduire au bout de combien d'années la population passera sous $100\,000$ habitants. Vérifier.

INDICE

**Outil :** le quotient à la calculatrice, puis le plus petit entier strictement supérieur.

CORRIGÉ

**Calcul du quotient.** À la calculatrice :

$$\frac{\log\left(\dfrac{5}{6}\right)}{\log 0{,}98} \approx 9{,}02.$$

L'entier $n$ doit être strictement supérieur à ce quotient : le plus petit qui convient est $n = 10$.

**Vérification.** $P_9 \approx 100\,050$, encore au-dessus de $100\,000$, et $P_{10} \approx 98\,049$.

**Conclusion.** La population passera sous $100\,000$ habitants au bout de $10$ ans.

### Exercice 7

## Un très grand nombre

On considère l'entier $N = 3^{40}$.

**1.**

Montrer que $\log N = 40 \log 3$, puis donner une valeur approchée de $\log N$ à $10^{-2}$ près.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'une puissance.

CORRIGÉ

D'après le logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned} \log N &= \log\left(3^{40}\right) \\ &= 40 \log 3. \end{aligned}$$

À la calculatrice, $\log N \approx 19{,}08$ à $10^{-2}$ près.

**Conclusion.** $\log N = 40 \log 3$, et $\log N \approx 19{,}08$.

**2.**

En déduire que $10^{19} \leq N < 10^{20}$, puis le nombre de chiffres de $N$.

INDICE

**Outil :** $19 = \log\left(10^{19}\right)$ et $20 = \log\left(10^{20}\right)$, puis la comparaison de deux logarithmes.

CORRIGÉ

**Encadrement de $\log N$.** D'après la question 1, $\log N \approx 19{,}08$ à $10^{-2}$ près, donc $19 \leq \log N < 20$. On écrit $19 = \log\left(10^{19}\right)$ et $20 = \log\left(10^{20}\right)$.

**Encadrement de $N$.** D'après la comparaison de deux logarithmes, on obtient $10^{19} \leq N < 10^{20}$.

**Nombre de chiffres.** Le nombre $10^{19}$ est le plus petit entier à $20$ chiffres, et $10^{20}$ est le plus petit entier à $21$ chiffres.

**Conclusion.** $10^{19} \leq N < 10^{20}$, donc $N$ s'écrit avec $20$ chiffres.

### 3.

Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $3^n \geq 10^{30}$.

INDICE

**Début :** prends le logarithme des deux membres. **Ensuite :** le signe de $\log 3$.

CORRIGÉ

**Passage au logarithme.** Les nombres $3^n$ et $10^{30}$ sont strictement positifs. Par la comparaison de deux logarithmes, puis le logarithme d'une puissance, $3^n \geq 10^{30}$ équivaut à :

$$n \log 3 \geq 30.$$

**Signe avant la division.** Comme $3 > 1$, on a $\log 3 > 0$ : le sens est conservé.

**Conclusion.** L'inégalité équivaut à $n \geq \dfrac{30}{\log 3} \approx 62{,}88$. Le plus petit entier naturel qui convient est $n = 63$.