BURHAN

# Logarithme décimal : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/logarithme-decimal/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Logarithme décimal | Application | 8 |

### Exercice 1

## Logarithmes de puissances de dix

### 1.

Calculer $\log 10\,000$ et $\log 0{,}00001$.

INDICE

**Outil :** écris chaque nombre sous la forme $10^n$, puis applique la définition du logarithme d'une puissance de dix.

CORRIGÉ

On écrit chaque nombre comme une puissance de dix :

$$\begin{aligned} 10\,000 &= 10^4, \\ 0{,}00001 &= 10^{-5}. \end{aligned}$$

D'après la définition du logarithme d'une puissance de dix, $\log\left(10^n\right) = n$ pour tout entier relatif $n$.

**Conclusion.** $\log 10\,000 = 4$ et $\log 0{,}00001 = -5$.

### 2.

Calculer $\log\left(10^3 \times 10^{-7}\right)$ et $\log\left(\dfrac{10^6}{10^{-2}}\right)$.

INDICE

**Outil :** les règles des puissances de dix donnent d'abord une seule puissance.

CORRIGÉ

**Produit.** D'après la règle du produit de deux puissances de dix :

$$\begin{aligned} 10^3 \times 10^{-7} &= 10^{3-7} \\ &= 10^{-4}. \end{aligned}$$

**Quotient.** D'après la règle du quotient de deux puissances de dix :

$$\begin{aligned} \frac{10^6}{10^{-2}} &= 10^{6+2} \\ &= 10^8. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Par définition du logarithme d'une puissance de dix, $\log\left(10^3 \times 10^{-7}\right) = -4$ et $\log\left(\dfrac{10^6}{10^{-2}}\right) = 8$.

### 3.

Calculer $\log 0{,}01 + \log 1000$.

INDICE

**Outil :** calcule chaque logarithme séparément avec la définition.

CORRIGÉ

On a $0{,}01 = 10^{-2}$ et $1000 = 10^{3}$. D'après la définition, $\log 0{,}01 = -2$ et $\log 1000 = 3$, donc :

$$\begin{aligned} &\log 0{,}01 + \log 1000 \\ &= -2 + 3 = 1. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\log 0{,}01 + \log 1000 = 1$.

### Exercice 2

## Encadrer un logarithme entre deux entiers

**1.**

Encadrer $2\,700$ entre deux puissances de dix consécutives, puis en déduire un encadrement de $\log 2\,700$ entre deux entiers.

INDICE

**Outil :** la fonction $\log$ est strictement croissante, et $\log\left(10^{n}\right) = n$.

CORRIGÉ

**Puissances de dix voisines.** On a $10^{3} = 1000$ et $10^{4} = 10\,000$, donc :

$$10^{3} \leq 2\,700 < 10^{4}.$$

**Passage au logarithme.** La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ : elle conserve l'ordre. De plus, $\log\left(10^{3}\right) = 3$ et $\log\left(10^{4}\right) = 4$.

**Conclusion.** $10^{3} \leq 2\,700 < 10^{4}$, donc $3 \leq \log 2\,700 < 4$.

**2.**

Même travail pour $\log 0{,}045$.

INDICE

**Outil :** cherche les puissances de dix d'exposant négatif qui entourent $0{,}045$.

CORRIGÉ

**Puissances de dix voisines.** On a $10^{-2} = 0{,}01$ et $10^{-1} = 0{,}1$, donc :

$$10^{-2} \leq 0{,}045 < 10^{-1}.$$

**Passage au logarithme.** La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et $\log\left(10^{-2}\right) = -2$, $\log\left(10^{-1}\right) = -1$.

**Conclusion.** $10^{-2} \leq 0{,}045 < 10^{-1}$, donc $-2 \leq \log 0{,}045 < -1$.

**3.**

À la calculatrice, donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\log 2\,700$ et de $\log 0{,}045$. Contrôler avec les questions 1 et 2.

INDICE

**Outil :** la touche « log » de la calculatrice, puis un arrondi au millième.

CORRIGÉ

À la calculatrice, arrondi au millième :

- $\log 2\,700 \approx 3{,}431$, nombre compris entre $3$ et $4$ ;
- $\log 0{,}045 \approx -1{,}347$, nombre compris entre $-2$ et $-1$.

**Conclusion.** Les deux valeurs approchées respectent les encadrements des questions 1 et 2 : les résultats sont cohérents.

### 4.

Un entier naturel $N$ vérifie $5 \leq \log N < 6$. Avec combien de chiffres s'écrit $N$ ?

INDICE

**Outil :** écris $5 = \log\left(10^5\right)$ et $6 = \log\left(10^6\right)$, puis utilise la comparaison de deux logarithmes.

CORRIGÉ

On écrit les bornes comme des logarithmes : $5 = \log\left(10^5\right)$ et $6 = \log\left(10^6\right)$. L'hypothèse s'écrit $\log\left(10^5\right) \leq \log N < \log\left(10^6\right)$.

D'après la comparaison de deux logarithmes, on obtient $10^5 \leq N < 10^6$, soit $100\,000 \leq N \leq 999\,999$.

**Conclusion.** Le plus petit entier à $6$ chiffres est $100\,000$, le plus grand est $999\,999$ : l'entier $N$ s'écrit avec $6$ chiffres.

### Exercice 3

## Une propriété à la fois

On donne $\log 2 \approx 0{,}301$ et $\log 3 \approx 0{,}477$. Dans chaque question, nomme la propriété utilisée.

**1.**

Exprimer $\log 6$ à l'aide de $\log 2$ et de $\log 3$, puis en donner une valeur approchée.

INDICE

**Outil :** $6 = 2 \times 3$.

CORRIGÉ

Comme $6 = 2 \times 3$, la propriété du produit donne :

$$\begin{aligned} \log 6 &= \log(2 \times 3) \\ &= \log 2 + \log 3. \end{aligned}$$

Avec les valeurs données :

$$\begin{aligned} \log 6 &\approx 0{,}301 + 0{,}477 \\ &= 0{,}778. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\log 6 = \log 2 + \log 3$, et $\log 6 \approx 0{,}778$.

**2.**

Exprimer $\log\left(\dfrac{1}{3}\right)$ à l'aide de $\log 3$.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'un inverse.

CORRIGÉ

D'après le logarithme d'un inverse, l'égalité $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a$ est vraie pour tout réel $a > 0$. On l'applique avec $a = 3$.

**Conclusion.** $\log\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\log 3$.

**3.**

Exprimer $\log 1{,}5$ à l'aide de $\log 2$ et de $\log 3$.

INDICE

**Outil :** $1{,}5 = \dfrac{3}{2}$.

CORRIGÉ

On écrit $1{,}5 = \dfrac{3}{2}$. D'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned} \log 1{,}5 &= \log\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \log 3 - \log 2. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\log 1{,}5 = \log 3 - \log 2$.

### 4.

Exprimer $\log 81$ à l'aide de $\log 3$, puis en donner une valeur approchée.

INDICE

**Outil :** $81 = 3^4$.

CORRIGÉ

On écrit $81 = 3^4$. D'après le logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned} \log 81 &= \log\left(3^4\right) \\ &= 4\log 3. \end{aligned}$$

Avec la valeur donnée :

$$\begin{aligned} \log 81 &\approx 4 \times 0{,}477 \\ &= 1{,}908. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\log 81 = 4\log 3$, et $\log 81 \approx 1{,}908$.

### 5.

Calculer la valeur exacte de $\log \sqrt{1000}$.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'une racine carrée, avec $1000 = 10^3$.

CORRIGÉ

D'après le logarithme d'une racine carrée, puis avec $\log 1000 = 3$ :

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1000} &= \frac{1}{2}\log 1000 \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\log \sqrt{1000} = \dfrac{3}{2}$.

### Exercice 4

## Simplifier sans calculatrice

#### 1.

Simplifier $A = \log 4 + \log 25$.

INDICE

**Outil :** la propriété du produit, puis calcule $4 \times 25$.

CORRIGÉ

D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned} A &= \log(4 \times 25) \\ &= \log 100. \end{aligned}$$

Or $100 = 10^2$, donc $\log 100 = 2$.

**Conclusion.** $A = 2$.

#### 2.

Simplifier $B = \log 3000 - \log 3$.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'un quotient.

CORRIGÉ

D'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned} B &= \log\left(\frac{3000}{3}\right) \\ &= \log 1000. \end{aligned}$$

Or $1000 = 10^3$, donc $\log 1000 = 3$.

**Conclusion.** $B = 3$.

#### 3.

Simplifier $C = \log 0{,}2 + \log 5$.

INDICE

**Outil :** la propriété du produit ; que vaut $0{,}2 \times 5$ ?

CORRIGÉ

D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned} C &= \log(0{,}2 \times 5) \\ &= \log 1. \end{aligned}$$

Or $1 = 10^0$, donc $\log 1 = 0$.

**Conclusion.** $C = 0$.

### Exercice 5

## La calculatrice dans les deux sens

#### 1.

Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\log 58$ et de $\log 0{,}9$.

INDICE

**Outil :** la touche « log », puis un arrondi au millième.

CORRIGÉ

À la calculatrice, arrondi au millième : $\log 58 \approx 1{,}763$ et $\log 0{,}9 \approx -0{,}046$.

**Contrôle du signe.** On a $0 < 0{,}9 < 1$, donc $\log 0{,}9 < \log 1 = 0$, d'après la comparaison de deux logarithmes : la seconde valeur est bien négative.

#### 2.

Le réel $a > 0$ vérifie $\log a = 1{,}7$. Donner la valeur exacte de $a$, puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

INDICE

**Outil :** si $\log a = y$, alors $a = 10^{y}$.

CORRIGÉ

**Valeur exacte.** Pour tout réel $a > 0$, on a $10^{\log a} = a$ (puissance de dix d'exposant réel). Avec $\log a = 1{,}7$ :

$$a = 10^{1{,}7}.$$

**Valeur approchée.** À la calculatrice, touche « $10^{x}$ » : $a \approx 50{,}119$.

**Conclusion.** $a = 10^{1{,}7}$, et $a \approx 50{,}119$ à $10^{-3}$ près.

#### 3.

Même question pour le réel $b > 0$ tel que $\log b = -0{,}4$.

INDICE

**Outil :** même méthode, avec la touche « $10^{x}$ ».

CORRIGÉ

Même méthode : $b = 10^{\log b}$, donc $b = 10^{-0{,}4}$.

À la calculatrice : $b \approx 0{,}398$.

**Conclusion.** $b = 10^{-0{,}4}$, et $b \approx 0{,}398$ à $10^{-3}$ près.

### 4.

Contrôler l'ordre de grandeur de $a$ et de $b$ sans calculatrice.

INDICE

**Outil :** encadre $1{,}7$ et $-0{,}4$ entre deux entiers consécutifs.

CORRIGÉ

**Ordre de grandeur de $a$.** On a $1 \leq 1{,}7 < 2$, c'est-à-dire $\log 10 \leq \log a < \log 100$. D'après la comparaison de deux logarithmes, $10 \leq a < 100$.

**Ordre de grandeur de $b$.** On a $-1 \leq -0{,}4 < 0$, c'est-à-dire $\log 0{,}1 \leq \log b < \log 1$. De même, $0{,}1 \leq b < 1$.

**Conclusion.** Les valeurs $50{,}119$ et $0{,}398$ trouvées à la calculatrice respectent ces ordres de grandeur.

### Exercice 6

## Équations en puissance de dix

#### 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = 1000$.

INDICE

**Outil :** $1000 > 0$, donc $10^x = a$ équivaut à $x = \log a$.

CORRIGÉ

Le second membre $1000$ est strictement positif. D'après la résolution de $10^x = a$ pour $a > 0$, l'équation équivaut à :

$$x = \log 1000 = 3.$$

**Conclusion.** $S = \{3\}$.

#### 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = 45$. Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

INDICE

**Outil :** même propriété ; la calculatrice ne sert qu'à la fin.

CORRIGÉ

Comme $45 > 0$, l'équation équivaut à $x = \log 45$.

À la calculatrice, $\log 45 \approx 1{,}653$.

**Conclusion.** $S = \{\log 45\}$, avec $\log 45 \approx 1{,}653$ à $10^{-3}$ près.

#### 3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $10^x = -8$.

INDICE

**Outil :** quel est le signe d'une puissance de dix ?

CORRIGÉ

Pour tout réel $x$, la puissance de dix $10^x$ est strictement positive. Or $-8 < 0$ : aucun réel $x$ ne vérifie $10^x = -8$.

**Conclusion.** L'équation n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

### 4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2 \times 10^{x} = 7$, puis donner une valeur approchée de la solution à $10^{-3}$ près.

INDICE

**Début :** divise les deux membres par $2$ pour isoler $10^{x}$.

CORRIGÉ

**Isoler la puissance de dix.** On divise les deux membres par $2$ : l'équation équivaut à $10^{x} = 3{,}5$.

**Résolution.** Comme $3{,}5 > 0$, elle équivaut à $x = \log 3{,}5$.

**Conclusion.** $S = \{\log 3{,}5\}$, avec $\log 3{,}5 \approx 0{,}544$ à $10^{-3}$ près.

Exercice 7

## Équations logarithmiques immédiates

### 1.

Résoudre l'équation $\log x = 3$.

INDICE

**Outil :** écris $3$ comme le logarithme d'une puissance de dix.

CORRIGÉ

**Domaine.** Le logarithme de $x$ existe si et seulement si $x > 0$ :

$$D = ]0, +\infty[\,.$$

**Résolution.** On écrit $3 = \log 1000$. Pour $x$ dans $D$, l'équation s'écrit $\log x = \log 1000$. D'après la comparaison de deux logarithmes, elle équivaut à $x = 1000$, réel qui appartient à $D$.

**Conclusion.** $S = \{1000\}$.

### 2.

Résoudre l'équation $\log(x - 2) = \log 9$.

INDICE

**Outil :** le domaine d'abord, puis la comparaison de deux logarithmes.

CORRIGÉ

**Domaine.** Il faut $x - 2 > 0$, soit $x > 2$ :

$$D = ]2, +\infty[\,.$$

**Résolution.** Pour $x$ dans $D$, d'après la comparaison de deux logarithmes, l'équation équivaut à $x - 2 = 9$, soit $x = 11$. Ce réel appartient à $D$.

**Conclusion.** $S = \{11\}$.

### 3.

Résoudre l'équation $\log(2x) = -1$.

INDICE

**Outil :** $-1 = \log 0{,}1$.

CORRIGÉ

**Domaine.** Il faut $2x > 0$, soit $x > 0$ :

$$D = ]0, +\infty[\,.$$

**Résolution.** On écrit $-1 = \log 0{,}1$. Pour $x$ dans $D$, l'équation s'écrit $\log(2x) = \log 0{,}1$. D'après la comparaison de deux logarithmes, elle équivaut à $2x = 0{,}1$, soit $x = 0{,}05$, réel qui appartient à $D$.

**Conclusion.** $S = \{0{,}05\}$.

### Exercice 8

## Comparer sans calculatrice

#### 1.

Donner le signe de $\log 0{,}35$ et celui de $\log 1{,}2$.

INDICE

**Outil :** compare chaque nombre à $1$.

CORRIGÉ

On compare chaque nombre à $1$, sachant que $\log 1 = 0$, et l'on utilise la comparaison de deux logarithmes :

- $0 < 0{,}35 < 1$, donc $\log 0{,}35 < \log 1$, soit $\log 0{,}35 < 0$ ;
- $1{,}2 > 1$, donc $\log 1{,}2 > \log 1$, soit $\log 1{,}2 > 0$.

**Conclusion.** $\log 0{,}35$ est strictement négatif et $\log 1{,}2$ est strictement positif.

#### 2.

Comparer $\log 2 + \log 9$ et $\log 17$.

INDICE

**Début :** écris $\log 2 + \log 9$ comme un seul logarithme.

CORRIGÉ

**Un seul logarithme.** D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned} \log 2 + \log 9 &= \log(2 \times 9) \\ &= \log 18. \end{aligned}$$

**Comparaison.** Comme $18 > 17$, la comparaison de deux logarithmes donne $\log 18 > \log 17$.

**Conclusion.** $\log 2 + \log 9 > \log 17$.

#### 3.

Comparer $2\log 3$ et $1$.

INDICE

**Outil :** le logarithme d'une puissance, et $1 = \log 10$.

CORRIGÉ

**Un seul logarithme.** D'après le logarithme d'une puissance, $2\log 3 = \log\left(3^2\right) = \log 9$.

**Comparaison.** On écrit $1 = \log 10$. Comme $9 < 10$, la comparaison de deux logarithmes donne $\log 9 < \log 10$.

**Conclusion.** $2\log 3 < 1$.

### 4.

Résoudre l'inéquation $\log x < 0$.

INDICE

**Outil :** $0 = \log 1$.

CORRIGÉ

**Domaine.** Il faut $x > 0$ :

$$D = ]0, +\infty[\,.$$

**Résolution.** On écrit $0 = \log 1$. Pour $x$ dans $D$, l'inéquation s'écrit $\log x < \log 1$. D'après la comparaison de deux logarithmes, elle équivaut à $x < 1$.

**Conclusion.** Avec le domaine, $S = ]0, 1[$.