BURHAN

Logarithme décimal

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/logarithme-decimal/cours

Chapitre	Semestre
Logarithme décimal	Semestre 2

Compter les zéros

Voici quatre montants, tous **fictifs**. Un stylo coûte 10 DH. Un ordinateur portable coûte $10\,000$ DH.

Une entreprise réalise un chiffre d'affaires annuel de $10\,000\,000$ DH. Une grande commune gère un budget de $1\,000\,000\,000$ DH.

Ces nombres sont si différents qu'on les compare mal d'un coup d'œil. Une idée simple : compter les zéros.

Devine : Un exposant à trouver

Le budget de la commune s'écrit 10^{p}. Quel est l'exposant p ?

A. $p = 8$

Faux.

Compte à nouveau les zéros de $1\,000\,000\,000$: il y en a neuf.

B. $p = 9$

Juste.

Juste : un 1 suivi de neuf zéros, c'est 10^{9}.

C. $p = 10$

Faux.

Tu as compté les chiffres, pas les zéros : ce nombre a dix chiffres, dont neuf zéros.

Correction

Le nombre $1\,000\,000\,000$ s'écrit avec un 1 suivi de neuf zéros : c'est 10^{9}.

De même, le stylo coûte 10^{1} DH, l'ordinateur 10^{4} DH, et le chiffre d'affaires vaut 10^{7} DH. Les exposants 1, 4, 7 et 9 sont de petits nombres, faciles à comparer.

Cet exposant porte un nom : le **logarithme décimal**. Dans ce chapitre, tu apprends à le calculer, d'abord pour les puissances de dix, puis pour tous les nombres strictement positifs.

Tu t'en sers pour simplifier des calculs et résoudre des équations.

Tu réponds enfin à une vraie question d'économie : au bout de combien d'années un capital placé à intérêts composés double-t-il ? Tu réutilises pour cela les suites géométriques et les intérêts composés déjà étudiés.

Logarithme d'une puissance de dix

Comparer des montants

Remarque : Petit rappel : les puissances de dix

Rappel du collège. Pour tous entiers relatifs m et n :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$
$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$
$$(10^m)^n = 10^{mn}$$

De plus, $10^0 = 1$ et $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$. Par exemple, $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$.

Devine : Deux chiffres d'affaires

Le chiffre d'affaires fictif d'une entreprise vaut 10^7 DH. Celui d'une petite boutique vaut 10^4 DH. Combien de fois le premier est-il plus grand que le second ?

A. 3 fois plus grand.

Faux.

3 est la différence des exposants. Le quotient des montants, lui, vaut 10^3.

B. 10^{11} fois plus grand.

Faux.

Tu as ajouté les exposants : c'est la règle du produit, pas celle du quotient.

C. $1\,000$ fois plus grand.

Juste.

Juste : $\dfrac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$.

Correction

On divise le premier montant par le second, d'après la règle du quotient des puissances :

$$\begin{aligned}\frac{10^7}{10^4} &= 10^{7-4}\\ &= 10^3\\ &= 1\,000.\end{aligned}$$

Le chiffre d'affaires de l'entreprise est mille fois plus grand. Retiens : pour des puissances de dix, tout se lit sur les exposants.

En clair. Pour une puissance de dix, l'exposant suffit à décrire le nombre.

Le nombre 10^4 s'écrit avec un 1 suivi de quatre zéros. Le nombre 10^{-3} vaut $0{,}001$: c'est un millième.

Cet exposant reçoit un nom et un symbole dans la définition qui suit.

Le logarithme d'une puissance de dix

Définition : Logarithme décimal d'une puissance de dix

Pour tout entier relatif n, le **logarithme décimal** du nombre 10^n est l'exposant n. On note :

$$\log\left(10^n\right) = n.$$

En particulier, $\log 1 = 0$ car $1 = 10^0$, $\log 10 = 1$ et $\log 0{,}001 = -3$ car $0{,}001 = 10^{-3}$.

En clair. Le symbole $\log$ répond à une seule question : « 10 puissance combien donne ce nombre ? »

Pour $1\,000 = 10^3$, la réponse est 3. On écrit :

$$\log 1\,000 = 3.$$

Exemple : lire un exposant

- $\log\left(10^4\right) = 4$ et $\log 1\,000\,000\,000 = 9$: c'est l'exposant du budget de la commune.
- $0{,}01 = 10^{-2}$, donc $\log 0{,}01 = -2$.
- $1 = 10^0$, donc $\log 1 = 0$.
- $10^5 \times 10^{-8} = 10^{-3}$, donc $\log\left(10^5 \times 10^{-8}\right) = -3$.

Vérifie : Un petit nombre

Que vaut $\log 0{,}0001$?

A. -4

Juste.

Juste : $0{,}0001 = \dfrac{1}{10\,000} = 10^{-4}$.

B. 4

Faux.

Le nombre est plus petit que 1 : l'exposant est négatif.

C. -3

Faux.

Tu as compté les trois zéros après la virgule. Or $10^{-3} = 0{,}001$, qui est dix fois plus grand.

Correction

On écrit le nombre comme une puissance de dix :

$$\begin{aligned} 0{,}0001 &= \frac{1}{10\,000} \\ &= 10^{-4}. \end{aligned}$$

D'après la définition du logarithme décimal, $\log 0{,}0001 = -4$.

Nombre de chiffres, un piège, puis à toi

Exemple : compter les chiffres

Le nombre 10^n, avec $n \geq 0$, s'écrit avec un 1 suivi de n zéros. Il a donc $n+1$ chiffres. Par exemple, un montant fictif de 10^{12} DH s'écrit avec 13 chiffres.

Plus généralement, un entier N à k chiffres vérifie :

$$10^{k-1} \leq N < 10^k.$$

Ainsi $45\,000$ a cinq chiffres, et $10^4 \leq 45\,000 < 10^5$.

Attention : un exposant négatif

✗ « 10^{-3} est un nombre négatif. »

✓ $10^{-3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$: ce nombre est **positif**, mais plus petit que 1. C'est son logarithme, -3, qui est négatif.

À toi : Quatre exposants

Calcule $\log 100\,000$, $\log 0{,}1$ et $\log\left(10^3 \times 10^{-7}\right)$. Dis ensuite combien de chiffres a le nombre 10^{15}. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris chaque nombre sous la forme 10^n.
Indice 2
Pour le produit, ajoute les exposants : $3 + (-7)$.
Indice 3
Point délicat : un nombre compris entre 0 et 1 a un exposant négatif ; ce nombre, lui, reste positif.

Réponse
Premier nombre. $100\,000 = 10^5$, donc $\log 100\,000 = 5$.

Deuxième nombre. $0{,}1 = 10^{-1}$, donc $\log 0{,}1 = -1$.

Produit. On ajoute les exposants : $10^3 \times 10^{-7} = 10^{-4}$, donc $\log\left(10^3 \times 10^{-7}\right) = -4$.

Nombre de chiffres. 10^{15} s'écrit avec un 1 suivi de 15 zéros : il a 16 chiffres.

La fonction logarithme décimal

Entre deux puissances de dix

Devine : Où placer ce logarithme ?

On sait que $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$. Selon toi, où se situe $\log 2$?

A. Entre -1 et 0.

Faux.

2 est plus grand que 1, et $\log 1 = 0$: on attend un nombre positif.

B. Entre 0 et 1.

Juste.

Juste : 2 est entre $1 = 10^0$ et $10 = 10^1$.

C. Exactement 2.

Faux.

C'est $\log 100$ qui vaut 2, et 2 est bien plus petit que 100.

D. Exactement $0{,}2$.

Faux.

Le logarithme ne suit pas les fractions : 2 est le cinquième de 10, mais $\log 2$ n'est pas le cinquième de $\log 10$.

Correction

On a $1 < 2 < 10$, c'est-à-dire $10^0 < 2 < 10^1$. L'exposant cherché est donc entre 0 et 1.

La calculatrice donne $\log 2 \approx 0{,}3010$: ce n'est pas $0{,}2$.

En clair. Les nombres compris entre 1 et 10 ne sont pas des puissances entières de dix. Pourtant, ta calculatrice affiche un logarithme pour chacun. Voici des valeurs arrondies au dix-millième.

x	1	2	3	5	7	10
$\log x$	0	$0{,}3010$	$0{,}4771$	$0{,}6990$	$0{,}8451$	1

Plus x grandit, plus $\log x$ grandit.

Pour définir $\log x$ pour tout $x > 0$, on garde trois règles des puissances de dix :

- $\log\left(10^n\right) = n$;
- un produit devient une somme, comme les exposants dans $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$;
- un plus grand nombre a un plus grand logarithme.

Une seule fonction respecte ces trois règles ; sa construction dépasse ce chapitre.

La fonction logarithme décimal

Propriété : Logarithme décimal d'un réel strictement positif

On admet qu'il existe une **unique** fonction, appelée **fonction logarithme décimal** et notée $\log$, définie sur $]0, +\infty[$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$;
- pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \log a + \log b$ (**propriété du produit**) ;
- la fonction $\log$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, le nombre $\log x$ s'appelle le logarithme décimal de x. Il n'est pas défini pour $x \leq 0$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu n'as pas à le démontrer, mais tu dois savoir t'en servir. Les propriétés de la section suivante s'en déduisent par des calculs de quelques lignes.

Exemple : la propriété du produit

- $\log 20 = \log(2 \times 10) = \log 2 + \log 10$. Avec $\log 2 \approx 0{,}3010$, on obtient $\log 20 \approx 1{,}3010$.
- $\log 300 = \log(3 \times 100) = \log 3 + 2 \approx 2{,}4771$.
- $\log 5\,000 = \log(5 \times 1\,000) = \log 5 + 3 \approx 3{,}6990$.

La calculatrice et l'ordre de grandeur

Méthode : utiliser la calculatrice

1. **Utilise** la touche « log » avec le nombre a, où $a > 0$; l'ordre de saisie dépend du modèle de calculatrice.
2. **Arrondis** le résultat à la précision demandée.
3. **Contrôle** l'ordre de grandeur : si $10^n \leq a < 10^{n+1}$, alors $n \leq \log a < n + 1$, car la fonction $\log$ est strictement croissante.

Exemple : encadrer un logarithme

- Un chiffre d'affaires fictif vaut $4\,500\,000$ DH. On a $10^6 \leq 4\,500\,000 < 10^7$, donc $6 \leq \log 4\,500\,000 < 7$. La calculatrice donne $\log 4\,500\,000 \approx 6{,}6532$.
- Pour $0{,}03$: $10^{-2} \leq 0{,}03 < 10^{-1}$, donc $-2 \leq \log 0{,}03 < -1$. La calculatrice donne $\log 0{,}03 \approx -1{,}5229$.

Vérifie : Le bon encadrement

Entre quels entiers consécutifs se trouve $\log 820$?

A. Entre 8 et 9.

Faux.

820 commence par 8, mais le logarithme dépend de la taille du nombre, pas de son premier chiffre.

B. Entre 3 et 4.

Faux.

820 a trois chiffres, mais il est plus petit que $10^3 = 1\,000$.

C. Entre 1 et 2.

Faux.

820 dépasse $100 = 10^2$: son logarithme dépasse 2.

D. Entre 2 et 3.

Juste.

Juste : $10^2 \leq 820 < 10^3$.

Correction

On place le nombre entre deux puissances de dix consécutives :

$$10^2 = 100 \leq 820 < 1\,000 = 10^3.$$

La fonction $\log$ est strictement croissante, donc $2 \leq \log 820 < 3$.

La calculatrice confirme : $\log 820 \approx 2{,}9138$.

Un domaine à respecter, puis à toi

Remarque : aucun logarithme pour un nombre négatif ou nul

La fonction $\log$ n'est définie que sur $]0, +\infty[$. Les écritures $\log 0$ et $\log(-100)$ n'ont aucun sens : ta calculatrice affiche un message d'erreur.

Avant d'écrire $\log A$, vérifie que $A > 0$.

À toi : Le prix d'un appartement

Le prix fictif d'un appartement est $850\,000$ DH. Encadre $\log 850\,000$ entre deux entiers consécutifs, puis donne-en une valeur approchée au millième. Déduis-en $\log 8{,}5$ sans calculatrice. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Place $850\,000$ entre deux puissances de dix consécutives.

Indice 2

Écris $850\,000 = 8{,}5 \times 10^5$, puis applique la propriété du produit.

Indice 3

Point délicat : compte les chiffres de $850\,000$ avant de choisir les deux puissances de dix ; un entier à k chiffres est entre 10^{k-1} et 10^k.

Réponse

Encadrement. On a $10^5 \leq 850\,000 < 10^6$. La fonction $\log$ est strictement croissante, donc $5 \leq \log 850\,000 < 6$.

Valeur approchée. La calculatrice donne $\log 850\,000 \approx 5{,}929$.

Déduction. On écrit $850\,000 = 8{,}5 \times 10^5$. D'après la propriété du produit, puis la définition :

$$\log 850\,000 = \log 8{,}5 + 5.$$

Donc $\log 8{,}5 \approx 5{,}929 - 5 = 0{,}929$.

Propriétés algébriques

Un nombre et son inverse

Devine : Le logarithme d'un demi

Avec $\log 2 \approx 0{,}3010$, que vaut environ $\log 0{,}5$?

A. Environ $-0{,}3010$.

Juste.

Juste : $2 \times 0{,}5 = 1$, et $\log 1 = 0$.

B. Environ $3{,}32$.

Faux.

C'est l'inverse de $0{,}3010$. Or le logarithme de l'inverse n'est pas l'inverse du logarithme ; et $0{,}5 < 1$ donne un logarithme négatif.

C. Environ $0{,}1505$.

Faux.

Tu as divisé le logarithme par deux. Or $0{,}5 < 1$, donc $\log 0{,}5 < 0$.

D. Environ $0{,}6990$.

Faux.

C'est environ $\log 5$. Or $0{,}5 < 1$ donne un logarithme négatif.

Correction

On a $2 \times 0{,}5 = 1$. D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned} \log 2 + \log 0{,}5 &= \log 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\log 0{,}5 = -\log 2 \approx -0{,}3010$.

En clair. La calculatrice confirme cette observation sur d'autres nombres.

x	4	5	$0{,}25$	$0{,}2$
$\log x$	$0{,}6021$	$0{,}6990$	$-0{,}6021$	$-0{,}6990$

Or $0{,}25 = \dfrac{1}{4}$ et $0{,}2 = \dfrac{1}{5}$. Un nombre et son inverse ont des logarithmes opposés.

Pourquoi est-ce vrai ? Un nombre multiplié par son inverse donne 1, et $\log 1 = 0$. Les logarithmes de ces deux nombres ont donc une somme nulle.

Le quotient s'en déduit : diviser par b, c'est multiplier par $\dfrac{1}{b}$.

Inverse et quotient

Propriété : Logarithme d'un inverse et d'un quotient

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b \qquad \text{et} \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

Démonstration

Étape 1. On a $b \times \dfrac{1}{b} = 1$, avec $b > 0$ et $\dfrac{1}{b} > 0$. D'après la propriété du produit, $\log b + \log\left(\dfrac{1}{b}\right) = \log 1$.

Étape 2. Or $1 = 10^0$, donc $\log 1 = 0$ par définition du logarithme d'une puissance de dix. Ainsi $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log b$.

Étape 3. On écrit $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$, avec $a > 0$ et $\dfrac{1}{b} > 0$. D'après la propriété du produit, puis l'étape 2 :

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a + \log\left(\frac{1}{b}\right) = \log a - \log b.$$

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans la preuve, d'où vient l'égalité $\log b + \log\left(\dfrac{1}{b}\right) = \log 1$?

A. De la définition du logarithme d'une puissance de dix, appliquée à b.

Faux.
Elle sert à l'étape suivante, pour $\log 1 = 0$. Ici, b n'est pas une puissance de dix en général.

B. De la stricte croissance de la fonction $\log$ sur $]0, +\infty[$.

Faux.

Aucune comparaison n'apparaît dans cette preuve.

C. De la propriété du produit, appliquée à $b \times \dfrac{1}{b} = 1$.

Juste.

Juste : le produit de b et de son inverse vaut 1.

D. Du logarithme d'un quotient, appliqué à $\dfrac{1}{b}$.

Faux.

C'est ce qu'on démontre : on ne peut pas s'en servir.

Correction

Les réels b et $\dfrac{1}{b}$ sont strictement positifs, et leur produit vaut 1. La propriété du produit donne :

$$\log b + \log\left(\frac{1}{b}\right) = \log 1.$$

La définition donne ensuite $\log 1 = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : **se ramener à un produit**, puis appliquer la propriété du produit. Pour l'inverse, on part de $b \times \dfrac{1}{b} = 1$. Pour le quotient, on écrit $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$. La valeur $\log 1 = 0$ fait le reste.

Exemple : inverse et quotient

- $\log\left(\dfrac{1}{1\,000}\right) = -\log 1\,000 = -3$, en accord avec $\dfrac{1}{1\,000} = 10^{-3}$.
- $\log 2{,}5 = \log\left(\dfrac{5}{2}\right) = \log 5 - \log 2$.
- Avec $\log 3 \approx 0{,}4771$: $\log 0{,}03 = \log\left(\dfrac{3}{100}\right) = \log 3 - 2 \approx -1{,}5229$.

Attention : le logarithme d'une somme

✗ « $\log 110 = \log(100 + 10) = \log 100 + \log 10 = 3$. »

✓ La propriété porte sur un **produit**, pas sur une somme. Ici, $3 = \log 1\,000 = \log(100 \times 10)$.

En fait, $100 < 110 < 1\,000$, donc $\log 110$ est entre 2 et 3 : environ $2{,}0414$.

Puissance et racine carrée

Et pour une puissance ? Pour $a > 0$, la propriété du produit donne :

$$\begin{aligned}\log\left(a^2\right) &= \log(a \times a)\\ &= \log a + \log a\\ &= 2\log a.\end{aligned}$$

De même, $\log\left(a^3\right) = 3\log a$.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour un exposant entier positif, on ajoute un facteur a à la fois : c'est un raisonnement par récurrence. Restent l'exposant 0 et les exposants négatifs.

Propriété : Logarithme d'une puissance et d'une racine carrée

Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif n :

$$\log\left(a^n\right) = n\log a \qquad \text{et} \qquad \log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a.$$

Démonstration

Étape 1. Cas $n \geq 1$, par récurrence. Initialisation : $\log\left(a^1\right) = 1 \times \log a$. Hérédité : supposons $\log\left(a^n\right) = n\log a$ pour un entier $n \geq 1$. Comme $a^{n+1} = a^n \times a$, avec $a^n > 0$ et $a > 0$, la propriété du produit donne $\log\left(a^{n+1}\right) = n\log a + \log a = (n+1)\log a$. La formule est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Étape 2. Cas $n = 0$: $a^0 = 1$ et $\log 1 = 0 = 0 \times \log a$.

Étape 3. Cas $n \leq -1$: on pose $p = -n$, donc $p \geq 1$ et $a^n = \dfrac{1}{a^p}$, avec $a^p > 0$. D'après le logarithme d'un inverse, puis l'étape 1 : $\log\left(a^n\right) = -\log\left(a^p\right) = -p\log a = n\log a$.

Étape 4. Comme $\sqrt{a} > 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, l'étape 1 avec $n = 2$ donne $2\log\sqrt{a} = \log a$, d'où $\log\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\log a$.

Vérifie : Les exposants négatifs

Dans la preuve, comment traite-t-on un exposant $n \leq -1$?

A. Par la même récurrence que pour $n \geq 1$, en descendant.

Faux.

La récurrence part de $n = 1$ et monte : elle n'atteint pas les exposants négatifs.

B. Par le logarithme d'un inverse, avec $p = -n$.

Juste.

Juste : $a^n = \dfrac{1}{a^p}$ avec $p \geq 1$.

C. En passant par la racine carrée de a.

Faux.

La racine carrée est traitée à part, comme le cas $n = 2$.

Correction

On pose $p = -n$, donc $p \geq 1$ et $a^n = \dfrac{1}{a^p}$.

Le logarithme d'un inverse, appliqué à $a^p > 0$, puis le cas $p \geq 1$, déjà démontré, donnent :

$$\begin{aligned} \log\left(a^n\right) &= -\log\left(a^p\right) \\ &= -p \log a \\ &= n \log a. \end{aligned}$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux gestes. Pour $n \geq 1$, **on ajoute un facteur à la fois** : $a^{n+1} = a^n \times a$, et la propriété du produit ajoute $\log a$. Pour $n \leq -1$, **on passe à l'inverse**. La racine carrée est le cas $n = 2$ appliqué à $\sqrt{a}$, puisque $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exemple : puissances et racines

- $\log \sqrt{1\,000} = \dfrac{1}{2} \log 1\,000 = \dfrac{3}{2}$.
- $\log 8 = \log\left(2^3\right) = 3 \log 2$ et $\log\left(\dfrac{1}{16}\right) = \log\left(2^{-4}\right) = -4 \log 2$.
- Avec $\log 2 \approx 0{,}3010$: $\log 0{,}2 = \log\left(\dfrac{2}{10}\right) = \log 2 - 1 \approx -0{,}6990$.

Un piège, la méthode, puis à toi

Attention : un carré mal placé

✗ « $\log\left(10\,000^2\right) = (\log 10\,000)^2 = 16$. »

✓ Le carré porte sur le nombre, pas sur le logarithme. D'après le logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned} \log\left(10\,000^2\right) &= 2 \log 10\,000 \\ &= 2 \times 4 = 8. \end{aligned}$$

Contrôle : $10\,000^2 = 10^8$. Le nombre $(\log a)^2$ est un autre objet.

Méthode : simplifier une expression

1. **Décompose** chaque nombre en produit, quotient ou puissance de nombres simples, en particulier de puissances de dix.
2. **Applique** les propriétés : produit, inverse, quotient, puissance, racine carrée.
3. **Remplace** chaque $\log\left(10^n\right)$ par n.

4. **Regroupe** les termes semblables.

À toi : Deux simplifications

Simplifie $A = \log 50 + \log 20 - \log 0{,}1$ et $B = \log \sqrt{10} + \log\left(4^3\right) - 6\log 2$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Dans A, regroupe les deux premiers logarithmes par la propriété du produit.
Indice 2
Dans B, écris $4^3 = 2^6$, puis applique le logarithme d'une puissance.
Indice 3
Point délicat : attention au signe moins devant $\log 0{,}1$, qui est lui-même un nombre négatif.

Réponse
Calcul de A. D'après la propriété du produit :

$$\begin{aligned} &\log 50 + \log 20 \\ &= \log(50 \times 20) \\ &= \log 1\,000 = 3. \end{aligned}$$

De plus, $\log 0{,}1 = -1$. Donc $A = 3 - (-1) = 4$.

Calcul de B. D'après le logarithme d'une racine carrée, $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2}$.

Comme $4^3 = 2^6$, le logarithme d'une puissance donne $\log\left(4^3\right) = 6\log 2$. Donc :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} + 6\log 2 - 6\log 2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comparaison, équations et inéquations

Comparer à partir des logarithmes

Devine : Deux entreprises

Deux entreprises fictives, Atlas et Badr, ont des chiffres d'affaires a et b en DH. Le comptable ne donne que leurs logarithmes : $\log a = 6{,}2$ et $\log b = 5{,}9$. Que peux-tu dire ?

A. Badr a le plus grand chiffre d'affaires.
Faux.
Un plus grand logarithme correspond à un plus grand nombre, pas l'inverse.

B. Atlas a le plus grand chiffre d'affaires.
Juste.
Juste : $\log a > \log b$, donc $a > b$.

C. On ne peut pas comparer a et b sans calculatrice.

Faux.

La fonction $\log$ garde l'ordre : comparer les logarithmes suffit.

Correction

On a $6 < 6{,}2 < 7$ et $5 < 5{,}9 < 6$. Donc a est entre 10^6 et 10^7, et b entre 10^5 et 10^6. Atlas a le plus grand chiffre d'affaires.

L'énoncé qui suit justifie ce passage des logarithmes aux nombres.

En clair. La stricte croissance dit : un plus grand nombre a un plus grand logarithme.

Ici, on fait le chemin inverse : on connaît les logarithmes, et l'on compare les nombres. Ce chemin inverse sert à résoudre des équations comme $\log x = \log 5$.

Pourquoi est-ce vrai ? Supposons $\log a < \log b$. Entre a et b, il n'y a que trois cas possibles : $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.

Les deux derniers contredisent la stricte croissance. On raisonne par élimination.

Comparaison de deux logarithmes

Propriété : Comparaison de deux logarithmes

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $\log a = \log b$ si et seulement si $a = b$;
- $\log a < \log b$ si et seulement si $a < b$;
- $\log a \leq \log b$ si et seulement si $a \leq b$.

En particulier, pour tout réel $x > 0$: $\log x > 0$ si et seulement si $x > 1$, et $\log x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$: si $a < b$, alors $\log a < \log b$.

Étape 2. Réciproquement, supposons $\log a < \log b$. Si l'on avait $a = b$, on aurait $\log a = \log b$; si l'on avait $b < a$, l'étape 1 donnerait $\log b < \log a$. Ces deux cas sont exclus, donc $a < b$.

Étape 3. Si $a = b$, alors $\log a = \log b$. Réciproquement, supposons $\log a = \log b$. Si l'on avait $a < b$ ou $b < a$, l'étape 1 donnerait $\log a < \log b$ ou $\log b < \log a$. Donc $a = b$.

Étape 4. En réunissant les étapes 1, 2 et 3 : $\log a \leq \log b$ si et seulement si $a \leq b$.

Étape 5. Comme $\log 1 = 0$: avec $a = 1$ et $b = x$, les étapes 1 et 2 donnent $\log x > 0$ si et seulement si $x > 1$; avec $a = x$ et $b = 1$, elles donnent $\log x < 0$ si et seulement si $x < 1$.

Vérifie : Le signe d'un logarithme

Dans la preuve, comment obtient-on « $\log x > 0$ si et seulement si $x > 1$ » ?

A. En comparant x à 10, car $\log 10 = 1$.

Faux.

Comparer à 10 donne $\log x > 1$, pas $\log x > 0$.

B. Parce que $\log x$ a le signe de x.

Faux.

Faux : $\log 0{,}5 < 0$ alors que $0{,}5 > 0$.

C. En comparant x à 1, car $\log 1 = 0$.

Juste.

Juste : on applique la comparaison avec 1.

D. Par la propriété du produit.

Faux.

Aucun produit n'intervient : seule la comparaison sert.

Correction

Comme $\log 1 = 0$, l'inégalité $\log x > 0$ s'écrit $\log x > \log 1$.

D'après la comparaison de deux logarithmes, avec $a = 1$ et $b = x$, elle équivaut à $x > 1$.

De même, pour $x > 0$, l'inégalité $\log x < 0$ équivaut à $x < 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour démontrer une réciproque à partir de la seule stricte croissance, **on élimine les autres cas**. Les cas $a = b$ et $a > b$ donneraient $\log a = \log b$ ou $\log a > \log b$. Il ne reste que $a < b$.

Le cas $\leq$ réunit les cas $<$ et $=$. Le cas particulier vient de $\log 1 = 0$: comparer $\log x$ à 0, c'est comparer x à 1.

Exemple : comparer sans calculatrice

- $3 < \pi$, donc $\log 3 < \log \pi$.
- $0 < 0{,}7 < 1$, donc $\log 0{,}7 < 0$.
- Pour $x > 0$, l'équation $\log x = \log 5$ équivaut à $x = 5$.
- $\log x < 2$ s'écrit $\log x < \log 100$: pour $x > 0$, elle équivaut à $x < 100$.

Équations logarithmiques

Méthode : résoudre une équation logarithmique

1. **Domaine** : écris les conditions pour que chaque logarithme existe, puis l'ensemble D des valeurs permises.
2. **Transforme** l'équation, pour x dans D, en une égalité $\log A = \log B$.
3. **Compare** : $\log A = \log B$ équivaut à $A = B$.
4. **Résous**, puis garde seulement les solutions qui appartiennent à D.

Exemple : une équation avec domaine

Résolvons $\log(x-1) + \log(x-4) = 1$.

Domaine. Il faut $x - 1 > 0$ et $x - 4 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$ et $x > 4$. Donc $D =]4, +\infty[$.

Transformation. Pour x dans D, les réels $x - 1$ et $x - 4$ sont strictement positifs. La propriété du produit, avec $1 = \log 10$, donne :

$$\log\left((x-1)(x-4)\right) = \log 10.$$

Résolution. D'après la comparaison de deux logarithmes, $(x-1)(x-4) = 10$. En développant :

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Or $x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1)$: les racines sont 6 et -1. Seul 6 est dans D, donc $S = \{6\}$.

Contrôle. Pour $x = 6$: $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$.

Attention : le domaine d'abord

✗ « Les solutions de $x^2 - 5x - 6 = 0$ sont 6 et -1, donc $S = \{-1; 6\}$. »

✓ Pour $x = -1$, on a $x - 1 = -2$: $\log(-2)$ n'existe pas. Cherche le domaine **avant** de transformer, puis élimine les valeurs qui n'y sont pas : $S = \{6\}$.

Inéquations logarithmiques

Méthode : résoudre une inéquation logarithmique

1. **Domaine** : détermine l'ensemble D des valeurs permises.
2. **Transforme** l'inéquation, pour x dans D, en $\log A < \log B$ (ou avec $\leq$).
3. **Compare** : d'après la comparaison de deux logarithmes, $\log A < \log B$ équivaut à $A < B$, et $\log A \leq \log B$ à $A \leq B$. Le sens est conservé.

4. **Conclus** : l'ensemble des solutions est l'intersection de D et de l'ensemble obtenu.

Exemple : une inéquation

Résolvons $\log(2x-1) \leq \log(x+3)$.

Domaine. Il faut $2x-1>0$ et $x+3>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{1}{2}$ et $x>-3$. Donc $D=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Comparaison. Pour x dans D, d'après la comparaison de deux logarithmes, l'inéquation équivaut à $2x-1 \leq x+3$, soit $x \leq 4$.

Conclusion. On garde les réels de D qui vérifient $x \leq 4$:

$$S=\left]\frac{1}{2},4\right].$$

Exemple : poser une inconnue auxiliaire

Résolvons $(\log x)^2-\log x-2=0$, pour $x>0$.

On pose $X=\log x$: l'équation devient $X^2-X-2=0$, soit $(X-2)(X+1)=0$. Ses racines sont 2 et -1.

- $\log x=2=\log 100$ donne $x=100$, et $\log x=-1=\log 0{,}1$ donne $x=0{,}1$. Donc $S=\{0{,}1;100\}$.
- De même, $(\log x)^2-\log x-2<0$ équivaut à $-1<X<2$, soit $\log 0{,}1<\log x<\log 100$. D'après la comparaison de deux logarithmes, $0{,}1<x<100$. Donc $S=]0{,}1;100[$.

Le coin devoir, puis à toi

Remarque : Coin devoir : rédiger une équation logarithmique

En devoir, la rédaction suit l'ordre de la méthode. Pour l'exemple de l'équation, écris :

« L'équation est définie pour $x>4$. Pour $x>4$, elle équivaut à $\log\left((x-1)(x-4)\right)=\log 10$, donc à $(x-1)(x-4)=10$. Cette équation a pour solutions 6 et -1 ; seul 6 vérifie $x>4$. Donc $S=\{6\}$. »

Le domaine vient en premier : le contrôle final ne le remplace pas.

À toi : Une équation, une inéquation

Résous l'équation $\log x+\log(x+3)=1$, puis l'inéquation $\log(3-x)<\log(x+1)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence chaque fois par le domaine.

Indice 2

Dans l'équation, écris $1 = \log 10$ pour obtenir deux logarithmes égaux.

Indice 3

Point délicat : une racine de l'équation du second degré n'est pas forcément dans le domaine ; vérifie chacune.

Réponse

Domaine de l'équation. Il faut $x > 0$ et $x + 3 > 0$, donc $D =]0, +\infty[$.

Résolution de l'équation. Pour x dans D, la propriété du produit, avec $1 = \log 10$, donne $\log\left(x(x+3)\right) = \log 10$. D'après la comparaison de deux logarithmes, $x(x+3) = 10$, soit :

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Or $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$: les racines sont 2 et -5. Seul 2 est dans D, donc $S = \{2\}$.

Domaine de l'inéquation. Il faut $3 - x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $D =]-1, 3[$.

Résolution de l'inéquation. Pour x dans D, d'après la comparaison de deux logarithmes, l'inéquation équivaut à $3 - x < x + 1$, soit $x > 1$. Donc $S =]1, 3[$.

Puissances de dix d'exposant réel

Un logarithme non entier

Devine : Retrouver un chiffre d'affaires

Le chiffre d'affaires fictif C d'une entreprise, en DH, vérifie $\log C = 6{,}5$. Où se situe C ?

A. $C = 6{,}5$ DH.

Faux.

Tu confonds le nombre et son logarithme.

B. Entre $100\,000$ et $1\,000\,000$ DH.

Faux.

$6{,}5 > 6 = \log 1\,000\,000$: C dépasse un million.

C. $C = 5\,500\,000$ DH, à mi-chemin.

Faux.

À mi-chemin entre deux exposants ne correspond pas à mi-chemin entre deux montants.

D. Entre $1\,000\,000$ et $10\,000\,000$ DH.

Juste.

Juste : $6 < 6{,}5 < 7$.

Correction

On a $6 < 6{,}5 < 7$, soit :

$$\log\left(10^6\right) < \log C < \log\left(10^7\right).$$

> D'après la comparaison de deux logarithmes, $10^6 < C < 10^7$.
>
> La calculatrice donne $C \approx 3\,162\,278$ DH : bien moins que $5\,500\,000$ DH.

En clair. Un nombre dont le logarithme vaut $6{,}5$, ou $0{,}5$, existe-t-il toujours ? Pour un exposant entier n, la réponse est 10^n.

Pour un exposant réel y, on admet qu'un tel nombre existe. Il est unique, et on le note encore 10^y. Cette écriture prolonge les puissances de dix que tu connais.

Puissance de dix d'exposant réel

Propriété : Puissance de dix d'exposant réel

On admet que, pour tout réel y, il existe un réel $a > 0$ tel que $\log a = y$. D'après la comparaison de deux logarithmes, ce réel est unique : on le note 10^y.

Ainsi, pour tout réel y et tout réel $a > 0$:

$$10^y > 0, \qquad \log\left(10^y\right) = y \qquad \text{et} \qquad 10^{\log a} = a.$$

Lorsque y est un entier relatif, 10^y est la puissance de dix habituelle, car $\log\left(10^n\right) = n$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. L'existence de 10^y ne se démontre pas avec les outils de ce chapitre. Son unicité, elle, vient de la comparaison de deux logarithmes.

Exemple : passer du logarithme au nombre

Sur la calculatrice, la touche « 10^x » fait le chemin inverse de la touche « log ». Selon le modèle, on l'obtient avec la touche « log » précédée d'une touche de seconde fonction.

- Si $\log a = 0{,}5$, alors $a = 10^{0{,}5} \approx 3{,}162$.
- $10^{-1{,}3} \approx 0{,}0501$.
- $10^{\log 7} = 7$ et $\log\left(10^{2{,}4}\right) = 2{,}4$, sans calculatrice.

Équations et inéquations du type 10^x = a

Pour résoudre $10^x = a$, on cherche l'exposant qui donne a.

Pourquoi est-ce vrai ? On passe aux logarithmes des deux membres, et le logarithme de 10^x est x. Si $a \leq 0$, aucune puissance de dix ne convient, car $10^x > 0$.

Propriété : Équations et inéquations du type 10^x = a et 10^x ≤ a

Soit a un réel.

- Si $a > 0$, alors, pour tout réel x : $10^x = a$ si et seulement si $x = \log a$; $10^x \leq a$ si et seulement si $x \leq \log a$; $10^x \geq a$ si et seulement si $x \geq \log a$; de même, $10^x < a$ si et seulement si $x < \log a$, et $10^x > a$ si et seulement si $x > \log a$.
- Si $a \leq 0$, alors l'équation $10^x = a$ n'a aucune solution, et $10^x > a$ pour tout réel x.

Démonstration

Étape 1. Soit $a > 0$ et x un réel. Les réels 10^x et a sont strictement positifs. D'après la comparaison de deux logarithmes, $10^x = a$ équivaut à $\log(10^x) = \log a$, et $10^x \leq a$ équivaut à $\log(10^x) \leq \log a$.

Étape 2. Or $\log(10^x) = x$, d'après la définition de la puissance de dix d'exposant réel. Donc $10^x = a$ si et seulement si $x = \log a$, et $10^x \leq a$ si et seulement si $x \leq \log a$. On traite $10^x \geq a$, $10^x < a$ et $10^x > a$ de la même façon, avec les autres cas de la comparaison de deux logarithmes.

Étape 3. Soit $a \leq 0$. Pour tout réel x, $10^x > 0$, donc $10^x > a$; en particulier $10^x \neq a$.

Vérifie : Le sens de l'inégalité

Dans la preuve, pourquoi le sens de $10^x \leq a$ est-il conservé quand on passe aux logarithmes ?

A. Grâce à la comparaison de deux logarithmes.

Juste.

Juste : $10^x \leq a$ équivaut à $\log(10^x) \leq \log a$.

B. Parce que a est un réel strictement positif.

Faux.

Le signe de a permet d'écrire $\log a$; il ne dit rien sur le sens.

C. Grâce à la propriété du produit des logarithmes.

Faux.

On compare, on ne multiplie pas : la propriété du produit ne sert pas ici.

D. Il ne l'est pas : le sens de l'inégalité change.

Faux.

Faux : d'après la comparaison de deux logarithmes, le sens reste le même.

Correction

Les nombres 10^x et a sont strictement positifs. D'après la comparaison de deux logarithmes, $10^x \leq a$ équivaut à $\log(10^x) \leq \log a$, c'est-à-dire à $x \leq \log a$. Le sens est conservé.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

> Le geste : **prendre le logarithme des deux membres**. C'est permis quand les deux sont strictement positifs.
>
> La comparaison de deux logarithmes garde l'égalité et le sens des inégalités, larges ou strictes ; l'égalité $\log(10^x) = x$ libère l'exposant. Le cas $a \leq 0$ se règle par le seul signe de 10^x.

Exemple : résoudre avec la calculatrice

- $10^x = 250$: comme $250 > 0$, $x = \log 250 \approx 2{,}398$. Contrôle : $10^2 < 250 < 10^3$.
- $10^x \leq 0{,}04$: comme $0{,}04 > 0$, cela équivaut à $x \leq \log 0{,}04$. Donc $S =]-\infty, \log 0{,}04]$, avec $\log 0{,}04 \approx -1{,}398$.
- $10^x > 20$: comme $20 > 0$, cela équivaut à $x > \log 20$. L'inégalité est stricte, la borne est exclue : $S =]\log 20, +\infty[$, avec $\log 20 \approx 1{,}301$.
- $10^x = -3$ n'a aucune solution, car $-3 \leq 0$.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : résoudre une équation du type 10^x = a

1. **Isole** la puissance de dix : ramène-toi à $10^x = a$, ou à une inégalité entre 10^x et a ($\leq$, $\geq$, $<$ ou $>$).
2. **Examine le signe** de a : si $a \leq 0$, l'équation n'a aucune solution, et $10^x > a$ pour tout réel x.
3. **Passe au logarithme** si $a > 0$: $x = \log a$, ou la même inégalité entre x et $\log a$, dans le même sens. Par exemple, $10^x < a$ équivaut à $x < \log a$.
4. **Donne** la valeur exacte, puis une valeur approchée si on la demande.

Exemple : isoler d'abord

- $3 \times 10^x - 4 = 11$ donne $3 \times 10^x = 15$, puis $10^x = 5$. Comme $5 > 0$, $x = \log 5 \approx 0{,}699$.
- $2 \times 10^x + 7 = 1$ donne $2 \times 10^x = -6$, puis $10^x = -3$: aucune solution, car $-3 \leq 0$.

Attention : une puissance de dix est positive

✗ « $10^x = -100$, donc $x = \log(-100) = -2$. »

✓ $\log(-100)$ n'existe pas, et $10^{-2} = 0{,}01$ est positif. Pour tout réel x, $10^x > 0$: l'équation $10^x = -100$ n'a aucune solution.

À toi : Deux résolutions

Résous $10^x = 0{,}2$, puis $5 \times 10^x \geq 40$. Donne les valeurs exactes, puis des valeurs approchées au millième. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour l'inéquation, divise d'abord par 5.
Indice 2
Applique la méthode : $0{,}2 > 0$ et $8 > 0$.
Indice 3
Point délicat : $\log 0{,}2$ est négatif, car $0{,}2 < 1$; ce n'est pas une erreur.

Réponse
Équation. Comme $0{,}2 > 0$, l'équation $10^x = 0{,}2$ équivaut à $x = \log 0{,}2$. Ainsi $S = \{\log 0{,}2\}$, avec $\log 0{,}2 \approx -0{,}699$.

Inéquation. On divise les deux membres par $5 > 0$: $10^x \geq 8$. Comme $8 > 0$, cela équivaut à $x \geq \log 8$. Ainsi $S = [\log 8, +\infty[$, avec $\log 8 \approx 0{,}903$.

Applications économiques

Un capital qui double

Remarque : Petit rappel : les intérêts composés

Un capital C_0 placé à intérêts composés au taux annuel de t pour cent vaut, au bout de n années :

$$C_n = C_0 \times q^n,$$

avec $q = 1 + \dfrac{t}{100}$. C'est une suite géométrique de raison q. Une baisse de t pour cent par an donne de même $q = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Devine : Au bout de combien d'années ?

Un capital fictif de $10\,000$ DH est placé à intérêts composés, au taux annuel de 5 pour cent. Au bout de combien d'années aura-t-il doublé ?

A. 20 ans.
Faux.
C'est le calcul des intérêts simples : 20×5 pour cent donne 100 pour cent. Avec les intérêts composés, les intérêts rapportent eux aussi.

B. 15 ans.
Juste.
Juste : $1{,}05^{14} < 2 \leq 1{,}05^{15}$.

C. 10 ans.

Faux.
Au bout de 10 ans, $1{,}05^{10} \approx 1{,}629$: le capital n'a pas doublé.

D. 40 ans.

Faux.
Bien trop : $1{,}05^{40} \approx 7{,}040$, le capital est multiplié par plus de sept.

Correction
Avec les intérêts composés, le capital vaut, au bout de n années :

$$C_n = 10\,000 \times 1{,}05^n.$$

La calculatrice donne $1{,}05^{14} \approx 1{,}980$ et $1{,}05^{15} \approx 2{,}079$. Le capital a doublé au bout de 15 ans, pas avant.

La suite montre comment trouver ce nombre sans essayer les années une à une.

En clair. Voici le capital de l'activité, arrondi au dirham.

n	0	5	10	14	15
C_n (DH)	$10\,000$	$12\,763$	$16\,289$	$19\,799$	$20\,789$

Essayer les années une à une marche, mais c'est long. Le logarithme donne la réponse en un calcul.

La méthode et un premier exemple

Méthode : trouver le plus petit entier qui convient

1. **Écris** l'inéquation, avec $a > 0$: $q^n \geq a$ pour une hausse ($q > 1$), $q^n \leq a$ pour une baisse ($0 < q < 1$). Par exemple, divise $C_0 \times q^n \geq s$ par $C_0 > 0$.
2. **Passe au logarithme** : les deux membres sont strictement positifs ; d'après la comparaison de deux logarithmes et le logarithme d'une puissance, $q^n \geq a$ équivaut à $n \log q \geq \log a$, et $q^n \leq a$ à $n \log q \leq \log a$.
3. **Divise** par $\log q$ après avoir écrit son signe. Si $q > 1$, alors $\log q > 0$ et $n \geq \dfrac{\log a}{\log q}$. Si $0 < q < 1$, alors $\log q < 0$: le sens change, et $n \log q \leq \log a$ devient $n \geq \dfrac{\log a}{\log q}$.
4. **Conclus** : donne le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{\log a}{\log q}$, puis vérifie avec q^n pour cet entier et le précédent.

Exemple : un capital qui triple

Un capital fictif de $5\,000$ DH est placé à intérêts composés, au taux annuel de 3 pour cent. On cherche le plus petit entier n tel que $5\,000 \times 1{,}03^n \geq 15\,000$. En divisant par $5\,000 > 0$, cette inéquation s'écrit :

$$1{,}03^n \geq 3.$$

Passage au logarithme. Les deux membres sont strictement positifs ; d'après la comparaison de deux logarithmes et le logarithme d'une puissance, cela équivaut à $n \log 1{,}03 \geq \log 3$.

Division. Comme $1{,}03 > 1$, on a $\log 1{,}03 > 0$: le sens est conservé.

$$n \geq \frac{\log 3}{\log 1{,}03} \approx 37{,}17.$$

Conclusion. Le plus petit entier est $n = 38$. Vérification : $1{,}03^{37} \approx 2{,}985 < 3$ et $1{,}03^{38} \approx 3{,}075 \geq 3$. Le capital a triplé au bout de 38 ans.

En clair. Le nombre $37{,}17$ n'est pas une durée à donner telle quelle : les intérêts sont versés en fin d'année. On cherche un entier n supérieur ou égal à $37{,}17$: le plus petit est 38. On arrondit donc à l'entier **supérieur**, puis on vérifie.

Un prix qui baisse

Exemple : un prix qui baisse

Le prix fictif d'un téléphone, $4\,000$ DH, baisse de 8 pour cent par an. À partir de quand passe-t-il sous $2\,000$ DH ? On cherche le plus petit entier n tel que $4\,000 \times 0{,}92^n \leq 2\,000$. En divisant par $4\,000 > 0$:

$$0{,}92^n \leq 0{,}5.$$

Passage au logarithme. Les deux membres sont strictement positifs ; d'après la comparaison de deux logarithmes et le logarithme d'une puissance, l'inéquation équivaut à $n \log 0{,}92 \leq \log 0{,}5$.

Division. Or $0 < 0{,}92 < 1$, donc $\log 0{,}92 < 0$: en divisant par ce nombre négatif, le sens change.

$$n \geq \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}92} \approx 8{,}31.$$

Conclusion. Donc $n = 9$. Vérification : $0{,}92^8 \approx 0{,}513 > 0{,}5$ et $0{,}92^9 \approx 0{,}472 \leq 0{,}5$.

Attention : diviser par un logarithme négatif

✗ « $n \log 0{,}92 \leq \log 0{,}5$, donc $n \leq \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}92}$, soit $n \leq 8$. »

✓ $\log 0{,}92 < 0$: diviser par un nombre négatif change le sens. On obtient $n \geq 8{,}31$ environ, donc $n \geq 9$. Avec $n = 8$, le prix vaut encore environ $2\,053$ DH.

Vérifie : Une population qui augmente

La population fictive d'une ville, $50\,000$ habitants, augmente de 2 pour cent par an. On cherche le plus petit entier n tel que $50\,000 \times 1{,}02^n \geq 75\,000$. Quelle inéquation équivaut à cette condition ?

A. $n \leq \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}02}$

Faux.

$1{,}02 > 1$, donc $\log 1{,}02 > 0$: le sens ne change pas.

B. $n \geq \log\left(\dfrac{1{,}5}{1{,}02}\right)$

Faux.

Le quotient de deux logarithmes n'est pas le logarithme du quotient.

C. $n \geq \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}02}$

Juste.

Juste : on divise par $\log 1{,}02$, qui est positif.

D. $n \geq \dfrac{\log 75\,000}{\log 1{,}02}$

Faux.

Il faut d'abord diviser par $50\,000$: $1{,}02^n \geq 1{,}5$.

Correction

On divise par $50\,000 > 0$: $1{,}02^n \geq 1{,}5$.

Les deux membres sont strictement positifs ; d'après la comparaison de deux logarithmes et le logarithme d'une puissance, cela équivaut à $n \log 1{,}02 \geq \log 1{,}5$.

Comme $\log 1{,}02 > 0$, on obtient $n \geq \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}02}$, avec $\dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}02} \approx 20{,}48$.

Le plus petit entier est 21 : la population atteint $75\,000$ habitants au bout de 21 ans.

Le coin devoir, des ordres de grandeur, puis à toi

Remarque : Coin devoir : rédiger un plus petit entier

En devoir, chaque passage se justifie. Pour le capital qui triple, écris :

« $5\,000 \times 1{,}03^n \geq 15\,000$ équivaut à $1{,}03^n \geq 3$. Les deux membres sont strictement positifs ; d'après la comparaison de deux logarithmes et le logarithme d'une puissance, cela équivaut à $n \log 1{,}03 \geq \log 3$. Comme $\log 1{,}03 > 0$, on obtient $n \geq \dfrac{\log 3}{\log 1{,}03}$, soit $n \geq 37{,}17$ environ. Le plus petit entier est $n = 38$. »

Termine par une phrase dans le contexte : le capital a triplé au bout de 38 ans.

Exemple : un ordre de grandeur

Un dirham fictif est placé à 5 pour cent par an pendant 300 ans. Il devient $1{,}05^{300}$ DH. D'après le logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned}\log\left(1{,}05^{300}\right) &= 300\log 1{,}05\\ &\approx 6{,}357.\end{aligned}$$

Donc $6 \leq \log\left(1{,}05^{300}\right) < 7$. D'après la comparaison de deux logarithmes, $10^6 \leq 1{,}05^{300} < 10^7$: le capital dépasse un million de dirhams, sans atteindre dix millions.

La calculatrice confirme : environ $2\,273\,996$ DH.

Exemple : compter les chiffres d'un grand entier

Combien de chiffres a l'entier 7^{20} ? D'après le logarithme d'une puissance :

$$\begin{aligned}\log\left(7^{20}\right) &= 20\log 7\\ &\approx 16{,}90.\end{aligned}$$

Donc $16 \leq \log\left(7^{20}\right) < 17$, soit $\log\left(10^{16}\right) \leq \log\left(7^{20}\right) < \log\left(10^{17}\right)$.

D'après la comparaison de deux logarithmes, $10^{16} \leq 7^{20} < 10^{17}$. Un entier N tel que $10^{k-1} \leq N < 10^k$ s'écrit avec k chiffres : 7^{20} s'écrit avec 17 chiffres.

À toi : Un placement à 4 pour cent

Un capital fictif de $8\,000$ DH est placé à intérêts composés, au taux annuel de 4 pour cent. Détermine le plus petit nombre entier d'années n au bout duquel le capital atteint au moins $12\,000$ DH. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $C_n = 8\,000 \times 1{,}04^n$, puis divise par $8\,000$.
Indice 2
Passe au logarithme, puis divise par $\log 1{,}04$, qui est positif.
Indice 3
Point délicat : le quotient obtenu n'est pas un entier ; cherche le plus petit entier supérieur ou égal à ce quotient, puis vérifie avec C_n pour cet entier et le précédent.

Réponse
Le capital vaut $C_n = 8\,000 \times 1{,}04^n$ au bout de n années. On résout $8\,000 \times 1{,}04^n \geq 12\,000$: en divisant par $8\,000 > 0$, cela s'écrit $1{,}04^n \geq 1{,}5$.

Passage au logarithme. Les deux membres sont strictement positifs ; d'après la comparaison de deux logarithmes et le logarithme d'une puissance, cela équivaut à $n\log 1{,}04 \geq \log 1{,}5$.

Division. Comme $1{,}04 > 1$, on a $\log 1{,}04 > 0$, donc :

$$n \geq \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} \approx 10{,}34.$$

Conclusion. Le plus petit entier est $n = 11$. Vérification : $C_{10} \approx 11\,842$ DH et $C_{11} \approx 12\,316$ DH. Le capital atteint au moins $12\,000$ DH au bout de 11 ans.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Puissance de dix** : $\log(10^n) = n$; $\log x$ n'existe que pour $x > 0$.
- **Simplifier** : $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$, $\log(a^n) = n \log a$, $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2}\log a$.
- **Équation ou inéquation logarithmique** : le domaine d'abord, puis $\log A = \log B$ équivaut à $A = B$; $\log A < \log B$ équivaut à $A < B$.
- **Équation** $10^x = a$: si $a > 0$, $x = \log a$; si $a \leq 0$, aucune solution.
- **Plus petit entier** n tel que $q^n \geq a$ (hausse, $q > 1$) ou $q^n \leq a$ (baisse, $0 < q < 1$) : passer au logarithme, diviser par $\log q$ en regardant son signe, puis vérifier.

Le mot du prof. Le logarithme décimal change les produits en sommes et les très grands nombres en petits exposants. Avant chaque calcul, vérifie que les nombres sont strictement positifs, puis nomme la propriété employée. Les exercices du chapitre te font pratiquer chaque geste, de la simplification au plus petit entier.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Logarithme décimal » (1bac · sciences-economiques-et-gestion · mathematiques)