BURHAN

Résumé : Limite d'une fonction numérique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/resume

Chapitre	Semestre
Limite d'une fonction numérique	Semestre 2

Limites en l'infini

> **À retenir : Lire une limite**
>
> Une limite décrit ce que devient $f(x)$ quand x grandit sans fin, ou quand x s'approche d'un réel. On ne remplace pas x par l'infini : on regarde vers quoi $f(x)$ se rapproche.
>
> Un tableau de valeurs ou une courbe en donne une première idée. Les règles du chapitre la confirment par le calcul.

Définition : Limite en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$, et ℓ un réel.

- On dit que f a pour **limite** ℓ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand. On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand. On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- La limite $-\infty$ se décrit de même : $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue.

Pour une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$, on décrit de même les limites en $-\infty$, lorsque x est négatif et assez grand en valeur absolue.

Propriété : Limites des fonctions de référence en l'infini

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Méthode : conjecturer une limite

1. **Choisis** des valeurs de x de plus en plus grandes, par exemple 10, 100 et $1\,000$. Près d'un réel a, prends des valeurs de plus en plus proches de a.
2. **Calcule** $f(x)$ pour chacune, à la calculatrice, et note les résultats en colonne.
3. **Regarde** si les valeurs se stabilisent près d'un réel, ou si elles grandissent sans fin.
4. **Confirme** par un calcul : le tableau donne une conjecture, pas une justification.

Exemple

Énoncé. Conjecture, puis justifie, la limite de $\dfrac{5x-2}{x}$ en $+\infty$.

Tableau. Pour $x = 10$, 100 et $1\,000$, on obtient $4{,}8$, puis $4{,}98$, puis $4{,}998$. Les valeurs se rapprochent de 5.

Calcul. Pour $x > 0$:

$$\frac{5x-2}{x} = 5 - \frac{2}{x}.$$

D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 ; par produit, $\dfrac{2}{x}$ aussi. Par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-2}{x} = 5.$$

Limite en un réel, à droite et à gauche

Définition : Limite finie en un réel

Soit a un réel et f une fonction définie autour de a, c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a. Soit ℓ un réel.

On dit que f a pour **limite** ℓ en a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ quand x tend vers a, lorsque $f(x)$ devient aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Par exemple, $\lim_{x \to a} x = a$, et une fonction constante égale à c a pour limite c en a.

Définition : Limite infinie en un réel

Soit a un réel et f une fonction définie autour de a, sauf peut-être en a.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a lorsque $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que x, distinct de a, est assez proche de a. On note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Définition : Limite à droite, limite à gauche

Soit a un réel.

- Lorsque x tend vers a en restant **strictement supérieur** à a, on parle de limite **à droite** en a. On note $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
- Lorsque x tend vers a en restant **strictement inférieur** à a, on parle de limite **à gauche** en a. On note $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Ces limites se décrivent comme une limite en a, en ne regardant que les réels x situés d'un seul côté de a. Elles peuvent être finies ou infinies.

Propriété : Limite en un réel et limites à droite et à gauche

Soit a un réel, f une fonction définie autour de a, sauf peut-être en a, et L un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

La fonction f a pour limite L en a si et seulement si f a pour limite L **à droite et à gauche** en a.

En particulier, si les limites à droite et à gauche en a sont **différentes**, la fonction f n'a pas de limite en a .

Propriété : Limites des fonctions de référence en 0

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- Si n est pair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ a pour limite $+\infty$ en 0.
- Si n est impair, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ n'a pas de limite en 0.

Remarque

Ces deux résultats sont admis.

Exemple

Énoncé. Étudie $\dfrac{-3}{x^3}$ près de 0.

À droite. D'après les limites de référence en 0, $\dfrac{1}{x^3}$ tend vers $+\infty$. Par produit par -3, négatif :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^3} = -\infty.$$

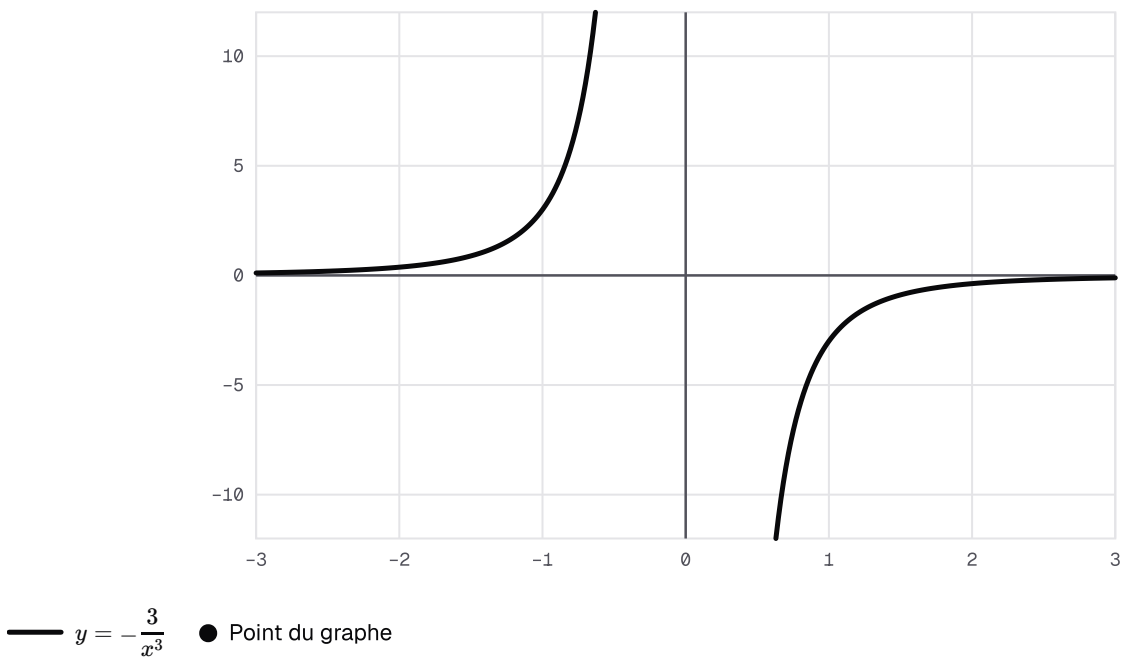
À gauche. L'exposant 3 est impair : $\dfrac{1}{x^3}$ tend vers $-\infty$. Par produit par -3 :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^3} = +\infty.$$

Conclusion. Les deux côtés diffèrent : $x \mapsto \dfrac{-3}{x^3}$ n'a pas de limite en 0.

Avec un exposant pair. Pour $\dfrac{2}{x^2}$, l'exposant est pair. Par produit par 2, les deux côtés donnent $+\infty$, donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty.$$



La courbe de x ↦ −3/x³ près de 0 : la branche de droite plonge vers −∞, celle de gauche monte vers +∞, et il n'y a pas de limite en 0.

Attention : Regarde les deux côtés

Près de 3, le dénominateur de $\dfrac{1}{x-3}$ tend vers 0.

Pour $x > 3$, il est positif : d'après la limite d'un quotient, la limite à droite vaut $+\infty$. Pour $x < 3$, il est négatif : la limite à gauche vaut $-\infty$.

Écrire « la limite en 3 vaut $+\infty$ » serait donc faux. Étudie chaque côté avant de conclure.

Opérations sur les limites

Propriété : Limite d'une somme et d'un produit

Soit f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Les limites sont prises **au même endroit** : en un réel a, à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Somme.

- Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, alors $\lim(f+g) = \ell + \ell'$.
- Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$; de même avec $-\infty$.
- Si $\lim f = \lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$; de même avec $-\infty$.

Produit.

- Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$, alors $\lim(fg) = \ell\ell'$.
- Si l'une des limites est infinie et l'autre est infinie ou un réel non nul, alors $\lim(fg)$ est infinie, de signe donné par la règle des signes.

Les cas $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$ sont des **formes indéterminées** : on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'écriture.

Propriété : Limite d'un quotient

Soit f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Les limites sont prises au même endroit.

- Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.
- Si $\lim f = \ell$ et si $\lim g$ est infinie, alors $\lim \dfrac{f}{g} = 0$.
- Si $\lim f$ est infinie et $\lim g = \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie.
- Si $\lim f$ est un réel non nul ou est infinie, et si $\lim g = 0$ avec g de signe constant, alors $\lim \dfrac{f}{g}$ est infinie.

Le signe d'une limite infinie est donné par la règle des signes.

Les cas $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sont des **formes indéterminées**.

Remarque

Ces deux résultats sont admis.

Méthode : calculer une limite par les opérations

1. **Découpe** l'expression en morceaux simples : constantes, fonctions de référence, polynômes.

2. **Écris**, pour chaque morceau, sa limite à l'endroit étudié, le même pour tous.
3. **Assemble** les morceaux par somme, par produit ou par quotient, en nommant la règle.
4. **Arrête-toi** devant une forme indéterminée : change d'abord l'écriture.

Exemple

Énoncé. Calcule les deux limites suivantes :

- $\lim_{x\to-\infty}\left(x^4-\dfrac{2}{x}\right)$;
- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-7}{\sqrt{x}+3}$.

Somme. D'après les limites de référence en l'infini, x^4 tend vers $+\infty$ en $-\infty$, et $\dfrac{1}{x}$ vers 0. Par produit, $\dfrac{2}{x}$ tend vers 0. Par somme :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^4-\frac{2}{x}\right)=+\infty.$$

Quotient. Par somme, $\sqrt{x}+3$ tend vers $+\infty$. Le numérateur vaut -7 ; d'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{\sqrt{x}+3}=0.$$

Attention : Une forme indéterminée n'est pas une réponse

En $+\infty$, x^2 et $3x$ tendent vers $+\infty$. Pour x^2-3x, on obtient donc la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$.

Ce n'est pas 0 : c'est un signal. Ici, le terme de plus haut degré donne $+\infty$. Avec $(x+4)-x$, la même forme mène pourtant à 4.

Une forme indéterminée n'a pas de valeur à elle seule.

Méthode : un dénominateur qui tend vers 0

1. **Vérifie** d'abord le haut de la fraction : sa limite doit être non nulle, finie ou infinie.
2. **Dresse** le tableau de signes du dénominateur autour de a.
3. **Applique** la limite d'un quotient de chaque côté : le signe donne $+\infty$ ou $-\infty$.
4. **Compare** les deux côtés avant de parler de limite en a.

Exemple

Énoncé. Étudie $\dfrac{3-x}{x+5}$ près de -5.

Numérateur. Par somme, $3-x$ tend vers 8, réel non nul.

Signe. Le dénominateur $x+5$ tend vers 0. Il est positif pour $x > -5$ et négatif pour $x < -5$.

Conclusion. La règle des signes, jointe à la limite d'un quotient, donne :

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{3-x}{x+5} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -5^-} \frac{3-x}{x+5} = -\infty.$$

Il n'y a pas de limite en -5.

Polynômes et fonctions rationnelles

Propriété : Limite en un réel d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

Soit a un réel.

- Si P est un polynôme, alors $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si P et Q sont deux polynômes tels que $Q(a) \neq 0$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Propriété : Limites en l'infini d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

Polynôme. On considère un polynôme P de degré $n \geq 1$, écrit pour tout réel x sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où $a_n \neq 0$. En $+\infty$ et en $-\infty$, P a la **même limite que son terme de plus haut degré** :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n,$$
$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n.$$

Fonction rationnelle. Une fonction rationnelle a, en $+\infty$ et en $-\infty$, la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré** de son numérateur et de son dénominateur.

Méthode : forme indéterminée en l'infini

1. **Repère** la forme indéterminée : $(+\infty) + (-\infty)$ pour un polynôme, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ pour un quotient.
2. **Garde** seulement les termes de plus haut degré : un seul pour un polynôme, un en haut et un en bas pour un quotient.
3. **Simplifie** le quotient de ces deux termes.
4. **Termine** avec une limite de référence en l'infini.

Exemple

Polynôme. En $-\infty$, d'après la limite en l'infini d'un polynôme, $2x^3 - 7x^2 + 1$ a la même limite que $2x^3$. D'après les limites de référence, x^3 tend vers $-\infty$; par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x^3 - 7x^2 + 1\right) = -\infty.$$

Quotient. En $-\infty$, d'après la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, $\dfrac{4x^3 - x}{2x + 7}$ a la même limite que :

$$\frac{4x^3}{2x} = 2x^2.$$

Par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 - x}{2x + 7} = +\infty.$$

Attention : En un réel, la valeur du polynôme

Pour $\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 2x\right)$, garder seulement x^2 donnerait 9 : c'est faux.

En un réel, la limite d'un polynôme est sa valeur : $9 - 6 = 3$. Le terme de plus haut degré ne sert qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Forme indéterminée en un réel ; racine carrée

Méthode : forme 0/0 en un réel

1. **Vérifie** que le numérateur et le dénominateur valent tous deux 0 en a.
2. **Factorise** chacun par $x - a$, grâce aux racines du trinôme ou à une division.
3. **Simplifie** par $x - a$: c'est permis, car x reste distinct de a.
4. **Calcule** la limite de l'expression simplifiée, par sa valeur en a si son dénominateur ne s'y annule plus.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$.

Forme. En 3, le numérateur vaut $9 + 3 - 12 = 0$ et le dénominateur $9 - 9 = 0$: forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Factorisation. Le numérateur a pour racines 3 et -4, donc $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$. De plus, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Conclusion. Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$, le quotient vaut :

$$\frac{x + 4}{x + 3}.$$

Son dénominateur vaut 6 en 3. D'après la limite en un réel d'une fonction rationnelle, sa limite en 3 est sa valeur, $\dfrac{7}{6}$.

Propriété : Limite de la racine carrée d'une fonction

Soit f une fonction positive là où l'on calcule la limite. Les limites sont prises au même endroit : en un réel a, à droite ou à gauche en a, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

- Si $\lim f = \ell$ avec $\ell \geq 0$, alors $\lim \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$.
- Si $\lim f = +\infty$, alors $\lim \sqrt{f} = +\infty$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3 - \dfrac{1}{x}}$.

Sous la racine. Pour $x < 0$, $3 - \dfrac{1}{x} > 3$: la racine existe. D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 ; par somme, $3 - \dfrac{1}{x}$ tend vers 3.

Racine. La limite de la racine carrée d'une fonction donne alors :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3 - \frac{1}{x}} = \sqrt{3}.$$

Méthode : l'expression conjuguée

1. **Repère** une différence avec une racine carrée et la forme indéterminée qu'elle produit : $(+\infty) + (-\infty)$ en l'infini, ou $\dfrac{0}{0}$ en un réel.
2. **Multiplie** le numérateur et le dénominateur par la somme conjuguée.
3. **Utilise** $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$: la racine disparaît de la partie multipliée par sa conjuguée.
4. **Conclus** par les opérations sur la nouvelle écriture.

Exemple

Énoncé. Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x + 1} - \sqrt{4x}\right)$.

Forme. D'après la limite en l'infini d'un polynôme, $4x + 1$ et $4x$ tendent vers $+\infty$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, les deux racines tendent vers $+\infty$: forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$.

Conjuguée. Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}&\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x}\\&=\frac{(4x+1)-4x}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}\\&=\frac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$. D'après la limite d'un quotient, la limite cherchée vaut 0.

Attention : Une racine carrée reste positive

Pour $x<0$, $\sqrt{x^2}$ ne vaut pas x mais $-x$, un nombre positif.

Ainsi, en $-\infty$, d'après la limite en l'infini d'un polynôme, x^2+5 tend vers $+\infty$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2+5}$ tend aussi vers $+\infty$, jamais vers $-\infty$.

Vérifie enfin que l'expression sous la racine est positive près de l'endroit étudié.

Limites et ordre

Propriété : Limite par encadrement

Soit f et u deux fonctions, et ℓ un réel. Si, pour tout x assez grand,

$$|f(x)-\ell|\leq u(x),$$

et si $\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$, alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$.

Le résultat reste vrai :

- en $-\infty$, pour tout x négatif assez grand en valeur absolue ;
- en un réel a, pour tout x distinct de a assez proche de a ;
- à droite ou à gauche en a.

Propriété : Limite infinie par comparaison

Soit f et u deux fonctions.

- Si, pour tout x assez grand, $f(x)\geq u(x)$, et si $\lim_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- Si, pour tout x assez grand, $f(x)\leq u(x)$, et si $\lim_{x\to+\infty}u(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Ces résultats restent vrais en $-\infty$ et en un réel a, ainsi qu'à droite ou à gauche en a.

Remarque

Ces deux résultats sont admis.

Méthode : encadrer ou comparer

1. **Choisis** l'outil : un encadrement pour une limite réelle ℓ, une comparaison pour une limite infinie.
2. **Écris** l'inégalité et dis pour quels x elle est vraie.
3. **Cherche** la limite de la fonction qui sert de comparaison.
4. **Termine** en nommant la propriété : encadrement pour une limite réelle, comparaison pour une limite infinie.

Exemple

Encadrement. Pour tout $x \geq 1$, on sait que :

$$|g(x) - 1| \leq \frac{5}{x^2}.$$

D'après les limites de référence en l'infini, et par produit, $\frac{5}{x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par encadrement, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

Comparaison. Pour tout $x \geq 0$, on sait que $h(x) \geq 2x - 5$. D'après la limite en l'infini d'un polynôme, $2x - 5$ tend vers $+\infty$. Par comparaison, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Attention : Minorer, et non majorer

Savoir que $k(x) \leq x^3$ ne dit rien de la limite de k en $+\infty$: la fonction k pourrait être nulle.

Pour obtenir $+\infty$, il faut une inégalité $k(x) \geq u(x)$, avec u de limite $+\infty$.

Pour une limite réelle ℓ, la fonction qui majore $|k(x) - \ell|$ doit avoir pour limite 0.

Quelle règle pour quelle situation ?

Méthode : Quelle règle pour quelle situation ?

- **Fonction de référence** : les limites de référence en l'infini et en 0.
- **Polynôme, ou quotient de polynômes, en un réel a** : sa valeur en a, si le dénominateur ne s'y annule pas.
- **Numérateur non nul, dénominateur qui tend vers 0** : le signe à droite et à gauche.
- **Forme $\frac{0}{0}$ en un réel** : la factorisation par $x - a$.
- **Polynôme ou quotient en l'infini** : le terme de plus haut degré.
- **Différence avec une racine carrée** : l'expression conjuguée.
- **Racine carrée d'une fonction** : la limite sous la racine, puis sa racine.

- **Fonction coincée ou minorée** : l'encadrement ou la comparaison.

Puissances, n entier non nul, en plus l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

Inverses des puissances, en plus l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Racine carrée, en plus l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Inverses des puissances, à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Polynôme en un réel a

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

Expression conjuguée

$$(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$$

À retenir : Rédiger en devoir

- Écris toujours l'endroit étudié sous le symbole $\lim$.
- Nomme la règle employée : « par somme », « d'après la limite d'un quotient », « par encadrement ».
- Devant une forme indéterminée, écris-la en toutes lettres, puis transforme l'écriture.
- Termine par une phrase qui donne la limite.