BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le coût par exemplaire d'une imprimerie

Une imprimerie imaginaire tire un journal de quartier ; les chiffres sont inventés. Pour x exemplaires, avec $x > 0$, le coût total du tirage, en dirhams, est modélisé par $C(x) = 3x + 4\sqrt{x} + 900$. Le coût par exemplaire est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Dans ce modèle, le nombre d'exemplaires x est traité comme un réel strictement positif.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $M(x) = 3 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{900}{x}$.

INDICE

Outil : divise chaque terme par x. **Point délicat :** pour $x > 0$, $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$.

2. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} M(x)$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : les limites de référence en l'infini, puis la limite d'un produit et d'une somme.

3. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to 0^+} M(x)$. Que signifie ce résultat pour un très petit tirage ?

INDICE

Outil : les limites de référence en 0, à droite.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $0 \leq M(x) - 3 \leq \dfrac{904}{\sqrt{x}}$. En déduire, par une autre méthode, la limite de M en $+\infty$.

INDICE

Outil : pour $x \geq 1$, $\sqrt{x} \leq x$, donc $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Ensuite :** la limite par encadrement.

5. 1 pts

Calculer $M(10\,000)$. Pour ce tirage, le coût par exemplaire est-il à moins de $0{,}2$ DH de sa limite ?

INDICE

Outil : l'écriture de la question 1, avec $\sqrt{10\,000} = 100$.

Exercice 2 6 pts

Un polynôme de degré trois sur un trinôme

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$.

1. 1 pts

Factoriser $x^2 - 2x - 3$, puis déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

INDICE

Outil : les racines du trinôme, grâce à son discriminant.

2. 1,5 pts

Montrer que 3 est une racine de $x^3 - 27$. Déterminer ensuite les réels b et c tels que, pour tout réel x, $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + bx + c)$.

INDICE

Outil : développe le produit, puis compare les coefficients de x^2, de x et les termes constants.

3. 1 pts

En déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ pour x dans D_f, puis calculer $\lim_{x \to 3} f(x)$.

INDICE

Outil : calcule d'abord le numérateur et le dénominateur en 3 ; simplifie ensuite par leur facteur commun.

4. 1,5 pts

Étudier les limites de f à droite et à gauche en -1. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ?

INDICE

Outil : l'écriture simplifiée ; la limite du numérateur, puis le signe de $x + 1$ de chaque côté.

5. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, puis une limite de référence.

Exercice 3 — 4,5 pts

Une racine carrée au dénominateur

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}$.

1. — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

INDICE

Outil : l'expression sous la racine doit être positive ; le dénominateur ne doit pas s'annuler.

2. — 0,75 pts

Montrer que le calcul direct de la limite de g en 3 conduit à une forme indéterminée.

INDICE

Outil : cherche séparément la limite du numérateur et celle du dénominateur en 3.

3. — 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de D_g, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}$.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

4. — 1 pts

En déduire $\lim_{x\to 3} g(x)$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : l'écriture de la question 3 ; la limite de la racine carrée d'une fonction, puis une somme et un produit.

5. — 0,75 pts

Montrer que $g(x) \geq \dfrac{3}{2}$ pour tout x de D_g. Pour quelle valeur de x a-t-on $g(x) = \dfrac{3}{2}$?

INDICE

Outil : une racine carrée est positive ; l'écriture de la question 3.

Exercice 4 4 pts

La recette d'un marchand ambulant

Un marchand ambulant imaginaire vend du jus d'orange ; les données sont inventées. Quand le prix d'un verre est de p dirhams, avec $p \geq 0$, il en vend en moyenne $q(p) = \dfrac{1\,200}{p+4}$ par jour. Sa recette journalière, en dirhams, est $R(p) = p \times q(p)$.

1. 1 pts

Montrer que, pour tout $p \geq 0$, $R(p) = 1\,200 - \dfrac{4\,800}{p+4}$.

INDICE

Outil : réduis $1\,200 - \dfrac{4\,800}{p+4}$ au même dénominateur.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{p \to +\infty} q(p)$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la limite d'un quotient de numérateur constant.

3. 1 pts

Calculer $\lim_{p \to +\infty} R(p)$ de deux façons : avec l'écriture de la question 1, puis avec le quotient des termes de plus haut degré.

INDICE

Outil : la limite d'une somme ; ensuite, les limites en l'infini d'une fonction rationnelle.

4. 0,5 pts

Montrer que $R(p) < 1\,200$ pour tout $p \geq 0$. Que représente le nombre $1\,200$ pour le marchand ?

INDICE

Outil : le signe de $\dfrac{4\,800}{p+4}$ quand $p \geq 0$.

5. 0,75 pts

Pour quel prix la recette journalière vaut-elle $1\,000$ DH ?

INDICE

Outil : l'écriture de la question 1 ; isole la fraction.

Exercice 5 — 5 pts

Une valeur absolue au numérateur

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par $h(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$.

1. — 1,25 pts

Montrer que $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ pour $x > 2$, et que $h(x) = -\dfrac{1}{x+2}$ pour $x < 2$ avec $x \neq -2$.

INDICE

Outil : factorise $x^2 - 4$; le signe de $x - 2$ donne la valeur absolue.

2. — 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to 2^+} h(x)$ et $\lim_{x \to 2^-} h(x)$. La fonction h a-t-elle une limite en 2 ?

INDICE

Outil : à droite de 2, utilise $\dfrac{1}{x+2}$; à gauche, $-\dfrac{1}{x+2}$.

3. — 1,5 pts

Calculer $\lim_{x \to -2^+} h(x)$ et $\lim_{x \to -2^-} h(x)$.

INDICE

Outil : près de -2, on a $x < 2$; étudie le signe de $x + 2$ de part et d'autre de -2.

4. — 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

INDICE

Outil : choisis la bonne écriture selon le signe de $x - 2$, puis la limite d'un quotient.