BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Le coût par exemplaire d'une imprimerie

Une imprimerie imaginaire tire un journal de quartier ; les chiffres sont inventés. Pour x exemplaires, avec $x > 0$, le coût total du tirage, en dirhams, est modélisé par $C(x) = 3x + 4\sqrt{x} + 900$. Le coût par exemplaire est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Dans ce modèle, le nombre d'exemplaires x est traité comme un réel strictement positif.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $M(x) = 3 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{900}{x}$.

INDICE

Outil : divise chaque terme par x. **Point délicat :** pour $x > 0$, $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. On divise chaque terme de $C(x)$ par x. Comme $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$, on a $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc :

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{3x}{x} + \frac{4\sqrt{x}}{x} + \frac{900}{x} \\ &= 3 + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{900}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $M(x) = 3 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{900}{x}$.

2. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} M(x)$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : les limites de référence en l'infini, puis la limite d'un produit et d'une somme.

CORRIGÉ

Limite. D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0. Par produit, $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{900}{x}$ aussi. Par somme, avec l'écriture de la question 1 :

$$\lim_{x \to +\infty} M(x) = 3.$$

Interprétation. Pour un très grand tirage, la part des frais fixes dans chaque exemplaire devient très petite.

Conclusion. La limite vaut 3 : le coût par exemplaire se rapproche de 3 DH quand le tirage devient très grand.

3. 1 pts

Calculer $\lim_{x\to 0^+} M(x)$. Que signifie ce résultat pour un très petit tirage ?

INDICE

Outil : les limites de référence en 0, à droite.

CORRIGÉ

Limite. D'après les limites de référence en 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ à droite en 0. Par produit par des réels positifs, $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{900}{x}$ aussi. Par somme :

$$\lim_{x\to 0^+} M(x) = +\infty.$$

Interprétation. Les frais fixes de 900 DH se partagent entre très peu d'exemplaires.

Conclusion. La limite vaut $+\infty$: pour un très petit tirage, le coût par exemplaire devient très grand.

4. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $0 \leq M(x) - 3 \leq \dfrac{904}{\sqrt{x}}$. En déduire, par une autre méthode, la limite de M en $+\infty$.

INDICE

Outil : pour $x \geq 1$, $\sqrt{x} \leq x$, donc $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **Ensuite :** la limite par encadrement.

CORRIGÉ

Minoration. Soit $x \geq 1$. D'après la question 1 :

$$M(x) - 3 = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{900}{x}.$$

C'est une somme de deux réels positifs, donc $M(x) - 3 \geq 0$.

Majoration. Comme $x \geq 1$, $\sqrt{x} \geq 1$, donc $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$ et $\dfrac{900}{x} \leq \dfrac{900}{\sqrt{x}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x) - 3 &\leq \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{900}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{904}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Limite. Pour tout $x \geq 1$, $0 \leq M(x) - 3 \leq \dfrac{904}{\sqrt{x}}$, donc $|M(x) - 3| \leq \dfrac{904}{\sqrt{x}}$. D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 en $+\infty$; par produit, $\dfrac{904}{\sqrt{x}}$ aussi. La limite par encadrement s'applique.

Conclusion. Pour tout $x \geq 1$, $0 \leq M(x) - 3 \leq \dfrac{904}{\sqrt{x}}$, et on retrouve $\lim_{x\to+\infty} M(x) = 3$.

5. 1 pts

Calculer $M(10\,000)$. Pour ce tirage, le coût par exemplaire est-il à moins de $0{,}2$ DH de sa limite ?

INDICE

Outil : l'écriture de la question 1, avec $\sqrt{10\,000} = 100$.

CORRIGÉ

Avec l'écriture de la question 1 et $\sqrt{10\,000} = 100$:

$$\begin{aligned} & M(10\,000) \\ &= 3 + \frac{4}{100} + \frac{900}{10\,000} \\ &= 3 + 0{,}04 + 0{,}09 \\ &= 3{,}13. \end{aligned}$$

L'écart avec la limite 3 vaut $0{,}13$, et $0{,}13 < 0{,}2$.

Conclusion. Oui : pour $10\,000$ exemplaires, le coût par exemplaire, $3{,}13$ DH, est à moins de $0{,}2$ DH de sa limite.

Exercice 2 — 6 pts

Un polynôme de degré trois sur un trinôme

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$.

1. — 1 pts

Factoriser $x^2 - 2x - 3$, puis déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

INDICE

Outil : les racines du trinôme, grâce à son discriminant.

CORRIGÉ

Factorisation. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. Les racines sont $\dfrac{2+4}{2} = 3$ et $\dfrac{2-4}{2} = -1$. Pour tout réel x, $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.

Ensemble de définition. Le dénominateur s'annule en 3 et en -1 :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}.$$

Conclusion. $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

2. — 1,5 pts

Montrer que 3 est une racine de $x^3 - 27$. Déterminer ensuite les réels b et c tels que, pour tout réel x, $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + bx + c)$.

INDICE

Outil : développe le produit, puis compare les coefficients de x^2, de x et les termes constants.

CORRIGÉ

Racine. $3^3 - 27 = 27 - 27 = 0$: 3 est une racine de $x^3 - 27$.

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x-3)(x^2 + bx + c) &= x^3 + (b-3)x^2 \\ &\quad + (c - 3b)x - 3c.\end{aligned}$$

Identification. On compare avec $x^3 - 27$, coefficient par coefficient :

- coefficient de x^2 : $b - 3 = 0$;
- coefficient de x : $c - 3b = 0$;
- terme constant : $-3c = -27$.

La première et la troisième condition donnent $b = 3$ et $c = 9$, et la deuxième est alors vérifiée : $9 - 3 \times 3 = 0$.

Conclusion. $b = 3$ et $c = 9$: pour tout réel x, $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$.

3. 1 pts

En déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ pour x dans D_f, puis calculer $\lim_{x\to 3} f(x)$.

INDICE

Outil : calcule d'abord le numérateur et le dénominateur en 3 ; simplifie ensuite par leur facteur commun.

CORRIGÉ

Forme. En 3, le numérateur et le dénominateur valent 0 : le calcul direct conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Simplification. Pour x dans D_f, $x-3\neq 0$. Avec les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{x^2+3x+9}{x+1}. \end{aligned}$$

Limite. En 3, le dénominateur $x+1$ vaut 4 et ne s'annule pas. La limite en un réel d'une fonction rationnelle permet alors de remplacer x par 3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} f(x) &= \frac{9+9+9}{4} \\ &= \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de D_f, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+9}{x+1}$, et la limite de f en 3 vaut $\dfrac{27}{4}$.

4. 1,5 pts

Étudier les limites de f à droite et à gauche en -1. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ?

INDICE

Outil : l'écriture simplifiée ; la limite du numérateur, puis le signe de $x+1$ de chaque côté.

CORRIGÉ

Près de -1, $f(x)=\dfrac{x^2+3x+9}{x+1}$. D'après la limite en un réel d'un polynôme, le numérateur tend vers $1-3+9=7$, réel non nul, et le dénominateur vers 0. Le signe de $x+1$ fixe celui de la limite (règle des signes pour la limite d'un quotient) :

- pour $x>-1$, $x+1>0$, donc $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$;
- pour $x<-1$, $x+1<0$, donc $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$.

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en -1 sont différentes : f n'a pas de limite en -1.

5. 1 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, puis une limite de référence.

CORRIGÉ

D'après les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, le rapport des termes de plus haut degré, x^3 et x^2, donne la limite. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{x^3}{x^2} = x.$$

D'après les limites de référence, x tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 3 — 4,5 pts

Une racine carrée au dénominateur

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}$.

1. — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

INDICE

Outil : l'expression sous la racine doit être positive ; le dénominateur ne doit pas s'annuler.

CORRIGÉ

Racine. La racine carrée existe lorsque $2x+3 \geq 0$, soit $x \geq -\dfrac{3}{2}$.

Dénominateur. Il s'annule lorsque $\sqrt{2x+3} = 3$, soit $2x+3 = 9$, c'est-à-dire $x = 3$.

Conclusion. On retire 3 de l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à $-\dfrac{3}{2}$:

$$D_g = \left[-\frac{3}{2}, 3\right[\cup \,]3, +\infty[\,.$$

2. — 0,75 pts

Montrer que le calcul direct de la limite de g en 3 conduit à une forme indéterminée.

INDICE

Outil : cherche séparément la limite du numérateur et celle du dénominateur en 3.

CORRIGÉ

Numérateur. D'après la limite en un réel d'un polynôme, $x-3$ tend vers 0.

Dénominateur. Par somme, $2x+3$ tend vers 9 ; d'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{2x+3}$ tend vers 3. Par somme, $\sqrt{2x+3}-3$ tend vers 0.

Conclusion. Le calcul direct conduit à la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

3. 1,25 pts

Montrer que, pour tout x de D_g, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}$.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

CORRIGÉ

Expression conjuguée. Soit x dans D_g. On a $\sqrt{2x+3} \geq 0$, donc $\sqrt{2x+3}+3 > 0$: on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par cette expression.

Dénominateur. D'après l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)\\&= (2x+3) - 9\\&= 2(x-3).\end{aligned}$$

Simplification. Comme $x \neq 3$ sur D_g, le facteur $x-3$ n'est pas nul :

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{2(x-3)}\\&= \frac{\sqrt{2x+3}+3}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout x de D_g, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}$.

4. 1 pts

En déduire $\lim_{x\to 3} g(x)$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : l'écriture de la question 3 ; la limite de la racine carrée d'une fonction, puis une somme et un produit.

CORRIGÉ

On utilise l'écriture de la question 3, valable sur D_g.

En 3. Comme à la question 2, $\sqrt{2x+3}$ tend vers 3. Par somme, $\sqrt{2x+3}+3$ tend vers 6 ; par produit par $\dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 3} g(x) = 3.$$

En $+\infty$. D'après les limites en l'infini d'un polynôme, $2x+3$ tend vers $+\infty$; d'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{2x+3}$ aussi. Par somme, puis par produit par $\dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Conclusion. La limite de g vaut 3 en 3 et $+\infty$ en $+\infty$.

5. 0,75 pts

Montrer que $g(x) \geq \dfrac{3}{2}$ pour tout x de D_g. Pour quelle valeur de x a-t-on $g(x) = \dfrac{3}{2}$?

INDICE

Outil : une racine carrée est positive ; l'écriture de la question 3.

CORRIGÉ

Minoration. Soit x dans D_g. Une racine carrée est positive : $\sqrt{2x+3} \geq 0$. Avec la question 3 :

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+3}+3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Cas d'égalité. L'égalité a lieu lorsque $\sqrt{2x+3} = 0$, soit $x = -\dfrac{3}{2}$, qui appartient à D_g.

Contrôle. $g\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{-\frac{9}{2}}{-3} = \dfrac{3}{2}$.

Conclusion. Pour tout x de D_g, $g(x) \geq \dfrac{3}{2}$, avec égalité seulement pour $x = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 4 4 pts

La recette d'un marchand ambulant

Un marchand ambulant imaginaire vend du jus d'orange ; les données sont inventées. Quand le prix d'un verre est de p dirhams, avec $p \geq 0$, il en vend en moyenne $q(p) = \dfrac{1\,200}{p+4}$ par jour. Sa recette journalière, en dirhams, est $R(p) = p \times q(p)$.

1. 1 pts

Montrer que, pour tout $p \geq 0$, $R(p) = 1\,200 - \dfrac{4\,800}{p+4}$.

INDICE

Outil : réduis $1\,200 - \dfrac{4\,800}{p+4}$ au même dénominateur.

CORRIGÉ

Soit $p \geq 0$. Par définition, $R(p) = p \times \dfrac{1\,200}{p+4} = \dfrac{1\,200p}{p+4}$. On réduit l'autre écriture au même dénominateur :

$$\begin{aligned} & 1\,200 - \frac{4\,800}{p+4} \\ &= \frac{1\,200(p+4) - 4\,800}{p+4} \\ &= \frac{1\,200p}{p+4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux écritures sont égales : pour tout $p \geq 0$, $R(p) = 1\,200 - \dfrac{4\,800}{p+4}$.

2. 0,75 pts

Calculer $\lim_{p \to +\infty} q(p)$ et interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la limite d'un quotient de numérateur constant.

CORRIGÉ

Limite. Par somme, $p+4$ tend vers $+\infty$. Le numérateur est constant, égal à $1\,200$. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{p \to +\infty} q(p) = 0.$$

Conclusion. La limite vaut 0 : un prix très élevé fait presque disparaître les ventes.

3. 1 pts

Calculer $\lim_{p \to +\infty} R(p)$ de deux façons : avec l'écriture de la question 1, puis avec le quotient des termes de plus haut degré.

INDICE

Outil : la limite d'une somme ; ensuite, les limites en l'infini d'une fonction rationnelle.

CORRIGÉ

Première façon. Comme à la question 2, $\dfrac{4\,800}{p+4}$ tend vers 0 en $+\infty$, d'après la limite d'un quotient. Par somme, avec la question 1, $\lim_{p \to +\infty} R(p) = 1\,200$.

Seconde façon. $R(p) = \dfrac{1\,200p}{p+4}$. D'après les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, seuls $1\,200p$ et p, termes de plus haut degré, comptent. Pour $p > 0$:

$$\frac{1\,200p}{p} = 1\,200.$$

On retrouve $\lim_{p \to +\infty} R(p) = 1\,200$.

Conclusion. Les deux méthodes donnent la même limite, $1\,200$.

4. 0,5 pts

Montrer que $R(p) < 1\,200$ pour tout $p \geq 0$. Que représente le nombre $1\,200$ pour le marchand ?

INDICE

Outil : le signe de $\dfrac{4\,800}{p+4}$ quand $p \geq 0$.

CORRIGÉ

Inégalité. Soit $p \geq 0$. Alors $p + 4 > 0$, donc $\dfrac{4\,800}{p+4} > 0$. Avec la question 1, $R(p) < 1\,200$.

Interprétation. D'après la question 3, $R(p)$ se rapproche de $1\,200$ quand le prix devient très grand.

Conclusion. Pour tout $p \geq 0$, $R(p) < 1\,200$: dans ce modèle, $1\,200$ DH est une recette journalière jamais atteinte, mais approchée pour un prix très élevé.

5. `0,75 pts`

Pour quel prix la recette journalière vaut-elle $1\,000$ DH ?

INDICE

Outil : l'écriture de la question 1 ; isole la fraction.

CORRIGÉ

Équation. Avec la question 1, on résout pour $p \geq 0$:

$$\begin{aligned} 1\,200 - \frac{4\,800}{p+4} &= 1\,000 \\ \frac{4\,800}{p+4} &= 200 \\ p+4 &= 24 \end{aligned}$$

donc $p = 20$, qui vérifie bien $p \geq 0$.

Contrôle. $q(20) = \dfrac{1\,200}{24} = 50$ verres, et $R(20) = 20 \times 50 = 1\,000$ DH.

Conclusion. La recette journalière vaut $1\,000$ DH pour un prix de 20 DH le verre.

Exercice 5 5 pts

Une valeur absolue au numérateur

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par $h(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$.

1. 1,25 pts

Montrer que $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ pour $x > 2$, et que $h(x) = -\dfrac{1}{x+2}$ pour $x < 2$ avec $x \neq -2$.

INDICE

Outil : factorise $x^2 - 4$; le signe de $x - 2$ donne la valeur absolue.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Le signe de $x - 2$ donne la valeur absolue.

- Pour $x > 2$, $|x-2| = x - 2$, donc $h(x) = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{x+2}$.
- Pour $x < 2$ et $x \neq -2$, $|x-2| = -(x-2)$, donc $h(x) = \dfrac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = -\dfrac{1}{x+2}$.

Dans les deux cas, on simplifie par $x - 2$, non nul.

Conclusion. $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ pour $x > 2$, et $h(x) = -\dfrac{1}{x+2}$ pour $x < 2$ avec $x \neq -2$.

2. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to 2^+} h(x)$ et $\lim_{x \to 2^-} h(x)$. La fonction h a-t-elle une limite en 2 ?

INDICE

Outil : à droite de 2, utilise $\dfrac{1}{x+2}$; à gauche, $-\dfrac{1}{x+2}$.

CORRIGÉ

À droite. D'après la limite en un réel d'une fonction rationnelle, $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ a pour limite $\dfrac{1}{4}$ en 2, donc aussi à droite de 2. Comme h coïncide avec cette fonction pour $x > 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \frac{1}{4}.$$

À gauche. De même, avec $x \mapsto -\dfrac{1}{x+2}$ pour $x < 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion. Les limites à droite et à gauche en 2 sont différentes : h n'a pas de limite en 2.

3. 1,5 pts

Calculer $\lim_{x \to -2^+} h(x)$ et $\lim_{x \to -2^-} h(x)$.

INDICE

Outil : près de -2, on a $x < 2$; étudie le signe de $x + 2$ de part et d'autre de -2.

CORRIGÉ

Près de -2, on a $x < 2$, donc $h(x) = \dfrac{-1}{x+2}$. Le numérateur vaut -1 et le dénominateur tend vers 0.

Selon la limite d'un quotient, le signe de $x + 2$ donne celui de la limite :

- pour $x > -2$, $x + 2 > 0$, donc $\lim_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$;
- pour $x < -2$, $x + 2 < 0$, donc $\lim_{x \to -2^-} h(x) = +\infty$.

Conclusion. La fonction h tend vers $-\infty$ à droite de -2 et vers $+\infty$ à gauche de -2.

4. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

INDICE

Outil : choisis la bonne écriture selon le signe de $x - 2$, puis la limite d'un quotient.

CORRIGÉ

En $+\infty$. Pour $x > 2$, $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Par somme, $x + 2$ tend vers $+\infty$; le numérateur vaut 1. D'après la limite d'un quotient, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

En $-\infty$. Pour $x < -2$, $h(x) = \dfrac{-1}{x+2}$, et $x + 2$ tend vers $-\infty$. De même, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

Conclusion. La fonction h a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.