BURHAN

Limite d'une fonction numérique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Limite d'une fonction numérique	Entraînement	7

Exercice 1

Une forme 0/0 levée par deux factorisations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$.

1.

Montrer que le calcul direct de la limite de f en 4 conduit à une forme indéterminée.

INDICE

Outil : calcule le numérateur et le dénominateur en 4.

2.

Factoriser $x^2 - 2x - 8$ et $x^2 - 16$, puis simplifier $f(x)$.

INDICE

Outil : le discriminant du premier trinôme ; pour le second, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

3.

En déduire $\lim_{x \to 4} f(x)$.

INDICE

Outil : la limite en un réel d'une fonction rationnelle, appliquée à l'écriture simplifiée.

4.

Calculer $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -4^-} f(x)$.

INDICE

Outil : le haut de la fraction, $x + 2$, a une limite non nulle ; regarde le signe de $x + 4$ de chaque côté.

Exercice 2

De part et d'autre de deux réels interdits

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - x - 2}$.

1.

Factoriser $x^2 - x - 2$, donner l'ensemble de définition de g et étudier le signe de ce trinôme.

INDICE

Outil : le discriminant ; un trinôme a le signe de son coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines.

2.

Calculer les limites de g à droite et à gauche en 2.

INDICE

Outil : le numérateur tend vers un réel non nul ; lis le signe du dénominateur de chaque côté de 2.

3.

Même travail en -1.

INDICE

Outil : même méthode ; regarde le signe du dénominateur juste à droite, puis juste à gauche de -1.

4.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

INDICE

Outil : les limites en l'infini d'une fonction rationnelle.

Exercice 3

Une racine carrée moins x

On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.

1.

Justifier que h est définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

INDICE

Outil : le signe de x^2+4 ; ensuite, la règle pour la racine carrée d'une fonction, puis une somme.

2.

Expliquer pourquoi le calcul direct de la limite de h en $+\infty$ ne permet pas de conclure.

INDICE

Outil : cherche la limite de chacun des deux termes en $+\infty$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4}+x$; vérifie d'abord qu'elle ne s'annule pas.

Exercice 4

Trois racines carrées de fonctions

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{25x-3}{x+2}}$.

INDICE

Outil : calcule d'abord la limite de l'expression placée sous la racine.

2.

Calculer $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - x + 1}$.

INDICE

Outil : le terme de plus haut degré sous la racine ; étudie d'abord le signe du trinôme.

3.

Calculer $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2-5}$, puis $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x-1}$.

INDICE

Outil : la limite sous la racine, puis la limite d'un quotient.

Exercice 5

Une fonction coincée entre deux quotients

Une fonction u est définie sur $[1, +\infty[$. On ne connaît pas son expression, mais on sait que, pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{3x-1}{x} \leq u(x) \leq \frac{3x+2}{x}.$$

1.

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $-\frac{1}{x} \leq u(x) - 3 \leq \frac{2}{x}$.

INDICE

Outil : retranche 3 aux trois membres, puis simplifie chaque fraction.

2.

En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $|u(x) - 3| \leq \frac{2}{x}$.

INDICE

Outil : comme $x > 0$, compare $-\frac{2}{x}$ et $-\frac{1}{x}$.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} u(x)$.

INDICE

Outil : la limite par encadrement ; quelle est la limite de $\frac{2}{x}$?

Exercice 6

Minorer pour conclure

On considère la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x + \dfrac{1}{2}|x - 6|$.

1.

Justifier que, pour tout réel x, $v(x) \geq 2x$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} v(x)$.

INDICE

Outil : une valeur absolue est positive ; ensuite, la limite infinie par comparaison.

2.

Montrer que, pour tout $x \leq 6$, $v(x) = \dfrac{3}{2}x + 3$. En déduire $\lim_{x \to -\infty} v(x)$.

INDICE

Outil : pour $x \leq 6$, $x - 6 \leq 0$, donc $|x - 6| = 6 - x$.

3.

Un élève remarque que, pour $x \geq 6$, $v(x) \leq 3x$. Il en déduit que v tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Vérifier son inégalité. Son raisonnement est-il correct ?

INDICE

Outil : quelle inégalité permet de conclure à une limite égale à $+\infty$?

Exercice 7

Le bénéfice moyen d'une petite usine

Une petite usine imaginaire fabrique des chaises ; les données sont inventées. Pour x centaines de chaises, avec $x > 0$, son bénéfice, en milliers de dirhams, est $B(x) = -x^2 + 80x - 700$. Le bénéfice moyen par centaine de chaises est $b(x) = \dfrac{B(x)}{x}$.

1.

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $b(x) = -x + 80 - \dfrac{700}{x}$.

INDICE

Outil : divise chacun des trois termes de $B(x)$ par x.

2.

Calculer $\lim_{x \to 0^+} b(x)$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : les limites de référence en 0 à droite, puis la limite d'une somme.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} b(x)$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

Outil : la limite de chaque terme en $+\infty$, puis la limite d'une somme.