BURHAN

# Limite d'une fonction numérique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Économiques et Gestion · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-economiques-et-gestion/mathematiques/limite-d-une-fonction/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Limite d'une fonction numérique | Entraînement | 7 |

### Exercice 1

## Une forme 0/0 levée par deux factorisations

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$.

### 1.

Montrer que le calcul direct de la limite de $f$ en $4$ conduit à une forme indéterminée.

INDICE

**Outil :** calcule le numérateur et le dénominateur en $4$.

CORRIGÉ

D'après la limite en un réel d'un polynôme, le numérateur et le dénominateur tendent vers leurs valeurs en $4$ :

- numérateur : $16 - 8 - 8 = 0$ ;
- dénominateur : $16 - 16 = 0$.

**Conclusion.** Le calcul direct conduit à la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ : il faut transformer l'écriture de $f(x)$.

### 2.

Factoriser $x^2 - 2x - 8$ et $x^2 - 16$, puis simplifier $f(x)$.

INDICE

**Outil :** le discriminant du premier trinôme ; pour le second, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

CORRIGÉ

**Numérateur.** Le discriminant de $x^2 - 2x - 8$ est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) \\ &= 36. \end{aligned}$$

Les racines sont $\dfrac{2 + 6}{2} = 4$ et $\dfrac{2 - 6}{2} = -2$. Pour tout réel $x$, $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

**Dénominateur.** D'après l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, pour tout réel $x$, $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$.

**Simplification.** Pour $x$ différent de $4$ et de $-4$, le facteur $x - 4$ n'est pas nul, et on simplifie par $x - 4$ :

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 4}.$$

**Conclusion.** Pour tout $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 4}$.

### 3.

En déduire $\lim_{x \to 4} f(x)$.

INDICE

**Outil :** la limite en un réel d'une fonction rationnelle, appliquée à l'écriture simplifiée.

CORRIGÉ

Pour $x$ proche de $4$ et différent de $4$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x+4}$. En $4$, le dénominateur $x+4$ vaut $8$ et ne s'annule pas. On remplace donc $x$ par $4$ dans l'écriture simplifiée, ce qu'autorise la limite en un réel d'une fonction rationnelle :

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{4+2}{8} = \frac{3}{4}.$$

**Conclusion.** La limite de $f$ en $4$ vaut $\dfrac{3}{4}$.

### 4.

Calculer $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -4^-} f(x)$.

INDICE

**Outil :** le haut de la fraction, $x+2$, a une limite non nulle ; regarde le signe de $x+4$ de chaque côté.

CORRIGÉ

Près de $-4$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x+4}$. Le numérateur tend vers $-2$, réel non nul, et le dénominateur vers $0$. On conclut avec la limite d'un quotient, en lisant le signe de $x+4$ :

- pour $x > -4$, $x+4 > 0$, donc $\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$ ;
- pour $x < -4$, $x+4 < 0$, donc $\lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty$.

**Conclusion.** La fonction $f$ tend vers $-\infty$ à droite de $-4$ et vers $+\infty$ à gauche de $-4$.

Exercice 2

## De part et d'autre de deux réels interdits

On considère la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{x+5}{x^2-x-2}$.

### 1.

Factoriser $x^2 - x - 2$, donner l'ensemble de définition de $g$ et étudier le signe de ce trinôme.

INDICE

**Outil :** le discriminant ; un trinôme a le signe de son coefficient de $x^2$ à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

**Factorisation.** $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. Les racines sont $\dfrac{1+3}{2} = 2$ et $\dfrac{1-3}{2} = -1$. Pour tout réel $x$, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

**Ensemble de définition.** Le dénominateur s'annule en $-1$ et en $2$ : $g$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

**Signe.** Le coefficient de $x^2$ vaut $1 > 0$. Le trinôme a ce signe à l'extérieur de ses racines, le signe contraire entre elles :

- $x^2 - x - 2 > 0$ pour $x < -1$ et pour $x > 2$ ;
- $x^2 - x - 2 < 0$ pour $-1 < x < 2$.

**Conclusion.** $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, $g$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, et le trinôme est négatif seulement entre $-1$ et $2$.

### 2.

Calculer les limites de $g$ à droite et à gauche en $2$.

INDICE

**Outil :** le numérateur tend vers un réel non nul ; lis le signe du dénominateur de chaque côté de $2$.

CORRIGÉ

D'après la limite en un réel d'un polynôme, le numérateur $x + 5$ tend vers $7$, non nul, et le dénominateur vers $0$. D'après la question 1, le dénominateur est positif pour $x > 2$ et négatif pour $-1 < x < 2$. La règle des signes de la limite d'un quotient s'applique de chaque côté :

- à droite de $2$ : $\lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$ ;
- à gauche de $2$ : $\lim_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$.

**Conclusion.** La fonction $g$ tend vers $+\infty$ à droite de $2$ et vers $-\infty$ à gauche de $2$.

### 3.

Même travail en $-1$.

INDICE

**Outil :** même méthode ; regarde le signe du dénominateur juste à droite, puis juste à gauche de $-1$.

CORRIGÉ

En $-1$, le numérateur tend vers $4$, non nul, et le dénominateur vers $0$. D'après la question 1, le dénominateur est négatif pour $-1 < x < 2$ et positif pour $x < -1$. Même règle des signes pour la limite d'un quotient :

- à droite de $-1$ : $\lim_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$ ;
- à gauche de $-1$ : $\lim_{x \to -1^-} g(x) = +\infty$.

**Conclusion.** La fonction $g$ tend vers $-\infty$ à droite de $-1$ et vers $+\infty$ à gauche de $-1$.

### 4.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

INDICE

**Outil :** les limites en l'infini d'une fonction rationnelle.

CORRIGÉ

D'après les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, on compare les termes de plus haut degré, $x$ en haut et $x^2$ en bas. Pour $x \neq 0$ :

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

D'après les limites de référence, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $0$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.

**Conclusion.** $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

### Exercice 3

## Une racine carrée moins x

On considère la fonction $h$ définie par $h(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.

**1.**

Justifier que $h$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

INDICE

**Outil :** le signe de $x^2+4$ ; ensuite, la règle pour la racine carrée d'une fonction, puis une somme.

CORRIGÉ

**Ensemble de définition.** Pour tout réel $x$, $x^2 \geq 0$, donc $x^2+4 \geq 4 > 0$ : la racine existe, et $h$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**Premier terme.** En $-\infty$, d'après les limites en l'infini d'un polynôme, $x^2+4$ tend vers $+\infty$. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{x^2+4}$ aussi.

**Second terme.** Par produit par $-1$, $-x$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

**Conclusion.** Par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty.$$

**2.**

Expliquer pourquoi le calcul direct de la limite de $h$ en $+\infty$ ne permet pas de conclure.

INDICE

**Outil :** cherche la limite de chacun des deux termes en $+\infty$.

CORRIGÉ

En $+\infty$, $\sqrt{x^2+4}$ tend vers $+\infty$, par le même raisonnement qu'à la question 1, et $-x$ tend vers $-\infty$.

**Conclusion.** La somme conduit à la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ : le calcul direct ne permet pas de conclure.

### 3.

Montrer que, pour tout réel $x$, $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

INDICE

**Outil :** multiplie et divise par l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4}+x$ ; vérifie d'abord qu'elle ne s'annule pas.

CORRIGÉ

**Dénominateur.** Soit $x$ un réel. Comme $x^2+4 > x^2 \geq 0$ et que la racine carrée conserve l'ordre des réels positifs, $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = |x|$. Or $|x| \geq -x$, donc $\sqrt{x^2+4}+x > 0$ : l'expression conjuguée ne s'annule pas.

**Expression conjuguée.** On multiplie et on divise par $\sqrt{x^2+4}+x$. D'après l'identité $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} \\ &= \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}. \end{aligned}$$

**Limite.** En $+\infty$, $\sqrt{x^2+4}$ et $x$ tendent vers $+\infty$ ; par somme, le dénominateur aussi. Le numérateur vaut $4$. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$, et la limite de $h$ en $+\infty$ vaut $0$.

### Exercice 4

## Trois racines carrées de fonctions

### 1.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{25x-3}{x+2}}$.

INDICE

**Outil :** calcule d'abord la limite de l'expression placée sous la racine.

CORRIGÉ

**Sous la racine.** D'après les limites en l'infini d'une fonction rationnelle, $\dfrac{25x-3}{x+2}$ a la même limite en $+\infty$ que $\dfrac{25x}{x}$, égal à $25$ pour $x \neq 0$.

**Racine.** La limite $25$ est positive. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{25x-3}{x+2}} = \sqrt{25} = 5.$$

**Conclusion.** La limite cherchée vaut $5$.

### 2.

Calculer $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-x+1}$.

INDICE

**Outil :** le terme de plus haut degré sous la racine ; étudie d'abord le signe du trinôme.

CORRIGÉ

**Signe.** Le discriminant de $2x^2-x+1$ vaut $(-1)^2-4\times2\times1=-7<0$, et le coefficient de $x^2$ est positif. Pour tout réel $x$, $2x^2-x+1>0$ : la racine est définie sur $\mathbb{R}$.

**Sous la racine.** D'après les limites en l'infini d'un polynôme, $2x^2-x+1$ a la même limite que $2x^2$ en $-\infty$, soit $+\infty$.

**Conclusion.** La limite de la racine carrée d'une fonction s'applique à ce trinôme positif :

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2-x+1} = +\infty.$$

### 3.

Calculer $\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-5}$, puis $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x-1}$.

INDICE

**Outil :** la limite sous la racine, puis la limite d'un quotient.

CORRIGÉ

**Racine.** D'après la limite en un réel d'un polynôme, $x^2-5$ tend vers $9-5=4$, réel positif. D'après la limite de la racine carrée d'une fonction :

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-5}=\sqrt{4}=2.$$

**Quotient.** Le dénominateur $x-1$ tend vers $2$, non nul. D'après la limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-5}}{x-1}=\frac{2}{2}=1.$$

**Conclusion.** La première limite vaut $2$ et la seconde vaut $1$.

### Exercice 5

## Une fonction coincée entre deux quotients

Une fonction $u$ est définie sur $[1, +\infty[$. On ne connaît pas son expression, mais on sait que, pour tout $x \geq 1$ :

$$\frac{3x-1}{x} \leq u(x) \leq \frac{3x+2}{x}.$$

### 1.

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $-\frac{1}{x} \leq u(x) - 3 \leq \frac{2}{x}$.

INDICE

**Outil :** retranche $3$ aux trois membres, puis simplifie chaque fraction.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 1$. On retranche $3$ aux trois membres de l'encadrement, ce qui conserve les inégalités.

**Membre de gauche.**

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{x} - 3 &= \frac{3x-1-3x}{x} \\ &= -\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

**Membre de droite.**

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{x} - 3 &= \frac{3x+2-3x}{x} \\ &= \frac{2}{x}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x \geq 1$, $-\frac{1}{x} \leq u(x) - 3 \leq \frac{2}{x}$.

### 2.

En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $|u(x) - 3| \leq \frac{2}{x}$.

INDICE

**Outil :** comme $x > 0$, compare $-\frac{2}{x}$ et $-\frac{1}{x}$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 1$. Comme $x > 0$, $\frac{1}{x} \leq \frac{2}{x}$, donc $-\frac{2}{x} \leq -\frac{1}{x}$. Avec la question 1 :

$$-\frac{2}{x} \leq u(x) - 3 \leq \frac{2}{x}.$$

Un réel compris entre $-\frac{2}{x}$ et $\frac{2}{x}$ a une valeur absolue inférieure ou égale à $\frac{2}{x}$.

**Conclusion.** Pour tout $x \geq 1$, $|u(x) - 3| \leq \frac{2}{x}$.

### 3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} u(x)$.

INDICE

**Outil :** la limite par encadrement ; quelle est la limite de $\dfrac{2}{x}$ ?

CORRIGÉ

**Limite du majorant.** D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $0$ ; par produit, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.

**Encadrement.** L'inégalité de la question 2 est vraie pour tout $x \geq 1$. D'après la limite par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 3.$$

**Conclusion.** La fonction $u$ a pour limite $3$ en $+\infty$.

### Exercice 6

## Minorer pour conclure

On considère la fonction $v$ définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x + \dfrac{1}{2}|x-6|$.

**1.**

Justifier que, pour tout réel $x$, $v(x) \geq 2x$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} v(x)$.

INDICE

**Outil :** une valeur absolue est positive ; ensuite, la limite infinie par comparaison.

CORRIGÉ

**Inégalité.** Soit $x$ un réel. Une valeur absolue est positive : $|x-6| \geq 0$, donc $\dfrac{1}{2}|x-6| \geq 0$ et $v(x) \geq 2x$.

**Limite.** Par produit, $2x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme $v(x) \geq 2x$ pour tout réel $x$, la limite infinie par comparaison donne :

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty.$$

**Conclusion.** Pour tout réel $x$, $v(x) \geq 2x$, et $v$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

**2.**

Montrer que, pour tout $x \leq 6$, $v(x) = \dfrac{3}{2}x + 3$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} v(x)$.

INDICE

**Outil :** pour $x \leq 6$, $x-6 \leq 0$, donc $|x-6| = 6-x$.

CORRIGÉ

**Écriture.** Soit $x \leq 6$. Alors $x-6 \leq 0$, donc $|x-6| = 6-x$ et :

$$\begin{aligned} v(x) &= 2x + \frac{1}{2}(6-x) \\ &= 2x + 3 - \frac{1}{2}x \\ &= \frac{3}{2}x + 3. \end{aligned}$$

**Limite.** D'après les limites en l'infini d'un polynôme, $\dfrac{3}{2}x + 3$ a la même limite en $-\infty$ que $\dfrac{3}{2}x$. Par produit par $\dfrac{3}{2} > 0$, cette limite vaut $-\infty$.

**Conclusion.** Pour tout $x \leq 6$, $v(x) = \dfrac{3}{2}x + 3$, et $\lim_{x\to-\infty} v(x) = -\infty$.

### 3.

Un élève remarque que, pour $x \geq 6$, $v(x) \leq 3x$. Il en déduit que $v$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Vérifier son inégalité. Son raisonnement est-il correct ?

INDICE

**Outil :** quelle inégalité permet de conclure à une limite égale à $+\infty$ ?

CORRIGÉ

**Inégalité de l'élève.** Soit $x \geq 6$. Alors $|x-6| = x-6$, donc :

$$\begin{aligned} v(x) &= 2x + \frac{1}{2}x - 3 \\ &= \frac{5}{2}x - 3. \end{aligned}$$

Ainsi $3x - v(x) = \dfrac{1}{2}x + 3 > 0$ : pour $x \geq 6$, on a bien $v(x) \leq 3x$.

**Raisonnement.** Majorer $v(x)$ par une fonction de limite $+\infty$ n'apporte rien : une fonction majorée par $x \mapsto 3x$ peut aussi bien tendre vers un réel ou vers $-\infty$. Pour obtenir une limite égale à $+\infty$, la limite infinie par comparaison demande une minoration, comme à la question 1.

**Conclusion.** L'inégalité est juste, mais le raisonnement est faux : la limite $+\infty$ est exacte, d'après la question 1, sans découler de cette majoration.

### Exercice 7

## Le bénéfice moyen d'une petite usine

Une petite usine imaginaire fabrique des chaises ; les données sont inventées. Pour $x$ centaines de chaises, avec $x > 0$, son bénéfice, en milliers de dirhams, est $B(x) = -x^2 + 80x - 700$. Le bénéfice moyen par centaine de chaises est $b(x) = \dfrac{B(x)}{x}$.

**1.**

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $b(x) = -x + 80 - \dfrac{700}{x}$.

INDICE

**Outil :** divise chacun des trois termes de $B(x)$ par $x$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. On divise chacun des trois termes de $B(x)$ par $x$ :

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{-x^2}{x} + \frac{80x}{x} - \frac{700}{x} \\ &= -x + 80 - \frac{700}{x}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x > 0$, $b(x) = -x + 80 - \dfrac{700}{x}$.

**2.**

Calculer $\lim_{x \to 0^+} b(x)$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

**Outil :** les limites de référence en $0$ à droite, puis la limite d'une somme.

CORRIGÉ

**Limite.** D'après les limites de référence en $0$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ à droite en $0$. Par produit par $-700$, $-\dfrac{700}{x}$ tend vers $-\infty$. D'après la limite en un réel d'un polynôme, $-x + 80$ tend vers $80$. Par somme :

$$\lim_{x \to 0^+} b(x) = -\infty.$$

**Interprétation.** Pour une très petite production, les charges fixes de $700$ milliers de dirhams pèsent sur très peu de chaises.

**Conclusion.** La limite vaut $-\infty$ : quand la production devient très faible, le bénéfice moyen devient très négatif.

### 3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} b(x)$, puis interpréter ce résultat.

INDICE

**Outil :** la limite de chaque terme en $+\infty$, puis la limite d'une somme.

CORRIGÉ

**Limite.** D'après les limites de référence en l'infini, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $0$ ; par produit, $\dfrac{700}{x}$ aussi. Par produit par $-1$, $-x$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$, et par somme $-x + 80$ aussi. Par somme encore :

$$\lim_{x \to +\infty} b(x) = -\infty.$$

**Interprétation.** Dans ce modèle, une production trop grande fait chuter le bénéfice moyen.

**Conclusion.** La limite vaut $-\infty$ : l'usine n'a pas avantage à produire en quantité énorme.